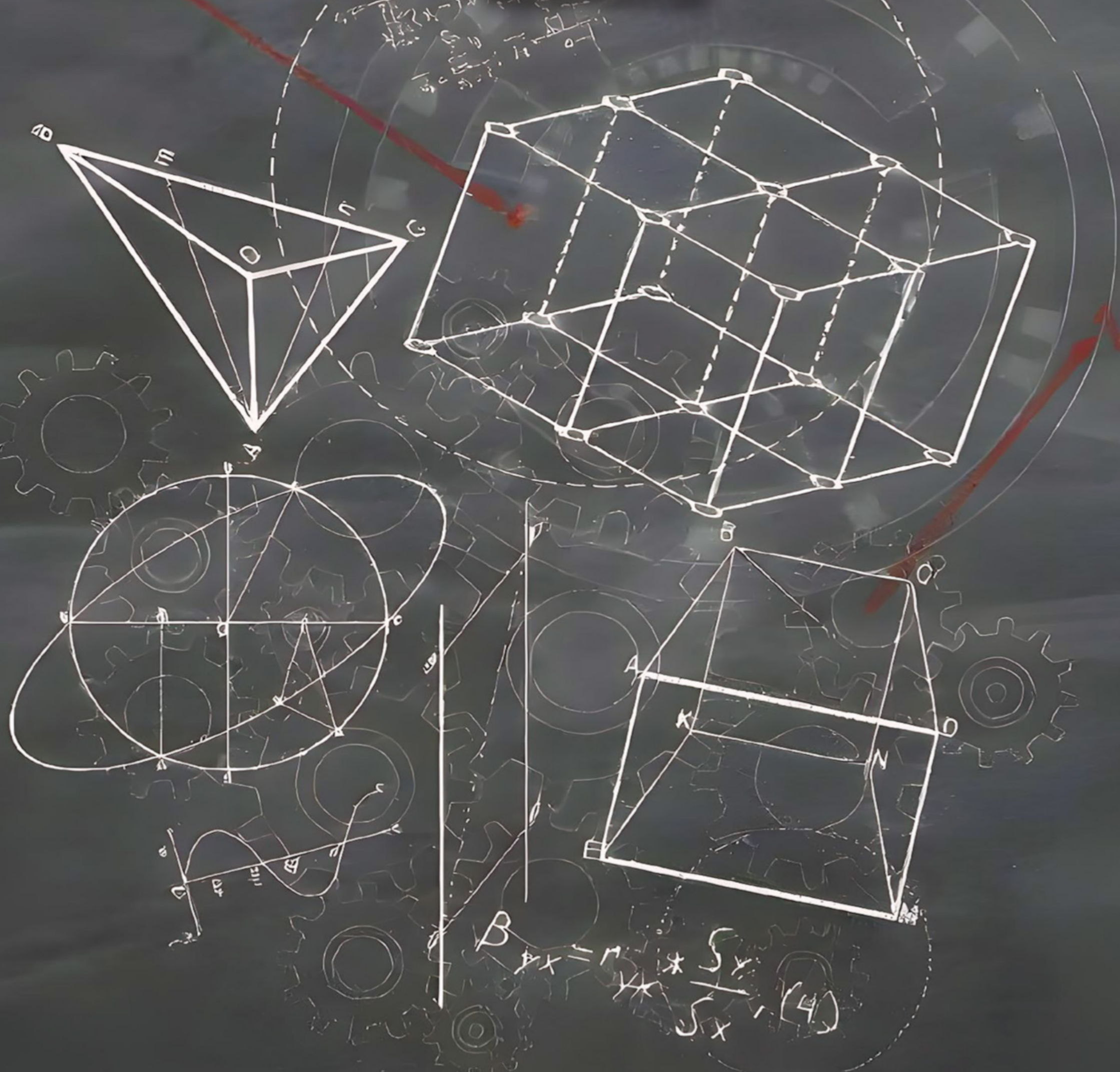
Aprendiendo a Demostrar

Un libro para adquirir habilidad al utilizar seis métodos elementales de prueba en Matemáticas



Adriana Soberano Morales

José Leonardo Sáenz Cetina

José Edilberto Rodríguez Cervera

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

"Estudio en la duda. Acción en la fe"

Aprendiendo a Demostrar

Un libro para adquirir habilidad al utilizar
seis métodos elementales de prueba en Matemáticas

COLECCIÓN
HÉCTOR OCHOA BACELIS
Textos de enseñanza de Ciencias Básicas

Guillermo Narváez Osorio
Rector

Hermicenda Pérez Vidal
Directora de la División Académica
de Ciencias Básicas

Aprendiendo a Demostrar

Un libro para adquirir habilidad al utilizar
seis métodos elementales de prueba en Matemáticas

Adriana Soberano Morales

José Leonardo Sáenz Cetina

José Edilberto Rodríguez Cervera

Universidad Juárez
Autónoma de Tabasco

"Estudio en la duda. Acción en la fe"

Primera edición, 2025

ISBN: 978-607-2628-55-7

DOI: `https://doi.org/10.52501/UJAT.003`

Maquetación: José Edilberto Rodríguez Cervera

Diseño de portada: Francisco Zeledón

Corrección de estilo: Julio Gallardo

Hecho en Villahermosa, Tabasco, México

DEDICATORIA

Estoy muy agradecida con el Dr. José Leonardo Sáenz Cetina, por ser mi mentor y mi apoyo total para lograr concluir una meta muy importante en mi vida. Gracias a él, hoy soy una profesionista; él me inspiro a enseñar Matemáticas con amor.

Adriana Soberano Morales

Índice general

PRÓLOGO

Las Matemáticas se caracterizan por el rigor de sus afirmaciones y la exactitud de sus resultados; sin embargo, el logro de esta precisión ha sido fruto del trabajo y la perseverancia de varias generaciones de matemáticos. Debemos recordar que, durante mucho tiempo, fue la intuición la que guió el quehacer de las mentes matemáticas. Así lo muestra el desarrollo del Cálculo Infinitesimal a lo largo de los siglos XVII y XVIII, en los cuales se construyeron las bases de la ciencia moderna. En ese entonces, las nuevas ideas irrumpieron con tal fuerza creadora, que se dejó un tanto de lado la claridad de los conceptos y los procedimientos; nociones como las de variable, función, continuidad, derivabilidad, etc., se utilizaron sin recelo, apelando más al instinto matemático, que a la prudencia de la lógica.

No obstante, poco a poco, se hizo patente la necesidad de esclarecer las definiciones y precisar los métodos; de esta manera, en el siglo XIX, de la mano de grandes matemáticos como Cauchy, Weierstrass o Dirichlet, apareció un importante movimiento en favor de la claridad y el rigor. Esto dio por resultado una mayor formalización de las Matemáticas y, con ello, se hizo necesario el disponer de procedimientos de demostración apropiados a las afirmaciones que se deseaban probar. Estos métodos se desarrollaron y diversificaron ampliamente durante los siglos XX y XXI, y se han convertido en herramientas de trabajo muy valiosas para todo profesional de las Matemáticas.

El presente libro introduce al lector en algunos de estos métodos de demostración, describiendo con claridad las características de cada uno de ellos, así como las condiciones en las que son aplicables. El material se acompaña de una gran variedad de ejemplos, que ilustran, de forma comprensible y amena, los procedimientos implícitos en estos métodos, de tal manera que el lector pueda orientarse en su uso y aplicación.

Por todo ello, la lectura atenta y cuidadosa de este libro, proporcionará a los interesados en las Matemáticas, no únicamente una guía que de forma sencilla los conducirá a identificar los diferentes modos de demostración, sino, también, una metodología que, de forma didáctica, les permitirá entrenarse en el arte de la demostración rigurosa.

Dr. Gerardo Delgadillo Pinón
División Académica de Ciencias Básicas
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
Noviembre de 2024

INTRODUCCIÓN

Propósito de esta obra, alcances y prerrequisitos sugeridos para el lector

El objetivo de este libro es ilustrar, a través de ejemplos detallados, acerca de la estructura de ciertos métodos de prueba –los más comunes– que son de amplio uso tanto en Matemáticas como en disciplinas científicas que en su desarrollo teórico utilizan las Matemáticas. Para empezar, consideramos que una manera de simplificar la aproximación a dichas técnicas de demostración es mostrar cada una de ellas por separado, para así poder hacer énfasis en sus diferencias respectivas. Al mismo tiempo, dado el propósito eminentemente introductorio de este libro, nos restringimos únicamente a los procedimientos de argumentación más elementales, en la inteligencia de que intentamos *enseñar* a utilizar estos procedimientos a aquellos que aún no hayan tenido un acercamiento a ellos; aunque, sorprendentemente a nuestro favor, resultará el hecho de que, por sí solos, abarcan un amplísimo número de resultados; con lo que la persona recién iniciada en su estudio podrá sentirse satisfecha de los alcances de su aprovechamiento. Antes de continuar, procedemos a listar estos seis métodos de prueba: Método Directo, Reducción al Absurdo, Método Analítico, Demostración por Casos, Exhibición de Contraejemplo e Inducción Matemática. Al respecto de los ejemplos, hemos elegido tomarlos de las asignaturas más básicas de las Matemáticas; nuevamente, nos mueve para esto último la sencillez de sus resultados. Un recuento no exhaustivo es el siguiente: Teoría Elemental de Conjuntos, Álgebra Elemental, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Lineal, Cálculo Vectorial, Topología de Espacios Euclidianos, Números Complejos; entre otros pocos más. En cuanto a los requisitos teóricos de Matemáticas que se requieren se encuentra casi exclusivamente el manejo de procedimientos de cálculo, tanto numéricos como algebraicos, entre los que destacan: Operaciones Elementales entre Conjuntos, Operaciones Aritméticas, Manipulaciones Algebraicas, Resolución de Ecuaciones Algebraicas y Sistemas de Éstas, Manejo de Desigualdades, Solución de Inecuaciones, Límites de Funciones Elementales, Derivadas de Funciones Elementales; se incluyen también unos cuantos ejemplos con prerrequisitos teóricos más avanzados para quienes disfruten de más conocimiento en Matemáticas; para redondear lo anterior, se anexan ejercicios semejantes a los ejemplos presentados.

El papel de las demostraciones en Matemáticas y su relación con otros saberes procedimentales

Actualmente (2025), se encuentra de moda la presentación hipotética-deductiva de las Matemáticas, a la que se le suele llamar “Matemática Formal” o “Formalizada.” Esto puede constatarse en los diferentes libros de texto contemporáneos sobre las distintas disciplinas de Matemáticas que existen en circulación. Este enfoque formal consiste en partir de unas cuantas afirmaciones, a las que indistintamente se las llaman *Axiomas*, *Postulados* o *Principios*, las cuales se aceptan como incuestionablemente verdaderas, y el asunto consiste en *deducir* todas las demás afirmaciones de la teoría a partir de aquéllas. Ahora bien, la herramienta indispensable que se utiliza para hacer tal derivación de afirmaciones es la *demostración* de las segundas por medio de las primeras. Como se ve, el papel de las demostraciones en la arquitectura de la Matemática Formal es esencial; por lo que se impone como cuestión de vital importancia para adentrarse en este tipo de conocimiento el *dominio* de los diferentes métodos de prueba. Ahora bien, enfatizamos que para conseguir tal destreza se requiere del *aprendizaje* de estas técnicas de demostración, haciéndonos eco del refrán popular que dice “todo lo que es importante en la vida, se aprende.” Consideramos que no es suficiente con tener una cierta intuición de cómo funcionan las pruebas, ya que esta confianza puede llevar fácilmente a decepciones; los autores de estas líneas creemos que es necesario también un fuerte entrenamiento en los distintos procedimientos de demostración que permita conocer tanto las estructuras internas de éstos como sus diferencias, todo ello a través de ejemplos pormenorizados de sus aplicaciones. Nuevamente, para todo esto recomendamos ampliamente a quien desee conseguir tal habilidad, que se tome la pequeña molestia de sumergirse en las páginas de este tratado.

Abundando aún más en lo dicho en el párrafo anterior, los autores han podido constatar en su práctica docente que incluso personas con una sólida formación para efectuar cálculos en Matemáticas manifiestan abiertamente su estupor al enfrentarse a la tarea de aprender a hacer demostraciones, al comparar estos saberes procedimentales y constatar que son rotundamente diferentes, no bastando lo primero para salir airoso en lo segundo. Es que, efectivamente en general en cuestiones pedagógicas, un cierto saber-hacer no tiene que parecerse a otro, incluso en la misma disciplina científica y aún cuando se disponga de un conocimiento profundo de uno de ellos, ya que también las técnicas didácticas correspondientes para enseñar ambos pueden ser, de entrada, enteramente distintas. Se trata pues, llanamente, de un problema frecuente al abordar un nuevo aprendizaje. Sin embargo, dada la organización jerárquica de los distintos tipos de conocimientos, y como se podrá constatar en los ejemplos de este libro, el dominio en hacer cálculos, en ciertos aspectos dependientes del contenido material a demostrar, es indispensable para llevar a buen término una prueba. Y así sucesivamente, conforme se va desarrollando una teoría, los procedimientos de cálculo recientemente conseguidos suelen facilitar las demostraciones posteriores, dándose una simbiosis-retroalimentación muy fructífera y característica del grado de desenvolvimiento de una disciplina científica. Así pues, podemos afirmar que, tanto saber calcular como saber demostrar, son dos tipos de conocimiento imprescindibles a desarrollar para adentrarse en la actual Matemática Formalizada y sus aplicaciones.

Lo anterior no es, con todo, el final. Quienes trabajan en la investigación en Matemáticas o en teorías de disciplinas científicas que emplean las Matemáticas saben que, además de la Matemática Formal, existe otro tipo de matemática, a la que podemos denominar "Matemática Informal" o "Conjetural", que es en donde se concentra el trabajo de investigación. Los enunciados de dicha Matemática Informal se encuentran, por así decirlo, en la "frontera" de la Matemática Formal, y se caracterizan porque, a diferencia de los teoremas de la primera, aún no han recibido una prueba; a dichos enunciados usualmente se los llama *conjeturas*, y se los acepta como objeto de investigación debido a que han sido corroborados para un número muy alto de casos particulares, en el caso de Matemáticas, o por una cantidad enorme de observaciones, en el caso de las disciplinas científicas que aplican las Matemáticas. Un caso de conjetura que llamó la atención mundial estuvo dado por el, así llamado, *Último Teorema de Fermat*, el cual fue enunciado alrededor del año 1637 por Pierre de Fermat (1601-1665) y demostrado hasta 1995 por Andrew Wiles y Richard Taylor (para un recuento pormenorizado de la extensa historia alrededor de este enunciado, favor de consultar [18]). Para posterior referencia, damos a continuación una formulación de esta conjetura, en términos un tanto repetitivos, pero que en esta presentación nos será de gran utilidad más adelante. El Último Teorema de Fermat dice lo siguiente,

> "para todo x, para todo y, para todo z y para todo n, si x es un entero positivo, y es un entero positivo, z es un entero positivo, n es un entero positivo y n es mayor o igual que 3, entonces $x^n + y^n \neq z^n$."

Al ser el Último Teorema de Fermat un caso emblemático de conjetura matemática, vamos a proceder a efectuar un análisis de su estructura a continuación. Al principio aparece repetidamente la frase "para todo ..." A esta parte, se la conoce como la *cuantificación*, aunque hay que decir que el tipo de cuantificador puede variar –puede ser: universal o existencial, afirmativo o negativo; en el caso presente, y que aparece en todas las veces, es universal afirmativo–. Después, el resto lo compone un tipo de proposición de la forma "si ..., entonces ...", que en Lógica se denomina *proposición condicional*. En ella, el enunciado localizado entre la palabra "si" y la palabra "entonces" se lo llama las *hipótesis*, las *premisas* o el *antecedente de la proposición condicional*. Como se ve, éste se compone de varios enunciados, que a su vez son denominados hipótesis o premisas, enlazados por medio de la conjunción; es decir, por la palabra "y." Finalmente, posterior a la palabra "entonces" viene lo que se conoce como la *tesis*, la *conclusión* o el *consecuente de la proposición condicional*.

Hasta aquí con el análisis de la estructura de una típica conjetura. Ahora bien, el lector seguramente se preguntará, ¿qué tiene que ver todo esto con los temas que abordaremos en este libro? Enseguida intentaremos dar la respuesta. Pongámonos ahora en el lugar de un investigador que está colocado frente a una de estas conjeturas. Dado que ésta ha sido corroborada un número suficiente de veces, lo mejor que se le puede recomendar a dicho investigador por parte de alguien más experimentado (ver [12]) es *ponerse a demostrar este enunciado*. Antes de continuar, debemos decir que un procedimiento habitual antes de pasar a una prueba consiste en suprimir la cuantificación, utilizando para esto ciertos trucos aplicables a las variables cuantificadas, y que pueden ser consultados en los tratados de Lógica Matemática (ver, por ejemplo, [3] o [21]). Esto significa que el interesado puede empezar el trabajo de demostración con una proposición de la forma "si P, entonces Q", en donde P representa las hipótesis, en tanto que Q constituye la tesis. Continuando, ahora el asunto se reduce a probar Q a partir de P. Es en este momento cuando el investigador puede echar mano de las distintas *técnicas de demostración que existen* para llevar a cabo la tarea. Aunque, parafraseando al gran Pierre de Fermat, "este espacio es demasiado pequeño para dar cuenta de los avatares que puede sufrir una conjetura al ser atacada a través de sucesivas pruebas" (nuevamente, para lo anterior consúltese

[12]), al final, después de muchos intentos de demostración y si el interesado tiene suerte, obtendrá una proposición de la forma "si P', entonces Q'", en donde, y a diferencia de lo ocurrido con el Último Teorema de Fermat, tanto el antecedente P, como el consecuente Q originales, han sido reemplazados por P' y Q', respectivamente, pero que, en contraste, la proposición condicional correspondiente, con su cuantificación debidamente restituida, ha sido objeto de una *prueba exitosa*, convirtiéndose con ello en un legítimo *teorema de la Matemática Formalizada*. Es en este punto en que el investigador puede darse por satisfecho, ya que todo el esfuerzo empleado previamente ha quedado, por el momento, justificado.

A pesar de que el párrafo anterior no hace suficiente justicia a la verdadera ordalía que representa el trabajo ordinario de investigación en Matemáticas, al menos esperamos con él haber respondido a la pregunta formulada al principio del mismo. Como seguramente se pudo apreciar, el *conocimiento* de los métodos de demostración, y, más aún, la *pericia* en su empleo, son verdaderamente indispensables para el investigador de Matemáticas. Y es que, a diferencia de los teoremas de la Matemática Formal, las conjeturas de la Matemática Informal constituyen en contraste un terreno movedizo, ya que en ellas tanto las hipótesis como la tesis se andan tambaleando, a pesar de los esfuerzos previos de corroboración; por lo que las únicas herramientas verdaderamente firmes que posee el interesado las constituyen las técnicas de prueba. Por cierto, podemos afirmar también que, debido al recurso de los métodos de demostración, el saber probar y el saber hacer investigación se encuentran más cercanos en su estructura, que la que hay entre el saber demostrar y el saber efectuar cálculos. En fin, en todo caso, si el lector está interesado en convertirse, o es, un investigador en Matemáticas o en alguna disciplina científica que en su desarrollo teórico haga uso de las Matemáticas, y si considera que no está de más darse una "fogueada" en las técnicas elementales de prueba como preparación para su preciada tarea tan deseada, próxima o actual, lo invitamos a adentrarse en las páginas de este libro para encontrar el material requerido para este entrenamiento.

Demostraciones "manuales" versus Probadores Automáticos de Teoremas

Desde la segunda mitad del siglo veinte han aparecido unos programas de ordenador denominados "Probadores Automáticos de Teoremas" –o ATP por sus siglas en inglés–, los cuales, en un principio (ver [11]), se utilizaban para la demostración de teoremas de la Lógica Proposicional o de la Geometría Euclidiana. Para poder efectuar tal labor, al programa se le proporcionaban los axiomas de la teoría, algunas reglas de inferencia y ciertas guías más o menos intuitivas para proceder en las pruebas; con estas herramientas, se suponía que la computadora quedaba capacitada para proveer las demostraciones correspondientes. Más recientemente, a principios del siglo veintiuno (ver [5] y [9]), dichos programas se han ampliado a las pruebas, en general, de teoremas matemáticos; no obstante, aún siguen dependiendo de la información que se les proporciona a fin de que cuenten con todos los datos necesarios para hacer los enlaces y obtener las conclusiones. Es alrededor de este avance de los ATP que se plantean públicamente algunas cuestiones, en ocasiones encontradas, respecto a su relación con la enseñanza de los métodos de demostración. Primeramente, se comienza por cuestionar la conveniencia de dicho desarrollo tecnológico, ya que, supuestamente, podría justificar la "desaparición" de dichas técnicas de prueba. Simultáneamente, en la dirección opuesta, se pone en duda la pertinencia de la enseñanza del manejo "manual" de estos mismos, y si no resultaría mejor, para usos prácticos, el permitir que las computadoras realicen, en adelante, dicho trabajo. Como tercera cuestión, aunque no de menor importancia, se plantea si la invención de estos programas responde a alguna necesidad humana digna de ser atendida, o si, por el contrario, se trata simplemente de un aspecto "divertido", pero al fin de cuentas frívolo, concerniente al entrenamiento en la programación de ordenadores. Con el propósito de poder documentar unas respuestas bien cimentadas respecto de estos cuestionamientos, en el párrafo siguiente vamos a efectuar un análisis histórico de un desarrollo tecnológico previo que, curiosamente, también llevó a los mismos planteamientos por su íntima relación con otra actividad propiamente matemática. Nos referimos a la aparición de las *calculadoras automáticas*.

En 1642 el matemático francés Blaise Pascal (1623-1662) crea la primera máquina que sumaba. Posteriormente, en 1671, el matemático y filósofo alemán Gottfried Leibniz (1646-1716) construye un dispositivo que también podía multiplicar. Con estos dos avances se tenían todos los fundamentos necesarios para la fabricación de las calculadoras automáticas; no obstante, para su comercialización masiva, aún en esta versión mecánica, se requerían de avances tecnológicos significativos como la minaturización de los componentes, mayormente engranes, y de la producción en serie; esta última, como se sabe, fue una consigna que justificó, y que finalmente resolvió, la Revolución Industrial. Así, no fue sino hasta 1820 que el inventor inglés Thomas de Colmar estuvo en condiciones de poder patentar su "Aritmómetro", el cual sería el primer prototipo de calculadora mecánica producible en serie para propósitos comerciales; esta máquina se vendería desde 1851 hasta 1915. Nuevamente, sin embargo, este dispositivo, y otros que le siguieron, distaban mucho de ser lo suficientemente "portátiles" para conseguir la tan anhelada distribución masiva; esto, a pesar de los innumerables esfuerzos que se efectuaron al respecto. Era entonces fuerte la sospecha de que se necesitaría de un nuevo avance tecnológico que lograra una aún mayor miniaturización de los componentes. Este paso se consiguió hasta mediados del siglo veinte con la invención de la Electrónica. La creación sucesiva de bulbos, transistores y circuitos integrados, que dieron forma a esta nueva punta de lanza tecnológica, permitió la efectiva portabilidad de las calculadoras. Con esto, en 1967, la compañía estadounidense Texas Instruments presenta la primera calculadora electrónica de bolsillo, en la forma del modelo "Cal Tech"; este avance, junto con otros dispositivos análogos que fueron surgiendo en las décadas siguientes, posibilitó, ahora sí debido a sus bajos costos, el acceso de *cualquier persona* al cálculo automatizado de las operaciones aritméticas básicas. En la actualidad (2025), dicha disponibilidad de cálculo se encuentra plenamente integrada como una herramienta más, por ejemplo, en los teléfonos móviles.

Una vez que las calculadoras automáticas portátiles se empezaron a convertir en objetos de uso cotidiano, inmediatamente se comenzaron a plantear entre la opinión pública las cuestiones relativas a la *conveniencia* del uso de dichos aparatos; simultáneamente por el contrario, se pudieron escuchar preguntas sobre la *pertinencia* de seguir enseñando, en la forma como se venía haciendo, a utilizar las operaciones aritméticas dadas estas herramientas novedosas; e, incluso, se hicieron oir cuestionamientos irónicos alrededor de la supuesta *imperiosa necesidad* de estas invenciones. Como se ve, estos planteamientos son exactamente los mismos que en este momento se dan en derredor de los Probadores Automáticos de Teoremas. En otras palabras: nada nuevo bajo el sol. Afortunadamente, en el caso de las calculadoras automáticas, la experiencia en su uso nos permite ya contestar a los interrogantes anteriores. Podríamos empezar diciendo que es únicamente entre las personas que tienen algún tipo profundo de "analfabetismo aritmético" entre las que es posible encontrar, aún ahora, a quienes no pueden comprender la utilidad de estos adelantos tecnológicos; y es que se encuentra profundamente enraizada en la incapacidad propia de saber "efectuar cuentas" esta otra imposibilidad de alguien para poder apreciar aquellos aparatos que, precisamente, se dedican a "sacar cuentas." Por otra parte, podríamos decir que son aquellos individuos que en su trabajo diario tienen que lidiar con interminables listas de operaciones aritméticas encadenadas (contadores, administradores, etc.) quienes más provecho obtienen de estas herramientas de cálculo. En fin, el balance final al respecto de las calculadoras automáticas es, abrumadoramente, más en favor que en contra de su uso; por lo que resulta conveniente conservarlas entre nosotros. Como se dice habitualmente: las calculadoras llegaron para quedarse.

Volviendo a los Probadores Automáticos de Teoremas, apoyándonos en el párrafo anterior, podemos ahora adelantar algunas respuestas respecto de las interrogantes sobre estos programas planteados al inicio de esta sección. En esta ocasión, convendría empezar mencionando que, al igual que con las calculadoras automáticas, es un prerrequisito importante el conocer y el haberse ejercitado, en este caso, en el manejo de demostraciones matemáticas para poder apreciar los ATP; como siempre en cuestiones científicas, la ignorancia no sirve de nada. Es decir, la sola existencia de los ATP debería ser un factor de impulso hacia el aprendizaje manual de los métodos de prueba. Pasando ahora al tema del uso de estos programas, deberíamos comentar que probablemente los ATP se puedan convertir, en un futuro, precisamente en auxiliares para la enseñanza de las técnicas de demostración, al permitir comprobar en forma rápida la corrección de una prueba, tal y como se utilizan frecuentemente las calculadoras para verificar la respectiva corrección de operaciones aritméticas previamente efectuadas en forma manual. Finalmente, respecto del posible empleo de los ATP para efectuar demostraciones de grandes "masas" de conjeturas con el fin de poder decidir su veracidad o falsedad, la respuesta en forma de ejemplos que daremos a continuación podría, tal vez, resultar sorprendente. En primer lugar, ocurre que existen, no solamente programas, sino incluso lenguajes de programación basados en la Lógica –como PROLOG (ver [16])– que se propagandizan como genuinos ATP. Sucede que en los programas escritos en dichos lenguajes se plantean, con los recursos de éste, preguntas que el ordenador intenta responder haciendo uso de las reglas de inferencia de la Lógica, más los datos proporcionados por el mismo programa, y que, en caso de que existan resultados que satisfagan los requerimientos, responden afirmativamente listando las soluciones encontradas. En esta situación, la cuestión considerada como proposición es un teorema Por el contrario, si no encuentra soluciones, el programa responde negativamente; lo cual en términos lógicos significa que la cuestión vista como proposición no era un teorema. Ahora puede resultar claro que a estos superlenguajes de cómputo se los reconozca como legítimos demostradores "masivos" de teoremas. En segundo lugar, el uso de ordenadores que realizan demostraciones ha sido empleado en la industria para la verificación de que ciertos procesos se realizan correctamente; en esta situación, se demuestra que el proceso es "verdadero", esto es, que "funciona" (ver, por ejemplo, [5] y [9]). Así, el proceso de demostración, propio de las matemáticas, ha despertado el interés de una industria necesitada de la confirmación de la validez de sus procesos automatizados. Una vez más, esta nueva aplicación nos provee de un ejemplo alusivo a la demostración "masiva" de teoremas.

En resumen, tanto los métodos de demostración como los probadores automáticos de teoremas son aspectos de las

Matemáticas y la Tecnología, respectivamente, que valdría la pena proceder a estudiar; por lo menos para empezar a desmitificarlos. Resulta recomendable el habituarse a convivir con estas herramientas con el fin de sacar el mayor provecho posible de ellas, en caso necesario. En cuanto a los ATP corresponde, remitimos para su estudio a las referencias bibliográficas provistas en esta sección, ya que los alcances más bien modestos de este libro nos impiden profundizar en este tema tan interesante. Por lo que respecta a las técnicas de prueba, este libro sí puede contribuir positivamente a afianzar su aprendizaje; por lo que una vez más queda abierta la invitación a internarse en los capítulos siguientes para lograr este objetivo.

Sobre la distribución del libro

Como habíamos dicho previamente, en esta obra se estudian los métodos elementales de prueba dados por Método Directo, Reducción al Absurdo, Método Analítico, Demostración por Casos, Exhibición de Contraejemplo e Inducción Matemática; por lo que a cada uno de ellos se le consagra un capítulo completo. A su vez, cada capítulo está compuesto de tres secciones denominadas, respectivamente, Introducción, Ejemplos y Ejercicios. De estas secciones, únicamente la primera de cada capítulo contendrá tres subsecciones; de éstas, la inicial se dedica a la presentación del método, la segunda trata sobre la estructura del método y, finalmente, la tercera está dedicada a las sugerencias para su uso. De esta manera, esperamos poder aprovechar al máximo la sección introductoria para preparar la aplicación de estas técnicas de demostración en las secciones siguientes del capítulo.

Los dos primeros capítulos están dedicados a las dos técnicas de prueba más básicas que existen, y que están dadas por el Método Directo y la Reducción al Absurdo. Decimos que estos métodos de demostración son los más sencillos de comprender, ya que su estudio es incluso abordado en una etapa muy inicial en el estudio de las Matemáticas; concretamente, en los cursos de Lógica Matemática (ver, por ejemplo, [3] y [21]).

En el capítulo tercero se aborda el Método Analítico de prueba. El atractivo de esta técnica de demostración radica en su presentación compuesta por etapas. En la primera se consigue, por medio de un artificio, *reconstruir* la prueba que supuestamente ha sido dada para la conclusión deseada; en tanto que en la segunda, en donde se aprovecha la etapa previa, es simplemente la prueba de la conclusión por el Método Directo.

El cuarto capítulo está avocado a la Demostración por Casos. En este método de prueba se hace uso de disyunciones exclusivas, como la Dicotomía y la Tricotomía –la primera aparece en Lógica como la "Ley del Tercero Excluso" y la segunda en conjuntos totalmente ordenados–, para poder atacar cada uno de los casos en que es dividida la demostración por medio de pruebas enteramente distintas.

En el capítulo cinco se presenta el método denominado Exhibición de Contraejemplo. La importancia de esta técnica de argumentación estriba, como mencionábamos más arriba, en la cercanía que guarda con el proceso de hacer investigación en Matemáticas. Junto con el Método Analítico, comparte esta proximidad con este otro tipo de saber procedimental.

Finalmente, en el sexto capítulo se aborda la Inducción Matemática. Aunque es preciso admitir que este método de prueba se cuenta entre los más básicos –de hecho hay libros de texto enteramente dedicados a él (como, por ejemplo, [19])–, nos vimos obligados a dejarlo al último debido a los ejemplos elegidos, ya que algunos de éstos dependen a su vez de otros ejemplos previamente desarrollados utilizando otras técnicas de demostración.

Para terminar, cabe mencionar lo siguiente. Existen otros métodos más avanzados de prueba, los cuales no se han considerado aquí por ser más recientes y, su uso, menos frecuente y elemental que los que se mencionaron. Entre ellos destaca el Axioma de Elección y sus equivalentes que son: Principio de Buen Orden, Lema de Zorn, Principio de Inducción Transfinita, Teorema de la Compacidad del Producto, etc. También hay otras demostraciones basadas en el Axioma de Martin junto con la negación de la Hipótesis Generalizada del Continuo (ver [13]); más aún, existen pruebas que utilizan el Método de Forcing; etc. (para estos temas, se pueden consultar [8] y [20]). Se comprenderá que el carácter netamente introductorio de este libro nos obliga a no abordar, por el momento, estos temas tan interesantes como complicados.

Esperamos, con lo previo, haber despertado en usted, estimado lector, el afán de adentrarse en las páginas de este libro.

Capítulo 1

MÉTODO DIRECTO

1.1. Introducción

1.1.1. Presentación del método

Entre las técnicas de prueba en Matemáticas, el *Método Directo* de demostración destaca por ser la más elemental de todas ellas. A fin de poder apreciar esto, a continuación detallamos su manera de proceder. Supongamos que se desea probar la proposición condicional "si p, entonces q", en donde, como de costumbre, p es la conjunción de las premisas y q es la conclusión, y que dicha demostración se desea conseguir con el apoyo de cierta Teoría particular de las Matemáticas. Para conseguir la prueba usando el Método Directo se necesita partir de la hipótesis p y, junto con las herramientas de la teoría en cuestión (axiomas, definiciones, teoremas, etc.), se pueden ir consiguiendo, por medio de inferencias, proposiciones sucesivas una tras otra. En concreto, se puede empezar obteniendo la proposición q_1; a su vez, con ésta y las proposiciones anteriores, se puede lograr una nueva inferencia dada por la proposición q_2; etc. Y así sucesivamente, después de n inferencias, se arribará a la proposición q_n, de la cual, finalmente, se podrá concluir la tesis q. Es decir, iniciando con la conjunción de premisas y el apoyo de la teoría particular, se puede obtener un derrotero compuesto de proposiciones inferidas cuyo objetivo final es el consecuente de la condicional. Con todo esto, podremos afirmar que la proposición "si p, entonces q" es *verdadera*.

El origen del Método Directo no se conoce con certeza; sin embargo, se considera la primera herramienta que el ser humano utilizó para tratar de alcanzar la verdad en Matemáticas. Es en este contexto temporal en el que los historiadores de la ciencia aún no consiguen suficiente evidencia para verificar si civilizaciones antiguas –como la de Egipto o las de los Pueblos Mesopotámicos– fueron capaces de dar demostraciones con el rigor exigible en Matemáticas (ver [15] y [17]). Lo que sí está fuera de duda es que dicho rigor en las pruebas fue conseguido por matemáticos de la Grecia Clásica, Aquí podemos destacar a dos de los filósofos más antiguos; nos referimos a Tales de Mileto (624-546 a.C. aproximadamente) y a Pitágoras de Samos (570-490 a.C. aproximadamente), a los que, por cierto, la tradición les adjudica sendos teoremas que llevan sus nombres. De hecho, al segundo de ellos se le atribuye la creación de una escuela filosófica denominada, precisamente, "Escuela Pitagórica" y que es famosa por fomentar el estudio de las Matemáticas; es en ella en donde la tradición habla tanto de éxitos como de fracasos al tratar de *demostrar* resultados matemáticos. Como se ve de todo esto, es indiscutible el empleo de técnicas de prueba en una fase muy temprana de la Grecia Clásica.

A continuación, resaltaremos las características particulares que tiene el Método Directo de argumentación y que lo diferencian de los demás. En primer lugar, la demostración que se obtiene es *lineal*; esto es, carece de bifurcaciones en pasos, como sucede en la Inducción Matemática, o de bifurcación en opciones, como acontece en la Demostración por Casos. En segundo lugar, el objetivo del derrotero de prueba es conseguir la conclusión *afirmada*; no negada, como ocurre en la Exhibición de Contraejemplo. Finalmente, como tercera característica, la conclusión es siempre un *objetivo final* de la demostración; es decir, nunca se utiliza la afirmación de la tesis como precondición para efectuar la reconstrucción de su prueba, como sucede en la etapa de Análisis del Método Analítico; ni tampoco se parte de la negación de la conclusión para probar lo contradictoria que es esta suposición, como acontece en la Reducción al Absurdo. Por todas estas características, resalta el Método Directo como la más sencilla de todas las técnicas de demostración.

1.1.2. Estructura del método

La estructura general del Método Directo se detalla a continuación.

Se requiere probar la proposición condicional "si p, entonces q", donde p es la conjunción de premisas y q es la conclusión. El formato es el siguiente:

De p, se infiere q_1; se infiere q_2; se infiere $\ldots$; se infiere q_n; se infiere q.

Una vez conseguido lo anterior, se concluye que la proposición condicional "si p, entonces q" es verdadera.

1.1.3. Sugerencias para su uso

La aplicación del método es un proceso arduo; no obstante, es indispensable para probar proposiciones en las que no es complicado construir la demostración, pues el objetivo final es claro de obtener a partir de las premisas; en este tipo de situaciones, el método encaja perfectamente.

1.2. Ejemplos

El método directo es útil para demostrar la inyectividad de una función.

Función inyectiva

Definición 1.2.1. Sean A y B dos conjuntos. Una función $f : A \longrightarrow B$ se llama *inyectiva* o *uno a uno* si, para cualesquier $x_1, x_2 \in A$ tales que $x_1 \neq x_2$, se tiene que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Lo anterior equivale a decir, para cualesquier $x_1, x_2 \in A$, si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$.

En la práctica, para demostrar la inyectividad, se usa la última forma de la definición, es decir, se parte de la igualdad $f(x_1) = f(x_2)$, y por medio de operaciones inversas se la simplifica hasta dejarla en la forma $x_1 = x_2$.

Ejemplo 1.2.2. Probar que la función

$$f(x) = \left(7 + \sqrt{5x^9 - 2}\right)^3 - 4,$$

tal que $f : \left[\sqrt[9]{2/5}; +\infty\right) \longrightarrow \mathbb{R}$, es inyectiva.

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in \left[\sqrt[9]{2/5}; +\infty\right)$. Vamos a partir de $f(x_1) = f(x_2)$ y, usando operaciones inversas, intentaremos llegar a que $x_1 = x_2$. Comenzando,

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Evaluando f en los argumentos obtenemos

$$\left(7 + \sqrt{5x_1^9 - 2}\right)^3 - 4 = \left(7 + \sqrt{5x_2^9 - 2}\right)^3 - 4.$$

A continuación, procedemos a simplificar paulatinamente ambos lados de la igualdad, de "afuera" de las fórmulas, hacia "adentro" de ellas.

$$
\begin{aligned}
\left(7+\sqrt{5x_1^9-2}\right)^3 &= \left(7+\sqrt{5x_2^9-2}\right)^3.\\
\sqrt[3]{\left(7+\sqrt{5x_1^9-2}\right)^3} &= \sqrt[3]{\left(7+\sqrt{5x_2^9-2}\right)^3}.\\
7+\sqrt{5x_1^9-2} &= 7+\sqrt{5x_2^9-2}.\\
\sqrt{5x_1^9-2} &= \sqrt{5x_2^9-2}.\\
\left(\sqrt{5x_1^9-2}\right)^2 &= \left(\sqrt{5x_2^9-2}\right)^2.\\
5x_1^9-2 &= 5x_2^9-2.\\
5x_1^9 &= 5x_2^9.\\
x_1^9 &= x_2^9.\\
\sqrt[9]{x_1^9} &= \sqrt[9]{x_2^9}.\\
x_1 &= x_2.
\end{aligned}
$$

Luego, f es inyectiva. ∎

Ejemplo 1.2.3. Probar que la función

$$g\left(x\right)=\frac{9-\sqrt[9]{8-\left(\dfrac{-6x-1}{2x-4}\right)^7}}{3},$$

tal que $g:(-\infty;2)\cup(2;+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, es uno a uno.

Demostración. Sean $x_1,x_2\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$. Vamos a partir de $g\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$ y, usando operaciones inversas, intentaremos llegar a $x_1=x_2$. Comenzando,

$$g\left(x_1\right)=g\left(x_2\right).$$

Evaluando g en los argumentos obtenemos

$$\frac{9-\sqrt[9]{8-\left(\dfrac{-6x_1-1}{2x_1-4}\right)^7}}{3}=\frac{9-\sqrt[9]{8-\left(\dfrac{-6x_2-1}{2x_2-4}\right)^7}}{3}.$$

Procedamos ahora a simplificar poco a poco ambos lados de la ecuación; como de costumbre, de “afuera” de las fórmulas, hacia “adentro” de ellas.

$$
\begin{aligned}
9-\sqrt[9]{8-\left(\frac{-6x_1-1}{2x_1-4}\right)^7} &= 9-\sqrt[9]{8-\left(\frac{-6x_2-1}{2x_2-4}\right)^7}.\\
\sqrt[9]{8-\left(\frac{-6x_1-1}{2x_1-4}\right)^7} &= \sqrt[9]{8-\left(\frac{-6x_2-1}{2x_2-4}\right)^7}.\\
\left(\sqrt[9]{8-\left(\frac{-6x_1-1}{2x_1-4}\right)^7}\right)^9 &= \left(\sqrt[9]{8-\left(\frac{-6x_2-1}{2x_2-4}\right)^7}\right)^9.\\
8-\left(\frac{-6x_1-1}{2x_1-4}\right)^7 &= 8-\left(\frac{-6x_2-1}{2x_2-4}\right)^7.\\
\left(\frac{-6x_1-1}{2x_1-4}\right)^7 &= \left(\frac{-6x_2-1}{2x_2-4}\right)^7.\\
\sqrt[7]{\left(\frac{-6x_1-1}{2x_1-4}\right)^7} &= \sqrt[7]{\left(\frac{-6x_2-1}{2x_2-4}\right)^7}.\\
\frac{-6x_1-1}{2x_1-4} &= \frac{-6x_2-1}{2x_2-4}.
\end{aligned}
$$

Ahora, hay que efectuar las divisiones indicadas. Hagamos esto con el cociente $(-6x-1)\,/\,(2x-4)$ como modelo genérico de las expresiones anteriores.

$$
\begin{array}{r|rr}
 & \multicolumn{2}{l}{-3} \\
2x-4 & -6x & -1 \\
 & +6x & -12 \\
\hline
 & & -13
\end{array}
$$

Luego,

$$\frac{-6x-1}{2x-4}=-3-\frac{13}{2x-4}.$$

Sustituyendo, podemos continuar.

$$
\begin{aligned}
-3-\frac{13}{2x_1-4} &= -3-\frac{13}{2x_2-4}.\\
\frac{13}{2x_1-4} &= \frac{13}{2x_2-4}.\\
\frac{1}{2x_1-4} &= \frac{1}{2x_2-4}.\\
\left(\frac{1}{2x_1-4}\right)^{-1} &= \left(\frac{1}{2x_2-4}\right)^{-1}.\\
2x_1-4 &= 2x_2-4.\\
2x_1 &= 2x_2.\\
x_1 &= x_2.
\end{aligned}
$$

De donde g es inyectiva. ■

Función estrictamente creciente

Definición 1.2.4. Sea f una función real definida en un intervalo A. Se dice que f es *estrictamente creciente en* A si, para cualesquier x_1, $x_2 \in A$ tales que $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$. Esto equivale a decir, si $f(x_1) \not< f(x_2)$, entonces $x_1 \not< x_2$.

Inyectividad de las funciones estrictamente crecientes

Ejemplo 1.2.5. Sea f una función real estrictamente creciente en el intervalo A. Probar que f es inyectiva.

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in A$ tales que
$$f(x_1) = f(x_2).$$
Por tricotomía tenemos que
$$f(x_1) \not< f(x_2) \quad \text{y} \quad f(x_2) \not< f(x_1).$$
Por la definición alternativa de función estrictamente creciente obtenemos
$$x_1 \not< x_2 \quad \text{y} \quad x_2 \not< x_1.$$
Por tricotomía otra vez, concluimos que
$$x_1 = x_2.$$
Por tanto, f es inyectiva. ■

Ejemplo 1.2.6. Probar que la función
$$\vec{f}(x,y) = \left(x^3\left(1-y^3\right)+3x, x^3\left(1+y^3\right)+3x+2\right),$$
tal que $\vec{f} : [1;2] \times [3;4] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, es inyectiva.

Demostración. Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [1;2] \times [3;4]$; por lo que
$$1 \leq x_1 \leq 2, \quad 3 \leq y_1 \leq 4, \quad 1 \leq x_2 \leq 2 \quad \text{y} \quad 3 \leq y_2 \leq 4. \tag{1.1}$$
Vamos a partir de $\vec{f}(x_1, y_1) = \vec{f}(x_2, y_2)$ y, usando operaciones inversas, intentaremos llegar a que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Comenzando,
$$\vec{f}(x_1, y_1) = \vec{f}(x_2, y_2).$$
Evaluando $\vec{f}$ en los argumentos obtenemos
$$\left(x_1^3\left(1-y_1^3\right)+3x_1, x_1^3\left(1+y_1^3\right)+3x_1+2\right) = \left(x_2^3\left(1-y_2^3\right)+3x_2, x_2^3\left(1+y_2^3\right)+3x_2+2\right).$$
Igualando coordenada a coordenada arribamos al siguiente sistema de ecuaciones,
$$\begin{cases} x_1^3\left(1-y_1^3\right)+3x_1 = x_2^3\left(1-y_2^3\right)+3x_2, \\ x_1^3\left(1+y_1^3\right)+3x_1+2 = x_2^3\left(1+y_2^3\right)+3x_2+2. \end{cases}$$
Mejor aún,
$$\begin{cases} x_1^3 - x_1^3 y_1^3 + 3x_1 = x_2^3 - x_2^3 y_2^3 + 3x_2, \\ x_1^3 + x_1^3 y_1^3 + 3x_1 + 2 = x_2^3 + x_2^3 y_2^3 + 3x_2 + 2. \end{cases} \tag{1.2}$$
Sumando miembro a miembro las ecuaciones anteriores obtenemos
$$2x_1^3 + 6x_1 + 4 = 2x_2^3 + 6x_2 + 4.$$
Pasando los términos del lado derecho restando al miembro izquierdo y simplificando conseguimos
$$2x_1^3 - 2x_2^3 + 6x_1 - 6x_2 = 0.$$
Mejor aún,
$$2\left(x_1^3 - x_2^3\right) + 6(x_1 - x_2) = 0.$$
Factorizando la diferencia de cubos del primer paréntesis tenemos que
$$2(x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2\right) + 6(x_1 - x_2) = 0.$$
Haciendo explícito el factor $2(x_1 - x_2)$ en el miembro izquierdo de la igualdad anterior obtenemos
$$2(x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + 3\right) = 0.$$

Aquí tenemos dos posibilidades,

$$\text{o bien} \quad x_1 - x_2 = 0, \quad \text{o bien} \quad x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3 = 0. \tag{1.3}$$

Sin embargo, por las desigualdades (1.1), ocurre que tanto x_1 como x_2 son *positivos*; por lo que la segunda igualdad a cero de (1.3) es *imposible*. Luego, (1.3) queda reducido a

$$x_1 - x_2 = 0.$$

Es decir,

$$x_1 = x_2.$$

Ahora, sustituyendo en la segunda ecuación de (1.2) conseguimos

$$x_1^3 + x_1^3y_1^3 + 3x_1 + 2 = x_1^3 + x_1^3y_2^3 + 3x_1 + 2.$$

Eliminando términos idénticos en ambos lados de la igualdad anterior tenemos que

$$x_1^3y_1^3 = x_1^3y_2^3.$$

Extrayendo raíces cúbicas en los dos lados de la igualdad previa obtenemos

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x_1^3y_1^3} &= \sqrt[3]{x_1^3y_2^3}. \\ x_1y_1 &= x_1y_2. \end{aligned}$$

Nuevamente, dado que por (1.1) x_1 es positivo, podemos cancelarlo como factor en ambos miembros de la igualdad anterior y conseguimos

$$y_1 = y_2.$$

En resumen, $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$; con lo cual $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Por tanto, $\vec{f}$ es inyectiva. ■

Imagen y preimagen de un conjunto bajo una función

Definición 1.2.7. Sean: X y Y dos conjuntos, $A \subset X$, $B \subset Y$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Definimos la *imagen* o *imagen directa de A bajo f*, denotada por $f(A)$, y la *preimagen* o *imagen inversa de B bajo f*, representada por $f^{-1}(B)$, de las siguientes maneras,

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \quad \text{y} \quad f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}.$$

Propiedades de la imagen y de la preimagen

Ejemplo 1.2.8. Sean: X y Y dos conjuntos, $A \subset X$, $B \subset X$, $C \subset Y$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que la imagen y la preimagen tienen las siguientes propiedades:

1. $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. $f\left(f^{-1}(C)\right) \subset C$.
3. $C \cap f(A) = f\left(A \cap f^{-1}(C)\right)$.
4. $C \cap f(X) = f\left(f^{-1}(C)\right)$.
5. **Intersección.** $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Demostración. **1.** Sea $x \in A$. Por definición de imagen directa obtenemos $f(x) \in f(A)$. Por definición de preimagen conseguimos $x \in f^{-1}(f(A))$. Dado que esto ocurre para *todo* $x \in A$, concluimos que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Sea $y \in f\left(f^{-1}(C)\right)$. Pero entonces, existe $x \in f^{-1}(C)$ tal que $y = f(x)$; es decir, $f(x) \in f\left(f^{-1}(C)\right)$. Por definición de imagen obtenemos $x \in f^{-1}(C)$. Por definición de preimagen conseguimos $y = f(x) \in C$. Dado que esto sucede para *todo* $y \in f\left(f^{-1}(C)\right)$, concluimos que $f\left(f^{-1}(C)\right) \subset C$.
3. A fin de probar la igualdad $C \cap f(A) = f\left(A \cap f^{-1}(C)\right)$, hay que establecer las dos contenciones siguientes: $C \cap f(A) \subset f\left(A \cap f^{-1}(C)\right)$ y $f\left(A \cap f^{-1}(C)\right) \subset C \cap f(A)$.

(⊂) Sea $y \in C \cap f(A)$; por lo que $y \in C$ y $y \in f(A)$. Por la segunda pertenencia, tenemos que existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Ahora, por la primera pertenencia ocurre que $f(x) \in C$. Por definición de preimagen obtenemos $x \in f^{-1}(C)$. En resumen, $x \in A$ y $x \in f^{-1}(C)$; por lo cual $x \in A \cap f^{-1}(C)$. Por definición de imagen conseguimos $y = f(x) \in f\left(A \cap f^{-1}(C)\right)$. Dado que esto acontece para *todo* $y \in C \cap f(A)$, concluimos que $C \cap f(A) \subset f\left(A \cap f^{-1}(C)\right)$.
(⊃) Sea $y \in f\left(A \cap f^{-1}(C)\right)$. Luego, existe $x \in A \cap f^{-1}(C)$ tal que $y = f(x)$. Pero entonces $x \in A$ y $x \in f^{-1}(C)$. Por la primera pertenencia y definición de imagen obtenemos $y = f(x) \in f(A)$. Ahora, por la segunda pertenencia y definición de preimagen conseguimos $y = f(x) \in C$. En síntesis, $y \in C$ y $y \in f(A)$: por lo que $y \in C \cap f(A)$. Dado que esto ocurre para *todo* $y \in f\left(A \cap f^{-1}(C)\right)$, concluimos que $f\left(A \cap f^{-1}(C)\right) \subset C \cap f(A)$.

De las dos contenciones $C \cap f(A) \subset f\left(A \cap f^{-1}(C)\right)$ y $f\left(A \cap f^{-1}(C)\right) \subset C \cap f(A)$, concluimos la igualdad $C \cap f(A) = f\left(A \cap f^{-1}(C)\right)$.
4. En el inciso anterior, haciendo $A = X$, obtenemos

$$C \cap f(X) = f\left(X \cap f^{-1}(C)\right). \tag{1.4}$$

Ahora bien, por definición de preimagen tenemos que $f^{-1}(C) \subset X$; por lo que $X \cap f^{-1}(C) = f^{-1}(C)$. Sustituyendo en el lado derecho de (1.4) conseguimos $C \cap f(X) = f\left(f^{-1}(C)\right)$.
5. Sea $y \in f(A \cap B)$. Pero entonces, existe $x \in A \cap B$ tal que $y = f(x)$; es decir, $y = f(x)$, con $x \in A$ y $x \in B$. Por definición de imagen obtenemos $y = f(x) \in f(A)$ y $y = f(x) \in f(B)$. En otras palabras, $y \in f(A) \cap f(B)$. Dado que esto sucede para *todo* $y \in f(A \cap B)$, concluimos que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. ■

Diferencia relativa y complemento

Definición 1.2.9. Sean X un conjunto y A y B dos subconjuntos de X. Definimos la *diferencia relativa*, el *complemento relativo*, o, simplemente, la *diferencia de A y B*, denotada por $A \setminus B$ o por $A - B$, de la siguiente manera

$$A \setminus B = \{x : x \in A \quad \text{y} \quad x \notin B\}.$$

Se define el *complemento de A*, representado por A^c, como $A^c = X \setminus A$.

Valor absoluto

Definición 1.2.10. Sea $x \in \mathbb{R}$. El *valor absoluto* o *módulo de x*, denotado por $|x|$, se define de la siguiente manera,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si} \quad 0 \leq x, \\ -x, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Una forma de calcular el módulo que es más útil para las demostraciones está dada por la siguiente *definición alternativa* (ver el Ejercicio IV del Capítulo cuatro),

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Límite de una función real de variable real

Definición 1.2.11. Sean: A un intervalo abierto no vacío, $a \in A$, f una función real de variable real con dominio $\mathcal{D}_f$, $A \setminus \{a\} \subset \mathcal{D}_f$ y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que el *límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a es L*, lo cual se denota por

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L,$$

si el siguiente enunciado es verdadero:
Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in A$, y

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Límites unilaterales de una función real de variable real

Definición 1.2.12. Sean: $a \in \mathbb{R}$, f una función real de variable real con dominio $\mathcal{D}_f$ y $L \in \mathbb{R}$. Si existe $c \in \mathbb{R}$ y es tal que $a < c$ y $(a; c) \subset \mathcal{D}_f$, entonces en este caso se dice que el *límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a por la derecha es L*, lo cual se denota por

$$\lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in (a; c)$, y

$$\text{si} \quad 0 < x - a < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ahora, si existe $d \in \mathbb{R}$ y es tal que $d < a$ y $(d; a) \subset \mathcal{D}_f$, entonces en esta situación se dice que el *límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende hacia* a *por la izquierda es* L, lo cual se denota por

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in (d; a)$, y

$$\text{si} \quad 0 < a - x < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

A los límites por la derecha y por la izquierda se les llama también *límites unilaterales*.

Determinación de los límites unilaterales por medio del límite

Ejemplo 1.2.13. Sean: A un intervalo abierto no vacío, $a \in A$, f una función real de variable real con dominio $\mathcal{D}_f$, $A \setminus \{a\} \subset \mathcal{D}_f$ y $L \in \mathbb{R}$. Probar que, si el $\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$ existe y es igual a L, entonces $\lim_{x \longrightarrow a^+} f(x)$ y $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x)$ existen y son iguales a L.

Demostración. Supongamos que $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L$. Ahora, demos $\varepsilon > 0$. Por definición de límite, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in A$, y

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

(Límite por la derecha) Para averiguar si existe el límite por la derecha, supongamos ahora que $0 < x - a < \delta$. Luego, como $x - a$ es positivo, tenemos que $|x - a| = x - a$. De donde $0 < x - a = |x - a| < \delta$. Pero entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$, por la definición de límite. En resumen, si $0 < x - a < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Por tanto,

$$\lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = L.$$

(Límite por la izquierda) Similarmente, para averiguar si existe el límite por la izquierda, suponemos ahora que $0 < a - x < \delta$. Tendremos entonces que $x - a = -(a - x) < 0$; es decir, $x - a$ es negativo. Luego, $|x - a| = -(x - a) = a - x$. De donde, $0 < a - x = |x - a| < \delta$, lo cual por definición de límite implica que $|f(x) - L| < \varepsilon$. En conclusión, si $0 < a - x < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Esto es,

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = L.$$

■

Composición de funciones

Definición 1.2.14. Sean f y g dos funciones con dominios respectivos $\mathfrak{D}_f$ y $\mathfrak{D}_g$. Se define la *función compuesta* o *composición de* f *y* g, denotada por $f \circ g$, como aquella cuya regla de correspondencia es $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, y cuyo dominio es

$$\mathfrak{D}_{f \circ g} = \mathfrak{D}_g \cap \{x : g(x) \in \mathfrak{D}_f\} = \mathfrak{D}_g \cap \{x : y = g(x) \text{ y } y \in \mathfrak{D}_f\}.$$

Función continua real de variable real en un número

Definición 1.2.15. Sean $a \in \mathbb{R}$ y f una función real definida en algún intervalo abierto A que contenga a a. Se dice que f es *continua en* a si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in A$ y

$$\text{si} \quad |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

En términos del límite, la definición de continuidad queda de la siguiente forma. Se dice que f es *continua en* a si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. $f(a)$ existe.
2. $\lim_{h \longrightarrow 0} f(a + h) = f(a)$.

Si una de estas condiciones no se cumple para f en a, se dice que f es *discontinua en* a. Nótese que si $x = a + h$ se tiene que, si $h \to 0$, entonces $x \to a$. Así, una tercera manera de definir continuidad en un punto es la siguiente. Se dice que f es *continua en* a si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. $f\left(a\right)$ existe.
2. $\underset{x \longrightarrow a}{lím} f\left(x\right) = f\left(a\right)$.

Finalmente, si una de estas condiciones no se cumple para f en a, se dice que f es *discontinua en* a.

Preservación de la continuidad bajo la composición

Ejemplo 1.2.16. Sean: $a, b \in \mathbb{R}$, f y g dos funciones reales de variable real con dominios respectivos $\mathcal{D}_f$ y $\mathcal{D}_g$, $a \in \mathcal{D}_g$ y $g\left(a\right) \in \mathcal{D}_f$. Probar que si g es continua en a y si f es continua en $g\left(a\right)$, entonces $f \circ g$ es continua en a.

Demostración. Supongamos que g es continua en a y que f es continua en $g\left(a\right)$. Por lo anterior, existen intervalos abiertos A y B tales que $a \in A \subset \mathcal{D}_g$ y $g\left(a\right) \in B \subset \mathcal{D}_f$. Ahora, como f es continua en $g\left(a\right)$, tenemos que dada $\varepsilon > 0$, existe $\lambda > 0$ tal que, si $y \in B$ y

$$\text{si} \quad \left|y - g\left(a\right)\right| < \lambda, \quad \text{entonces} \quad \left|f\left(y\right) - f\left(g\left(a\right)\right)\right| < \varepsilon. \tag{1.5}$$

A continuación, dado que g es continua en a, para $\lambda > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in A$ y

$$\text{si} \quad \left|x - a\right| < \delta, \quad \text{entonces} \quad \left|g\left(x\right) - g\left(a\right)\right| < \lambda.$$

Si sustituimos $y = g\left(x\right)$ en (1.5) obtenemos

$$\text{si} \quad \left|g\left(x\right) - g\left(a\right)\right| < \lambda, \quad \text{entonces} \quad \left|f\left(g\left(x\right)\right) - f\left(g\left(a\right)\right)\right| < \varepsilon.$$

Por lo que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in A$ y

$$\text{si} \quad \left|x - a\right| < \delta, \quad \text{entonces} \quad \left|\left(f \circ g\right)\left(x\right) - \left(f \circ g\right)\left(a\right)\right| < \varepsilon.$$

En otras palabras, $f \circ g$ es continua en a. ■

Derivada de una función real de variable real en un número

Definición 1.2.17. Sean f una función real de variable real con dominio $\mathcal{D}_f$ y $x \in \mathcal{D}_f$. Definimos la *derivada de* f *en* x, denotada por $f'\left(x\right)$, como el siguiente límite si existe,

$$f'\left(x\right) = \underset{h \longrightarrow 0}{lím} \frac{f\left(x+h\right) - f\left(x\right)}{h}.$$

En este caso, se dice que f es *derivable* o *diferenciable en* x. A la función f' dada por $f'\left(x\right)$, cuando existe, se le llama la *derivada de* f. Nótese que, al igual que en el caso de la continuidad, si $u = x + h$, cuando $h \to 0$, ocurre que $u \to x$; por lo que una segunda forma de definir la derivada de f en x es la siguiente,

$$f'\left(x\right) = \underset{u \longrightarrow x}{lím} \frac{f\left(u\right) - f\left(x\right)}{u - x}.$$

En los siguientes dos ejemplos se aplican las propiedades que el límite tiene ante las operaciones elementales. Dichas propiedades se demuestran en el Ejemplo 3.2.6 del Capítulo 3.

Derivabilidad implica continuidad

Ejemplo 1.2.18. Sean f una función real con dominio $\mathcal{D}_f$ y $x \in \mathcal{D}_f$. Probar que, si f es derivable en x, entonces f es continua en x.

Demostración. Por hipótesis, f es derivable en x. Esto significa que el siguiente límite existe,

$$f'\left(x\right) = \underset{h \longrightarrow 0}{lím} \frac{f\left(x+h\right) - f\left(x\right)}{h}. \tag{1.6}$$

Para probar que f es continua en x, bastará establecer los dos hechos siguientes:

1. $f(x)$ existe.
2. $\lim\limits_{h\longrightarrow 0} f(x+h) = f(x)$.

Ahora bien, por hipótesis tenemos que $x \in \mathcal{D}_f$; por lo que la primera condición se cumple ya que f se puede evaluar en x. Dediquémonos, pues, a demostrar que la segunda condición se verifica también. A este fin, manipulemos algebraicamente $f(x+h)$ para involucrar el cociente de (1.6) de la siguiente manera,

$$f(x+h) = [f(x+h) - f(x)] + f(x) = h\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] + f(x).$$

Ahora, tomando el límite cuando h tiende hacia cero obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{h\longrightarrow 0} f(x+h) &= \lim_{h\longrightarrow 0}\left(h\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] + f(x)\right) = \left(\lim_{h\longrightarrow 0} h\right)\left[\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] + \lim_{h\longrightarrow 0} f(x)\\ &= (0)\,f'(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x).\end{aligned}$$

Por tanto, f es continua en x. ■

Versión débil de la Regla de L'Hospital

Ejemplo 1.2.19. Sean: f y g dos funciones reales con dominios respectivos $\mathcal{D}_f$ y $\mathcal{D}_g$, $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$, $f'(a)$ y $g'(a)$ existen, $g'(a) \neq 0$, y $f(a) = g(a) = 0$. Probar que

$$\lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Demostración. Dado que f y g son derivables en a, en el cociente $f(x)/g(x)$ podemos a su vez preparar el cociente de incrementos para calcular la derivada de cada función aprovechando que $f(a) = g(a) = 0$. Procediendo así obtenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}.$$

Tomando el límite cuando x tiende hacia a conseguimos

$$\lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim\limits_{x\longrightarrow a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\longrightarrow a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

■

Sucesión real convergente

Definición 1.2.20. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión real y $a \in \mathbb{R}$. Se dice que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge hacia* a, lo cual se denota por $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = a$, si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo N tal que, si $n \geq N$, entonces $|x_n - a| < \varepsilon$.

Preservación de la convergencia bajo la continuidad

Ejemplo 1.2.21. Sean f una función real de variable real con dominio $\mathcal{D}_f$ y $a \in \mathcal{D}_f$. Probar que, si f es continua en a y si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión contenida en $\mathcal{D}_f$ que converge hacia a, entonces ocurre que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $f(a)$.

Demostración. Supongamos que f es una función continua en a y que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión contenida en $\mathcal{D}_f$ que converge hacia a, es decir, que $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = a$. Hay que probar que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $f(a)$. Para esto, demos $\varepsilon > 0$. Dado que f es continua en a, existe $\beta > 0$ tal que, si $x \in \mathcal{D}_f$ y

$$\text{si} \quad |x-a| < \beta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{1.7}$$

Ahora, como $lím_{n\longrightarrow\infty} x_n = a$, para $\beta > 0$ existe un entero positivo N tal que

$$\text{si} \quad n \geq N, \quad \text{entonces} \quad |x_n - a| < \beta.$$

Aprovechando que, para todo entero positivo n, $x_n \in \mathcal{D}_f$, sustituyendo x por x_n en (1.7) obtenemos

$$\text{si} \quad |x_n - a| < \beta, \quad \text{entonces} \quad |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

En síntesis, dado $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que,

$$\text{si} \quad n \geq N, \quad \text{entonces} \quad |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

En otras palabras, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $f(a)$. ■

Subespacio vectorial

Definición 1.2.22. Sean n un entero positivo y $S \subset \mathbb{R}^n$, con $S \neq \emptyset$. Se dice que S es un *subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$ si las dos condiciones siguientes se cumplen:
Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\vec{v}, \vec{w} \in S$ arbitrarios.

1. **Cerradura aditiva.** $\vec{v} + \vec{w} \in S$.
2. **Cerradura multiplicativa.** $\alpha\vec{w} \in S$.

Combinación lineal y espacio generado por un conjunto

Definición 1.2.23. Sean: m y n dos enteros positivos, $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ y $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$. A la expresión

$$a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_m\vec{v}_m$$

se la llama una *combinación lineal de* $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$. Ahora, sea $S \subset \mathbb{R}^n$. El *espacio generado por* S, representado por $\langle S \rangle$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de S; es decir,

$$\langle S \rangle = \{a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_p\vec{v}_p : p \quad \text{es entero positivo}, \quad a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p \in S\}.$$

Nótese que $S \subset \langle S \rangle$.

El espacio generado como subespacio vectorial

Ejemplo 1.2.24. Sean n un entero positivo y $S \subset \mathbb{R}^n$, con $S \neq \emptyset$. Probar que $\langle S \rangle$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Para empezar, se tiene que $\emptyset \neq S \subset \langle S \rangle$; con lo cual $\langle S \rangle \neq \emptyset$. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\vec{v}, \vec{w} \in \langle S \rangle$; por lo que existen enteros positivos m y p, $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_p \in \mathbb{R}$ y $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_p \in S$ tales que $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_m\vec{v}_m$ y $\vec{w} = b_1\vec{w}_1 + \ldots + b_p\vec{w}_p$.
(Cerradura aditiva) Ocurre que

$$\vec{v} + \vec{w} = a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_m\vec{v}_m + b_1\vec{w}_1 + \ldots + b_p\vec{w}_p \in \langle S \rangle.$$

(Cerradura multiplicativa) Sucede que

$$\alpha\vec{v} = \alpha(a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_m\vec{v}_m) = (\alpha a_1)\vec{v}_1 + \ldots + (\alpha a_m)\vec{v}_m \in \langle S \rangle.$$

De lo anterior, tenemos que $\langle S \rangle$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. ■

Producto punto

Definición 1.2.25. Sean n un entero positivo y $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$; por lo que existen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{u} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\vec{v} = (y_1, \ldots, y_n)$. Definimos el *producto punto*, *producto escalar* o *producto interior de* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$, denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, de la siguiente manera,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

En forma mnemotécnica, el producto punto se realiza coordenada a coordenada, pero efectuando al final la suma sobre los resultados.

Nótese que el producto punto de dos vectores es un escalar y no un vector.

Propiedades elementales del producto punto

Ejemplo 1.2.26. Sean: n un entero positivo, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}$. Probar que el producto punto tiene las siguientes propiedades:

1. **Conmutatividad.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
2. **Aditividad.** $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
3. **Homogeneidad.** $a\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (a\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a\vec{v})$.
4. **Isotropía del cero.** Si $\vec{u} = \vec{0}$ o $\vec{v} = \vec{0}$, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
5. **Positividad.** $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$.
6. **No degeneración.** $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ si, y sólo si, $\vec{u} = \vec{0}$.

Demostración. Como $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, existen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{u} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{v} = (y_1, \ldots, y_n)$ y $\vec{w} = (z_1, \ldots, z_n)$.
1. Para lograr la demostración de la conmutatividad, partiremos del lado izquierdo de la igualdad que deseamos probar y, usando las propiedades conmutativas de las operaciones en los reales, vamos a intentar llegar al lado derecho. Comenzando,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = y_1 x_1 + \ldots + y_n x_n = (y_1, \ldots, y_n) \cdot (x_1, \ldots, x_n) = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

2. Para demostrar la igualdad $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, vamos a partir del lado izquierdo e intentaremos llegar al lado derecho usando la distributividad en los reales. Procediendo,

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= (x_1, \ldots, x_n) \cdot ((y_1, \ldots, y_n) + (z_1, \ldots, z_n)) = (x_1, \ldots, x_n) \cdot ((y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n)) \\
&= x_1\,(y_1 + z_1) + \ldots + x_n\,(y_n + z_n) = x_1 y_1 + x_1 z_1 + \ldots + x_n y_n + x_n z_n \\
&= x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n + x_1 z_1 + \ldots + x_n z_n = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n) \cdot (z_1, \ldots, z_n) \\
&= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.
\end{aligned}$$

3. De manera similar a las pruebas anteriores, para demostrar la igualdad de la homogeneidad, vamos a partir del lado izquierdo, intentaremos llegar a la expresión de enmedio, e inmediatamente después retomaremos el camino para lograr alcanzar el lado derecho; en todos los casos, se usará la asociatividad del producto en los reales. Comenzando,

$$\begin{aligned}
a\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) &= a\,((x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n)) = a\,(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n) = a x_1 y_1 + \ldots + a x_n y_n \\
&= (a x_1)\, y_1 + \ldots + (a x_n)\, y_n = (a x_1, \ldots, a x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = (a\,(x_1, \ldots, x_n)) \cdot (y_1, \ldots, y_n) \\
&= (a\vec{u}) \cdot \vec{v} \\
&= a x_1 y_1 + \ldots + a x_n y_n = x_1 a y_1 + \ldots + x_n a y_n = x_1\,(a y_1) + \ldots + x_n\,(a y_n) \\
&= (x_1, \ldots, x_n) \cdot (a y_1, \ldots, a y_n) = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (a\,(y_1, \ldots, y_n)) \\
&= \vec{u} \cdot (a\vec{v})\,.
\end{aligned}$$

4. Supongamos que $\vec{u} = \vec{0}$. Evaluemos el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ usando la homogeneidad ya probada de éste.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0} \cdot \vec{v} = \left(0\,\vec{0}\right) \cdot \vec{v} = 0\left(\vec{0} \cdot \vec{v}\right) = 0.$$

Análogamente se prueba el caso para cuando $\vec{v} = \vec{0}$.
5. Efectuemos el producto $\vec{u} \cdot \vec{u}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (x_1, \ldots, x_n) = x_1 x_1 + \ldots + x_n x_n = x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

Como lo obtenido es una suma de cuadrados, tenemos que $\vec{u} \cdot \vec{u}$ es no negativo; es decir,

$$\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0.$$

6. Hay que probar dos implicaciones: si $\vec{u}\cdot\vec{u}=0$, entonces $\vec{u}=\vec{0}$, y si $\vec{u}=\vec{0}$, entonces $\vec{u}\cdot\vec{u}=0$.
(Suficiencia) Supongamos que $\vec{u}\cdot\vec{u}=0$. Tenemos que probar que $\vec{u}=\vec{0}$. Procediendo,

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=0.$$

Sustituyendo $\vec{u}$ por sus coordenadas obtenemos

$$\begin{aligned}(x_1,\ldots,x_n)\cdot(x_1,\ldots,x_n) &= 0.\\ x_1^2+\ldots+x_n^2 &= 0.\end{aligned}$$

Ahora bien, una suma de cuadrados es cero, cuando, y sólo cuando, cada uno de los números elevados al cuadrado es cero; esto es,

$$x_1=\ldots=x_n=0.$$

Sustituyendo en la representación de coordenadas para $\vec{u}$ tenemos que

$$\vec{u}=(x_1,\ldots,x_n)=(0,\ldots,0)=\vec{0}.$$

(Necesidad) Ahora, hay que suponer que $\vec{u}=\vec{0}$, y hay que demostrar que $\vec{u}\cdot\vec{u}=0$; lo cual nos indica que se trata de un caso particular del inciso 4 (isotropía del cero), cuando $\vec{u}=\vec{v}=\vec{0}$. ■

Norma

Definición 1.2.27. Sean n un entero positivo y $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$. Definimos la *norma* o *magnitud de* $\vec{v}$, denotada por $\|\vec{v}\|$, de la siguiente manera,

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}.$$

Independencia lineal, ortogonalidad y ortonormalidad en conjuntos de vectores

Definición 1.2.28. Sean m y n dos enteros positivos y $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m\in\mathbb{R}^n$. Se dice que $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m\}$ es un *conjunto linealmente independiente de vectores de* $\mathbb{R}^n$ si, para cualesquier $a_1,\ldots,a_m\in\mathbb{R}$, se cumple lo siguiente,

$$\text{si}\quad a_1\vec{v}_1+\ldots+a_n\vec{v}_m=\vec{0},\quad\text{entonces}\quad a_1=\ldots=a_m=0.$$

Se dice que $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m\}$ es un *conjunto ortogonal de vectores de* $\mathbb{R}^n$ si, para cualesquier $i,j\in\{1,\ldots,m\}$, con $i\neq j$, se tiene que $\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j=0$. Se dice que $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m\}$ es un *conjunto ortonormal de vectores de* $\mathbb{R}^n$ si es ortogonal y si $\|\vec{v}_i\|=1$, para todo $i\in\{1,\ldots,m\}$.

Ortogonalidad de vectores no nulos y ortonormalidad de vectores implican, respectivamente, independencia lineal

Ejemplo 1.2.29. Probar que todo conjunto ortogonal de vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente. En particular, se tiene que todo conjunto ortonormal de vectores de $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente.

Demostración. Sean m y n dos enteros positivos y $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m\in\mathbb{R}^n$ tales que $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m\}$ es un conjunto ortogonal de vectores de $\mathbb{R}^n$ y $\vec{v}_i\neq\vec{0}$ para todo $i\in\{1,\ldots,m\}$. Ahora, tomemos $a_1,\ldots,a_m\in\mathbb{R}$, y supongamos que

$$a_1\vec{v}_1+\ldots+a_n\vec{v}_m=\vec{0}.$$

Elijamos $i\in\{1,\ldots,m\}$, y efectuemos el producto punto con $\vec{v}_i$ en ambos lados de la ecuación anterior,

$$\vec{v}_i\cdot(a_1\vec{v}_1+\ldots+a_n\vec{v}_m)=\vec{v}_i\cdot\vec{0}.$$

Por las propiedades elementales del producto punto obtenemos

$$a_1\left(\vec{v}_i\cdot\vec{v}_1\right)+\ldots+a_m\left(\vec{v}_i\cdot\vec{v}_m\right)=0.$$

Por la ortogonalidad de $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m\}$ tenemos que $\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j=0$, si $i\neq j$, y $\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i=\|\vec{v}_i\|^2$. Sustituyendo en la igualdad previa tenemos que

$$a_1\left(0\right)+\ldots+a_i\left\|\vec{v}_i\right\|^2+\ldots+a_m\left(0\right)=0.$$

Simplificando el lado izquierdo conseguimos

$$a_i \|\vec{v}_i\|^2 = 0.$$

Ahora bien, como $\vec{v}_i \neq \vec{0}$, tenemos que $\|\vec{v}_i\|^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i > 0$. Con esto, podemos continuar simplificando el lado izquierdo de la igualdad obteniendo

$$a_i = 0.$$

Dado que lo anterior ocurre para *todo* $i \in \{1, \ldots, m\}$, concluimos que $a_1 = \ldots = a_m = 0$. Por tanto, $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores de $\mathbb{R}^n$.

Finalmente, como un conjunto ortonormal de vectores de $\mathbb{R}^n$ es un caso particular de un conjunto ortogonal de vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$, la conclusión recientemente probada se le aplica. ■

Bola abierta

Definición 1.2.30. Sean: n un entero positivo, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Definimos la *bola abierta de centro* $\vec{a}$ *y radio* r, denotada por $B(\vec{a}; r)$, de la siguiente manera,

$$B(\vec{a}; r) = \{\vec{p} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{p} - \vec{a}\| < r\}.$$

Los intervalos abiertos como bolas abiertas

Ejemplo 1.2.31. Probar que todo intervalo abierto no vacío es una bola abierta en $\mathbb{R}$, y viceversa.

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Para probar que un intervalo abierto no vacío es una bola abierta, será suficiente con establecer la igualdad siguiente,

$$(a; b) = B\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right).$$

A este fin, utilizaremos equivalencias. Sea

$$x \in (a; b).$$

$\Longleftrightarrow$

$$a < x < b.$$

Dado que el punto medio del intervalo es $(a+b)/2$, restemos este valor en todos los lados de la desigualdad doble anterior.

$\Longleftrightarrow$

$$a - \frac{a+b}{2} < x - \frac{a+b}{2} < b - \frac{a+b}{2}.$$

Simplificando obtenemos

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{a-b}{2} < x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2}.$$

Mejor aún,

$\Longleftrightarrow$

$$-\frac{b-a}{2} < x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2}.$$

Obsérvese que los extremos de la desigualdad previa tienen signos distintos. Luego, es posible separarla en la disyunción siguiente,

$\Longleftrightarrow$

$$\text{o bien} \quad -\frac{b-a}{2} < x - \frac{a+b}{2} < 0, \quad \text{o bien} \quad 0 \leq x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2}.$$

Multiplicando todos los lados de la primera desigualdad doble por -1 conseguimos

$\Longleftrightarrow$

$$\text{o bien} \quad 0 < -\left(x - \frac{a+b}{2}\right) < \frac{b-a}{2}, \quad \text{o bien} \quad 0 \leq x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2}. \tag{1.8}$$

Con el objetivo de introducir el valor absoluto en las desigualdades anteriores, es necesario hacer un paréntesis para establecer las afirmaciones siguientes;

$$\text{si} \quad x - \frac{a+b}{2} < 0, \quad \text{entonces} \quad \left|x - \frac{a+b}{2}\right| = -\left(x - \frac{a+b}{2}\right),$$

y

$$\text{si} \quad 0 \leq x - \frac{a+b}{2}, \quad \text{entonces} \quad \left| x - \frac{a+b}{2} \right| = x - \frac{a+b}{2}.$$

Sustituyendo en (1.8) podemos continuar con la cadena de equivalencias.

$\Longleftrightarrow$

$$\text{o bien} \quad 0 < \left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}, \quad \text{o bien} \quad 0 \leq \left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}.$$

Simplificando la disyunción obtenemos

$\Longleftrightarrow$

$$0 \leq \left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}.$$

Ahora bien, dado que todo valor absoluto es *no negativo*, la desigualdad del lado izquierdo sale sobrando. Eliminándola conseguimos

$\Longleftrightarrow$

$$\left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}.$$

Por definición de bola abierta tenemos que

$\Longleftrightarrow$

$$x \in B\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right).$$

En resumen,

$$x \in (a;b) \quad \text{si, y sólo si,} \quad x \in B\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right).$$

Con esta equivalencia obtenemos finalmente la igualdad buscada;

$$(a;b) = B\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right). \tag{1.9}$$

Para probar el recíproco, nos apoyaremos en este resultado final. Sea E una bola abierta en $\mathbb{R}$. Luego, existen $p, r \in \mathbb{R}$, con $r > 0$, tales que

$$E = B(p;r).$$

En orden de encontrar a qué intervalo abierto corresponde, basta con igualar esta bola abierta a la del tipo obtenido a partir de un intervalo en (1.9); es decir, hay que efectuar la siguiente comparación,

$$B(p;r) = B\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right).$$

Igualando término a término los números involucrados, arribamos al siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} p = \dfrac{a+b}{2}, \\ r = \dfrac{b-a}{2}. \end{cases}$$

Resolviéndolo respecto de a y b conseguimos

$$a = p - r \quad \text{y} \quad b = p + r.$$

Sustituyendo estas expresiones para a y b en (1.9) obtenemos

$$(p-r; p+r) = B\left(\frac{p-r+p+r}{2}; \frac{p+r-(p-r)}{2}\right) = B(p;r) = E.$$

Además, como $p - r < p + r$, tenemos que el intervalo abierto conseguido es no vacío. Así, podemos concluir que toda bola abierta en $\mathbb{R}$ es un intervalo abierto no vacío. ■

Punto interior e interior de un conjunto

Definición 1.2.32. Sean: n un entero positivo, $S \subset \mathbb{R}^n$ y $\vec{p} \in S$. Se dice que $\vec{p}$ es un *punto interior de* S si existe $r > 0$ tal que $B(\vec{p}; r) \subset S$. Al conjunto de puntos interiores de S se le llama el *interior de* S y se denota por S° o por $\operatorname{Int} S$. Con esta notación, un punto $\vec{p}$ de S es un punto interior si, y sólo si, $\vec{p} \in S^\circ$. Finalmente, nótese que $S^\circ \subset S$.

Contención de la unión de interiores en el interior de la unión

Ejemplo 1.2.33. Sean n un entero positivo y S y T dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Ocurre que $S^\circ \cup T^\circ \subset (S \cup T)^\circ$.

Demostración. Sea
$$\vec{p} \in S^\circ \cup T^\circ.$$
Se tiene que,
$$\text{o bien} \quad \vec{p} \in S^\circ, \quad \text{o bien} \quad \vec{p} \in T^\circ.$$
Es decir, o bien $\vec{p}$ es punto interior de S, o bien $\vec{p}$ es punto interior de T. En cualquier caso, existe $r > 0$ tal que,
$$\text{o bien} \quad B(\vec{p}; r) \subset S, \quad \text{o bien} \quad B(\vec{p}; r) \subset T.$$
Para cualquier opción se puede concluir que
$$B(\vec{p}; r) \subset S \cup T;$$
por lo que $\vec{p}$ es punto interior de $S \cup T$. En símbolos,
$$\vec{p} \in (S \cup T)^\circ.$$
Dado que esto sucede para *todo* $\vec{p} \in S^\circ \cup T^\circ$, concluimos que
$$S^\circ \cup T^\circ \subset (S \cup T)^\circ.$$
■

Conjunto abierto

Definición 1.2.34. Sean n un entero positivo y $S \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que S es un *conjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$ si todos los puntos de S son puntos interiores de S; es decir, si $S = S^\circ$.

La topología usual en los espacios euclidianos

Definición 1.2.35. Sea n un entero positivo. A la colección de todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ se le denomina la *topología usual* o *euclidiana de* $\mathbb{R}^n$, y se representa por τ; es decir,
$$\tau = \{S : S \text{ es un conjunto abierto de } \mathbb{R}^n\}.$$
En estas circunstancias, se dice que la pareja $(\mathbb{R}^n, \tau)$ es un *espacio topológico*, en tanto que a $\mathbb{R}^n$ se le denomina un *conjunto topologizado por* τ o, simplemente, un *conjunto topologizado*.

Uniones e intersecciones

Definición 1.2.36. Sea I un conjunto no vacío al que, para los propósitos de esta definición, llamaremos un *conjunto de índices*. Sea X un conjunto y considérese $\mathcal{P}(X)$, el conjunto potencia de X. Defínase una función $f : I \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que, para cada $i \in I$, existe $A_i \subset X$ tal que $i \longmapsto A_i$, o sea, $f(i) = A_i$; a tal función se la llama una *función indexadora*. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una colección de subconjuntos de X. Definimos la *unión de las* A_i *con* $i \in I$, denotada por $\cup_{i \in I} A_i$, de la siguiente manera,
$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X : \text{existe } i \in I \text{ tal que } x \in A_i\}.$$
Asimismo, definimos la *intersección de las* A_i *con* $i \in I$, representada por $\cap_{i \in I} A_i$, de la siguiente forma,
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X : x \in A_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Máximo y mínimo de un conjunto de números reales

Definición 1.2.37. Sean n un entero positivo y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Usaremos la notación $\text{Máx}\,(a_1, \ldots, a_n)$ para denotar al *mayor entre los números del conjunto* $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Por otra parte, utilizaremos la nomenclatura $\text{Mín}\,(a_1, \ldots, a_n)$ para representar al *menor entre los números del conjunto* $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Propiedades elementales de los conjuntos abiertos

Ejemplo 1.2.38. Sea n un entero positivo. Probar que la topología usual de $\mathbb{R}^n$ tiene las siguientes propiedades:

1. **Abierto extremal.** $\mathbb{R}^n$ es conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.
2. **Uniones arbitrarias.** Si I es un conjunto no vacío de índices y $\{A_i\}_{i\in I}$ es una colección de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.
3. **Intersecciones finitas.** Si m es un entero positivo y $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ es una colección finita de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, entonces $\bigcap_{i=1}^{m} A_i$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea n un entero positivo.
1. Probemos que $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto de sí mismo. Sean $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Dado que *todos* los puntos de la bola abierta $B\,(\vec{p}; r)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$, tenemos trivialmente que $B\,(\vec{p}; r) \subset \mathbb{R}^n$. Luego, cualquier punto de $\mathbb{R}^n$ es un punto interior del mismo; por lo que $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.
2. Sean I un conjunto no vacío de índices y $\{A_i\}_{i\in I}$ una colección de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Probemos que

$$\bigcup_{i\in I} A_i$$

es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Sea

$$\vec{p} \in \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Luego, existe un índice $j \in I$ tal que $\vec{p} \in A_j$. Dado que A_j es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, tenemos que $\vec{p}$ es un punto interior de A_j; por lo que para algún $r > 0$ se tiene que

$$B\,(\vec{p}; r) \subset A_j.$$

Ahora bien,

$$A_j \subset \bigcup_{i\in I} A_i.$$

De donde

$$B\,(\vec{p}; r) \subset \bigcup_{i\in I} A_i;$$

o sea,

$$\vec{p} \quad \text{es un punto interior de} \quad \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Como esto sucede para *todo*

$$\vec{p} \in \bigcup_{i\in I} A_i,$$

concluimos que

$$\bigcup_{i\in I} A_i$$

es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.
3. Sean m un entero positivo y $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ una colección finita de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Demostremos que

$$\bigcap_{i=1}^{m} A_i$$

es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Sea

$$\vec{p} \in \bigcap_{i=1}^{m} A_i.$$

Luego, $\vec{p} \in A_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Dado que cada A_i es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, tenemos entonces que $\vec{p}$ es un punto interior de A_i, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Para cada uno de estos índices, existe, respectivamente $r_i > 0$ tal que

$$B(\vec{p}; r_i) \subset A_i.$$

Definamos

$$r = \text{Mín}(r_1, \ldots, r_m).$$

Como $r \leq r_i$, para todo $i \in I$ (de hecho, $r = r_j$, para alguna $j \in \{1, \ldots, m\}$; por lo que $r > 0$), tenemos que

$$B(\vec{p}; r) \subset B(\vec{p}; r_i).$$

De donde

$$B(\vec{p}; r) \subset A_i,$$

para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Por esto último, tomando la intersección obtenemos

$$B(\vec{p}; r) \subset \bigcap_{i=1}^{m} A_i.$$

En otras palabras,

$$\vec{p} \quad \text{es un punto interior de} \quad \bigcap_{i=1}^{m} A_i.$$

Dado que esto ocurre para *todo*

$$\vec{p} \in \bigcap_{i=1}^{m} A_i,$$

concluimos que

$$\bigcap_{i=1}^{m} A_i$$

es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. ∎

Un conjunto abierto

Ejemplo 1.2.39. Considérese el subconjunto del plano cartesiano dado por

$$A = \{(x, y) : x - 2y - 1 < 0\}.$$

Probar que A es conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$.

Demostración. Sea $\vec{p} \in A$; luego, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{p} = (a, b)$ y $a - 2b - 1 < 0$. Dado que la recta $x - 2y - 1 = 0$ delimita el conjunto A, midamos la distancia de $\vec{p}$ a la recta. Ahora bien, tomando en cuenta que un vector normal a dicha recta está dado por $\vec{L} = (1, -2)$, normalizándolo obtenemos

$$\vec{U} = \frac{\vec{L}}{\left\|\vec{L}\right\|} = \frac{1}{\|(1, -2)\|}(1, -2) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}(1, -2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2).$$

Para conseguir la distancia entre $\vec{p}$ y la recta, podemos tomar el valor absoluto del producto punto entre $\vec{p} - (h, k)$ y $\vec{U}$, donde (h, k) es cualquier punto sobre la recta, por lo cual $h - 2k - 1 = 0$, obteniendo así la distancia r dada por

$$\begin{aligned}
r &= \left|\vec{U} \cdot [\vec{p} - (h, k)]\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2) \cdot [(a, b) - (h, k)]\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}|(1, -2) \cdot (a - h, b - k)| \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}|(1)(a - h) + (-2)(b - k)| = \frac{1}{\sqrt{5}}|a - h - 2b + 2k| = \frac{1}{\sqrt{5}}|a - 2b - h + 2k + 1 - 1| \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}|a - 2b - (h - 2k - 1) - 1| = \frac{1}{\sqrt{5}}|a - 2b - 0 - 1| = \frac{|a - 2b - 1|}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Mejor aún,

$$|a-2b-1| = \sqrt{5}r.$$

Para futura referencia tenemos que

$$\vec{L}\cdot[\vec{p}-(h,k)] = a-2b-1.$$

A fin de probar que $\vec{p}$ es punto interior de A será suficiente con demostrar que $B(\vec{p};r)\subset A$. Para esto, sea $\vec{q}\in B(\vec{p};r)$. Luego, existen $c,d\in\mathbb{R}$ tales que $\vec{q}=(c,d)$ y $\|\vec{q}-\vec{p}\|<r$. A continuación, evaluemos las coordenadas de $\vec{q}$ en la ecuación de la recta para comprobar que su valor es negativo. Procediendo,

$$\begin{aligned} c-2d-1 &= \vec{L}\cdot[\vec{q}-(h,k)] = \vec{L}\cdot[(\vec{q}-\vec{p})+[\vec{p}-(h,k)]] = \vec{L}\cdot(\vec{q}-\vec{p})+\vec{L}\cdot[\vec{p}-(h,k)] \\ &= \vec{L}\cdot(\vec{q}-\vec{p})+a-2b-1 \le \left|\vec{L}\cdot(\vec{q}-\vec{p})\right|+a-2b-1 \le \left\|\vec{L}\right\|\|\vec{q}-\vec{p}\|+a-2b-1 \\ &= \sqrt{5}\,\|\vec{q}-\vec{p}\|+a-2b-1 < \sqrt{5}r+a-2b-1. \end{aligned}$$

En síntesis,

$$c-2d-1 < \sqrt{5}r+a-2b-1. \tag{1.10}$$

Ahora, como $a-2b-1<0$, ocurre que

$$a-2b-1 = -|a-2b-1| = -\sqrt{5}r.$$

Sustituyendo, podemos continuar con (1.10).

$$c-2d-1 < \sqrt{5}r+a-2b-1 = \sqrt{5}r-\sqrt{5}r = 0.$$

En resumen, $c-2d-1<0$; por lo que $\vec{q}=(c,d)\in A$. Dado que esto sucede para *todo* $\vec{q}\in B(\vec{p};r)$, concluimos que $B(\vec{p};r)\subset A$. En otras palabras, $\vec{p}$ es punto interior de A. Como esto acontece para *todo* $\vec{p}\in A$, concluimos que A es conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$. ■

Punto de acumulación y conjunto derivado

Definición 1.2.40. Sean: n un entero positivo, $S\subset\mathbb{R}^n$ y $\vec{p}\in\mathbb{R}^n$. Se dice que $\vec{p}$ es un *punto de acumulación* o *punto límite de* S si para todo $r>0$ se tiene que $(B(\vec{p};r)\setminus\{\vec{p}\})\cap S\neq\emptyset$. Al conjunto de puntos de acumulación de S se le llama el *conjunto derivado de* S y se denota por S'. Con esta notación, un punto $\vec{p}$ es un punto de acumulación de S si, y sólo si, $\vec{p}\in S'$.

Los puntos interiores como puntos de acumulación

Ejemplo 1.2.41. Sea n un entero positivo. Probar que, en $\mathbb{R}^n$, todo punto interior de un conjunto es un punto de acumulación del conjunto.

Demostración. Sean $S\subset\mathbb{R}^n$ y $\vec{p}$ un punto interior de S. Luego, existe $s>0$ tal que

$$B(\vec{p};s)\subset S.$$

Ahora, demos $r>0$. Tomemos $t=\text{Mín}(r,s)$; de lo cual se obtiene que $t>0$, además de que

$$B(\vec{p};t)\subset B(\vec{p};r) \quad \text{y} \quad B(\vec{p};t)\subset B(\vec{p};s).$$

y, por esto último, que

$$B(\vec{p};t)\setminus\{\vec{p}\}\subset B(\vec{p};r)\setminus\{\vec{p}\} \quad \text{y} \quad B(\vec{p};t)\setminus\{\vec{p}\}\subset B(\vec{p};s)\setminus\{\vec{p}\}.$$

A todo lo anterior añadamos que

$$B(\vec{p};t)\setminus\{\vec{p}\}\neq\emptyset.$$

Por una parte, tenemos que

$$B(\vec{p};t)\setminus\{\vec{p}\}\subset B(\vec{p};s)\setminus\{\vec{p}\}\subset B(\vec{p};s)\subset S.$$

De esto conseguimos lo siguiente

$$(B(\vec{p};t)\setminus\{\vec{p}\})\cap S = B(\vec{p};t)\setminus\{\vec{p}\}\neq\emptyset.$$

Y así,

$$\emptyset \neq B(\vec{p}; t) \setminus \{\vec{p}\} = (B(\vec{p}; t) \setminus \{\vec{p}\}) \cap S \subset (B(\vec{p}; r) \setminus \{\vec{p}\}) \cap S.$$

En resumen,

$$(B(\vec{p}; r) \setminus \{\vec{p}\}) \cap S \neq \emptyset.$$

Como esto vale para *todo* $r > 0$, concluimos que $\vec{p}$ es punto de acumulación de S. Así, todo punto interior de S es punto de acumulación de S. ■

Cerradura de un conjunto

Definición 1.2.42. Sean (X, Υ) un espacio topológico y $A \subset X$. Definimos la *cerradura de* A, denotada por $\overline{A}$, de la siguiente manera,

$$\overline{A} = \{x : x \in X \text{ y, para todo } U \in \Upsilon, \text{ con } x \in U, \text{ ocurre que } U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Propiedades elementales de la cerradura de un conjunto

Proposición 1.2.43. Sean (X, Υ) un espacio topológico y A y B dos subconjuntos de X. La cerradura tiene las siguientes propiedades:

1. **Vacío.** $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
2. **Contención.** Si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.
3. **Unión.** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

De la teoría de conjuntos, las Leyes de De Morgan constituyen un aliado en relación a propiedades que involucran la diferencia entre conjuntos.

Propiedades elementales del complemento y la diferencia

Proposición 1.2.44. Sean: I un conjunto no vacío de índices, X un conjunto y $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de subconjuntos de X. Las siguientes propiedades se dan:

1. **Primera ley de De Morgan.** $\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$.
2. **Segunda ley de De Morgan.** $\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$.
3. **Contención.** Si $i, j \in I$ y $A_i \subset A_j$, entonces $A_j^c \subset A_i^c$.
4. **Equivalencia a la contención.** Si $i, j \in I$, entonces, $A_i \setminus A_j = \emptyset$ si, y sólo si, $A_i \subset A_j$.

Contención de la diferencia relativa de dos cerraduras en la cerradura de la diferencia relativa

Ejemplo 1.2.45. Sean (X, Υ) un espacio topológico y A y B dos subconjuntos de X. Probar que $\overline{A} \setminus \overline{B} \subset \overline{A \setminus B}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
(\overline{A} \setminus \overline{B}) \setminus \left(\overline{A \setminus B}\right) &= (\overline{A} \setminus \overline{B}) \cap \left(\overline{A \setminus B}\right)^c = \left(\overline{A} \cap (\overline{B})^c\right)) \cap \left(\overline{A \setminus B}\right)^c = \overline{A} \cap ((\overline{B})^c \cap \left(\overline{A \setminus B}\right)^c) \\
&= \overline{A} \cap \left(\overline{B} \cup \overline{(A \setminus B)}\right)^c = \overline{A} \cap \left(\overline{B \cup ((A \setminus B)}\right)^c = \overline{A} \cap \left(\overline{A \cup B}\right)^c = \overline{A} \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)^c \\
&= \overline{A} \cap \left((\overline{A})^c \cap (\overline{B})^c\right) = \left(\overline{A} \cap (\overline{A})^c\right) \cap (\overline{B})^c = \emptyset \cap (\overline{B})^c = \emptyset.
\end{aligned}$$

Por el Inciso 4 de la Proposición 1.2.44 se concluye que $\overline{A} \setminus \overline{B} \subset \overline{A \setminus B}$. ■

1.3. Ejercicios

I. Utilizar el Método Directo para demostrar que las funciones siguientes son inyectivas:

1. $f(x) = -8x + 5$; $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
2. $g(x) = 7x^3 - 2$; $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
3. $h(x) = \sqrt[5]{x+1}$; $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
4. $j(x) = \sqrt{(4x-1)^3 + 7} - 2$; $j : \left[\left(\sqrt[3]{-7}+1\right)/4; +\infty\right) \longrightarrow \mathbb{R}$
5. $k(x) = \left(\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x^7}{3} + 8} - 9}{-4}\right)^5 + 1$; $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
6. $F(x) = \left(\dfrac{8}{-3 + \sqrt[5]{\dfrac{-10}{6 + (2x-5)^7}}}\right)^{11} - 7$; $F : \mathbb{R} \setminus \left\{\left(\sqrt[7]{-6}+5\right)/2, \left(\sqrt[7]{-10/243 - 6} + 5\right)/2\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$.
7. $G(x) = \dfrac{15x+4}{5x-8}$; $G : \mathbb{R} \setminus \{8/5\} \longrightarrow \mathbb{R}$.
8. $H(x) = \dfrac{14x-9}{-7x+5}$; $H : \mathbb{R} \setminus \{5/7\} \longrightarrow \mathbb{R}$.
9. $J(x) = \left(\dfrac{9 + \sqrt{\dfrac{-6x+7}{3x+4}}}{2}\right)^5 - 8$; $J : (-4/3; 7/6] \longrightarrow \mathbb{R}$.
10. $K(x) = \sqrt[7]{\dfrac{-7\left(\dfrac{-12x-5}{-4x-9}\right)^3}{-10}} - 2$; $K : \mathbb{R} \setminus \{-9/4\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

II. Considérese $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ el *conjunto potencia de* $\mathbb{R}$; es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$. Ahora, sean: $a \in \mathbb{R}$, $C_a = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ y } x \leq a\} = (-\infty; a]$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ función dada por $f(a) = C_a$.

1. Calcular: **(a)** $f(-1)$; **(b)** $f(0)$; **(c)** $f(4/3)$.
2. Encontrar: **(a)** $f(-1) \cap f\left(\sqrt{5}\right)$; **(b)** $f(1) \cup f(4)$.
3. Demostrar que f es inyectiva.
4. ¿Es suprayectiva la función f? (Ver la definición respectiva en el Capítulo 2.)

III. Sean: $\mathbb{N}$ el *conjunto de los números enteros positivos*, $\mathbb{Z}$ el *conjunto de los números enteros* y $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ función dada de la siguiente manera,

$$g(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 1, \\ g(n-1) + (-1)^{n-1}(n-1), & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

1. Calcular: **(a)** $g(-6)$; **(b)** $g(-1)$; **(c)** $g(0)$; **(d)** $g(1)$; **(e)** $g(4)$.
2. Demostrar que g es inyectiva.

IV. Sea n un entero positivo. Demostrar que $n^2 + n + 1$ es un número impar.
V. Sean X y Y dos conjuntos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Se dice que f es *biyectiva* si es tanto inyectiva como suprayectiva. Probar que f es biyectiva si, y sólo si, $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$, para todo $A \subset X$.

Capítulo 2

REDUCCIÓN AL ABSURDO

2.1. Introducción

2.1.1. Presentación del método

La tradición adjudica a Hipócrates de Quíos (470-410 a.C. aproximadamente) la invención del *Método por Reducción al Absurdo* o *Prueba por Contradicción*. Sin embargo, no se puede descartar que se haya inspirado en tradiciones argumentativas griegas más antiguas, como las "aporías" de los filósofos eleáticos, cuyos representantes más eminentes fueron Parménides de Elea (514-470 a.C. aproximadamente) y Zenón de Elea (495-430 a.C. aproximadamente) (ver [10]). El punto es que, a partir de entonces, los matemáticos griegos tuvieron a su disposición, al menos, *dos* herramientas para efectuar demostraciones. Por ejemplo, el matemático Euclides de Alejandría (330-265 a.C. aproximadamente) empleó ambas técnicas con habilidad en su libro "Elementos." Una de las pruebas por contradicción más conocidas de Euclides estableció la existencia de los *números irracionales* (ver [13]).

En el Método por Reducción al Absurdo se supone que el antecedente de una proposición condicional es verdadero, al igual que en el Método Directo, y se desea probar que el consecuente también es verdadero; es aquí donde cambia la táctica, pues si la finalidad es demostrar que el consecuente es verdadero, debe haber alguna razón por la cual éste no puede ser falso; dicho de otra manera, se cuestiona el por qué la conclusión no puede ser falsa. El objetivo del método es, precisamente, descubrir esa razón. Así las cosas, se procede de la siguiente manera. Si queremos probar la proposición condicional "si p, entonces q" por Reducción al Absurdo, se debe suponer que el antecedente p es verdadero y el consecuente q es falso, y usar esta información para llegar a una contradicción.

Uno de los matemáticos más importantes del siglo XX, el inglés Godfrey Hardy (1877-1947) decía (ver [18]) que "el Método de Reducción al Absurdo, que tanto complacía a Euclides, es una de las armas más finas que puede emplear un matemático. Se trata de una estrategia mucho más refinada que cualquier jugada de ajedrez; un ajedrecista se puede permitir sacrificar un peón o incluso otra pieza, pero un matemático arriesga la partida entera."

2.1.2. Estructura del método

La estructura del Método por Reducción al Absurdo queda de la siguiente manera:

Se desea probar "si p, entonces q."

Se supone que p es verdadera y se supone, por contradicción, que la conclusión q es falsa; es decir, se supone p junto con la *negación de q*. Con la conjunción "p y no q", y por medio de inferencias, finalmente se llega a una contradicción.

Se concluye que la proposición "si p, entonces q" es verdadera.

2.1.3. Sugerencias para su uso

Cada problema origina su contradicción; no hay normas específicas para encontrarla; es necesario tener creatividad, esfuerzo y persistencia. No obstante, un caso en que el método puede tener éxito es aquel en donde el consecuente contiene la palabra no. También se emplea para demostrar propiedades que posee el conjunto vacío. Aún más, se usa con frecuencia para probar teoremas que involucran unicidad. En este caso, en lugar de tratar de demostrar que existe un único objeto, se procede con la suposición de que existe otro objeto. El cómo y dónde va a surgir la contradicción puede no estar claro; pero puede resultar mucho más fácil que atacar el problema de manera directa.

2.2. Ejemplos

Con el método de reducción al absurdo se puede demostrar la no suprayectividad de una función.

Función suprayectiva

Definición 2.2.1. Sean A y B dos conjuntos. Una función $f : A \longrightarrow B$ se llama *suprayectiva*, *sobreyectiva* o *sobre*, si $B = f(A)$; es decir, si para todo $b \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = b$.

Función no suprayectiva

Definición 2.2.2. Sean A y B dos conjuntos. Una función $f : A \longrightarrow B$ se llama *no suprayectiva*, si $B \neq f(A)$; es decir, si existe $b \in B$, tal que, para todo $x \in A$, $f(x) \neq b$.

En la práctica se halla un valor concreto b para el cual, en la igualdad $f(x) = b$, al intentar despejar x en términos de b, se llegue a una contradicción.

Ejemplo 2.2.3. Probar que la función

$$F(x) = \frac{-9x+2}{-3x-4},$$

tal que $F : (-\infty; -4/3) \cup (-4/3; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, no es suprayectiva.

Demostración. Antes de empezar, efectuemos la división indicada en la fracción.

$$\begin{array}{r|rr} & \multicolumn{2}{c}{3} \\ \cline{2-3} -3x-4 & -9x & +2 \\ & +9x & +12 \\ \cline{2-3} & & 14 \end{array}$$

Luego,

$$F(x) = \frac{-9x+2}{-3x-4} = 3 + \frac{14}{-3x-4}.$$

Ahora supongamos, por contradicción, que F es suprayectiva; es decir, que para todo $b \in \mathbb{R}$, existe $x \in (-\infty; -4/3) \cup (-4/3; +\infty)$ tal que $F(x) = b$. Ahora, tómese, por ejemplo, $b = 3$. Sustituyendo $F(x)$ y b en la ecuación $F(x) = b$ obtenemos

$$3 + \frac{14}{-3x-4} = 3.$$

Procedamos a despejar x.

$$\begin{aligned} \frac{14}{-3x-4} &= 0. \\ 14 &= 0(-3x-4). \\ 14 &= 0. \end{aligned}$$

Pero esto es una contradicción. Por tanto, F no es suprayectiva. ■

Ejemplo 2.2.4. Probar que la función $G(x) = (3x-1)^2 + 9$, tal que $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, no es suprayectiva.

Demostración. Supongamos, por contradicción, que G es suprayectiva; es decir, que para todo $b \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $G(x) = b$. Tómese, por ejemplo, $b = 8$. Sustituyendo $G(x)$ y b en la ecuación $G(x) = b$ obtenemos

$$(3x-1)^2 + 9 = 8.$$

Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad tenemos que

$$9x^2 - 6x + 1 + 9 = 8.$$

Igualando a cero conseguimos

$$\begin{aligned} 9x^2 - 6x + 10 - 8 &= 0. \\ 9x^2 - 6x + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Las raíces son

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(9)(2)}}{2(9)} = \frac{6 \pm \sqrt{36-72}}{18} = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{18} = \frac{6 \pm \sqrt{-6^2}}{18} = \frac{6 \pm 6\sqrt{-1}}{18} = \frac{6\left(1 \pm \sqrt{-1}\right)}{18} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{-1}}{3}. \end{aligned}$$

Contradicción, ya que $x \notin \mathbb{R}$. Por tanto, G no es suprayectiva. ■

Cuadrados y paridad

Ejemplo 2.2.5. Sea n un número entero. Probar que, si n^2 es par, entonces n es par.

Demostración. Supongamos que n^2 es par. Supongamos ahora, por contradicción, que n es impar. Luego, existe un número entero m tal que $n = 2m + 1$. Elevemos n al cuadrado usando esta representación.

$$n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2\left(2m^2 + 2m\right) + 1.$$

De donde n^2 también es impar. Contradicción, ya que por hipótesis n^2 es par. Por tanto, si n^2 es par, entonces n es par. ■

La irracionalidad de $\sqrt{2}$

Ejemplo 2.2.6. Probar que, si r es un número real tal que $r^2 = 2$, entonces r no es racional.

Demostración. Supongamos, por contradicción, que para algún número racional r ocurre que $r^2 = 2$. Luego, existen números enteros p y q, con $q \neq 0$, tales que $r = p/q$. Es claro que $r \neq 0$, ya que $0^2 = 0 \neq 2$; con lo que $p \neq 0$. De donde podemos suponer que p y q, al no ser cero, no tienen factores comunes distintos de 1 y -1. Continuando, como

$$r^2 = 2,$$

se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{q^2} &= 2. \\ p^2 &= 2q^2. \end{aligned}$$

Como p^2 es múltiplo de 2, por el ejemplo anterior tenemos que p es también múltiplo de 2. Luego, existe un número entero k tal que $p = 2k$. Sustituyendo en la igualdad previa obtenemos

$$\begin{aligned} (2k)^2 &= 2q^2. \\ 4k^2 &= 2q^2. \\ 2k^2 &= q^2. \end{aligned}$$

Una vez más, como q^2 es múltiplo de 2, entonces q también es múltiplo de 2. Pero entonces tanto p como q son múltiplos de 2. De donde 2 es factor común de ambos. Contradicción. Por tanto, si r es un número real tal que $r^2 = 2$, entonces r no es racional. ■

Para el siguiente ejemplo referente a la imagen de un conjunto bajo una función, favor de consultar la definición correspondiente provista en el primer capítulo.

Vacuidad de la imagen del conjunto vacío

Ejemplo 2.2.7. Sean X y Y dos conjuntos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que $f(\emptyset) = \emptyset$.

Demostración. Supongamos, por contradicción, que $f(\emptyset) \neq \emptyset$. Luego, existe $y \in f(\emptyset)$. Por definición de imagen, lo anterior quiere decir que *existe* $x \in \emptyset$ tal que $f(x) = y$. Contradicción, ya que, para *todo* x, $x \notin \emptyset$. Por tanto, $f(\emptyset) = \emptyset$. ■

Para los siguientes ejemplos referentes a límites de funciones reales de variable real, consúltense las definiciones respectivas dadas en el primer capítulo.

Unicidad del límite en funciones reales de variable real

Ejemplo 2.2.8. Sean: A un intervalo abierto no vacío, $a \in A$, f una función real de variable real con dominio $\mathcal{D}_f$ y $A \setminus \{a\} \subset \mathcal{D}_f$. Probar que, si el $\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$ existe, entonces es único.

Demostración. Como $\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$ existe, sea $L = \lim_{x \longrightarrow a} f(x)$. Supongamos, por contradicción, que existe otro límite, distinto del anterior, para el límite de f en a, es decir, que existe $M = \lim_{x \longrightarrow a} f(x)$, pero $L \neq M$. Luego, dado $\varepsilon > 0$, para $\varepsilon/2 > 0$, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, tales que, con $x \in A$, si $0 < |x-a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon/2$, y si $0 < |x-a| < \delta_2$, entonces $|f(x) - M| < \varepsilon/2$. De donde, si tomamos $\delta = \text{Mín}(\delta_1, \delta_2)$, si $x \in A$ y si $0 < |x-a| < \delta$, entonces, al mismo tiempo,

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sumando miembro a miembro estas últimas desigualdades obtenemos

$$|f(x) - L| + |f(x) - M| < \varepsilon.$$

Ahora bien, comparemos L y M. Como son distintos, tenemos que $L - M \neq 0$. De donde $|L - M| > 0$. Pero, del siguiente desarrollo que usa la desigualdad triangular, se concluye que

$$|L - M| = |[L - f(x)] + [f(x) - M]| \leq |L - f(x)| + |f(x) - M| < \varepsilon.$$

En resumen,

$$|L - M| < \varepsilon.$$

Dado que L y M son constantes y que esta desigualdad ocurre para *todo* $\varepsilon > 0$, concluimos que $|L - M| = 0$. Contradicción, ya que $|L - M| > 0$. Por tanto, el límite de una función en un número, si existe, es único. ■

Inexistencia de límite

Ejemplo 2.2.9. Probar que el siguiente límite

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

no existe.

Demostración. Supongamos, por contradicción, que $\lim_{x \longrightarrow 0} |x|/x$ existe. Por el Ejemplo 1.2.13 del Capítulo 1, esto implica que los límites unilaterales correspondientes existen y son iguales; es decir,

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}.$$

Procedamos, pues, a calcular explícitamente dichos límites unilaterales.
(Límite por la derecha) Al tomar el límite cuando x tiende hacia cero por la derecha, por definición en este caso $x > 0$. Pero entonces, $|x| = x$. Luego, tomando este límite y sustituyendo el valor absoluto obtenemos

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} 1 = 1.$$

(Límite por la izquierda) En este caso de límite en el que x tiende a cero por la izquierda tenemos que $x < 0$. Así, $|x| = -x$. Calculando este límite y sustituyendo el valor absoluto conseguimos

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0^-} (-1) = -1.$$

Se concluye que,

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \neq -1 = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}.$$

Contradicción, ya que se suponía que debían ser iguales. Por tanto, $\lim_{x \longrightarrow 0} |x|/x$ no existe. ■

Para el siguiente ejemplo referente a funciones reales continuas y sucesiones reales convergentes, favor de consultar las definiciones respectivas proporcionadas en el primer capítulo.

Determinación de la continuidad por la preservación de la convergencia

Ejemplo 2.2.10. Sean f una función real de variable real con dominio $\mathcal{D}_f$ y $a \in \mathcal{D}_f$. Probar que si siempre que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea una sucesión contenida en $\mathcal{D}_f$ que converge hacia a, ocurre que también la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $f(a)$, entonces, con todo esto, se tiene que f es continua en a.

Demostración. Supongamos que, siempre que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea una sucesión contenida en $\mathcal{D}_f$ que converge hacia a, ocurre que también la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge, y lo hace precisamente hacia $f(a)$. Hay que probar que f es continua en a. Para esto supongamos, por contradicción que f no es continua en a. Esto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe $x \in \mathcal{D}_f$, con

$$|x - a| < \delta, \quad \text{y, sin embargo,} \quad |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Ahora, demos un entero positivo n, y definamos $\delta_n = 1/n$. Por la no continuidad de f en a, tenemos que, para este $\delta_n > 0$, existe $x_n \in \mathcal{D}_f$ tal que

$$|x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n}, \quad \text{y, no obstante,} \quad |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

En resumen, para todo entero positivo n,

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Pero, por una parte, el que $|x_n - a| < 1/n$, para todo entero positivo n, significa que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia a, y, por otra parte, el que $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$, para todo entero positivo n, quiere decir que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge hacia $f(a)$. En síntesis, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia a en tanto que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge hacia $f(a)$. Contradicción. Por tanto, f es continua en a. ■

Juntando los Ejemplos 1.2.21 y 2.2.10 obtenemos el siguiente resultado que relaciona la continuidad de una función real con la convergencia de sucesiones reales.

Corolario 2.2.11. Sean f una función real de variable real con dominio $\mathcal{D}_f$ y $a \in \mathcal{D}_f$. Se tiene que f es continua en a si, y sólo si, siempre que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea una sucesión contenida en $\mathcal{D}_f$ que converge hacia a, ocurre que también la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $f(a)$.

Función uniformemente continua real de variable real

Definición 2.2.12. Sean $S \subset \mathbb{R}$ y $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *uniformemente continua en S* si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para cualesquier $x, y \in S$,

$$\text{si} \quad |x - y| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Nótese que toda función real de variable real que sea uniformemente continua en un conjunto es automáticamente continua en todo número de dicho conjunto.

La no uniformidad continua de la función recíproca en un dominio acotado

Ejemplo 2.2.13. Sea $G(x) = 1/x$, tal que $G : (-1; 0) \cup (0; 1) \longrightarrow \mathbb{R}$. Probar que G no es uniformemente continua.

Demostración. Supongamos, por contradicción, que G es uniformemente continua. Luego, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para cualesquier $x, y \in (-1; 0) \cup (0; 1)$,

$$\text{si} \quad |x - y| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |G(x) - G(y)| < \varepsilon.$$

Nótese que $0 < |x| < 1$ y $0 < |y| < 1$. Continuando, en particular, para $\varepsilon = 1 > 0$ y sustituyendo G, tenemos que existe $\delta_1 > 0$ tal que, para cualesquier $x, y \in (-1; 0) \cup (0; 1)$,

$$\text{si} \quad |x - y| < \delta_1, \quad \text{entonces} \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < 1.$$

Equivalentemente,

$$\text{si} \quad |x-y| < \delta_1, \quad \text{entonces} \quad \left|\frac{y-x}{xy}\right| < 1.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $y = -x \in (-1;0) \cup (0;1)$. Sustituyendo obtenemos,

$$\text{si} \quad 2\,|x| < \delta_1, \quad \text{entonces} \quad \frac{2\,|x|}{|x|\,|y|} < 1.$$

Mejor aún,

$$\text{si} \quad |x| < \frac{\delta_1}{2}, \quad \text{entonces} \quad 2 < |y|\,.$$

Luego, eligiendo $x \in (-1;0) \cup (0;1)$, con $|x| < \delta_1/2$, ocurre que $2 < |y|$. Contradicción, ya que $|y| < 1$. Por tanto, G no es uniformemente continua. ■

Para los siguientes ejemplos topológicos, consúltense las definiciones dadas en el primer capítulo.

El conjunto vacío como conjunto abierto

Ejemplo 2.2.14. Sea n un entero positivo. Probar que, en $\mathbb{R}^n$, el conjunto vacío es un conjunto abierto.

Demostración. Supongamos, por contradicción, que el $\emptyset$ no es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Luego, *existe* $\vec{p} \in \emptyset$ tal que $\vec{p}$ no es punto interior de $\emptyset$. Pero esta afirmación de que *existe* un punto $\vec{p} \in \emptyset$ es una contradicción, ya que el conjunto vacío no tiene elementos. Por tanto, el $\emptyset$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. ■

Punto aislado

Definición 2.2.15. Sean: n un entero positivo, $S \subset \mathbb{R}^n$ y $\vec{p} \in S$. Se dice que $\vec{p}$ es un *punto aislado de S* si para algún $r > 0$ se tiene que $(B(\vec{p}; r) \setminus \{\vec{p}\}) \cap S = \emptyset$ o, equivalentemente, $B(\vec{p}; r) \setminus \{\vec{p}\} \subset S^c$. Al conjunto de puntos aislados de S se le representa por $\operatorname{Ais} S$ o por $\operatorname{Iso} S$. Con esta notación, un punto $\vec{p}$ de S es un punto aislado si, y sólo si, $\vec{p} \in \operatorname{Ais} S$. Finalmente, nótese que $\operatorname{Ais} S \subset S$.

Incompatibilidad entre puntos aislados y puntos de acumulación

Ejemplo 2.2.16. Sean n un entero positivo y $S \subset \mathbb{R}^n$. Probar que ningún punto de $\mathbb{R}^n$ puede ser, simultáneamente, punto aislado de S y punto de acumulación de S; esto es, en símbolos, que $\operatorname{Ais} S \cap S' = \emptyset$.

Demostración. Supongamos, por contradicción, que $\operatorname{Ais} S \cap S' \neq \emptyset$; es decir, que existe $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{p} \in \operatorname{Ais} S \cap S'$. Luego, $\vec{p} \in \operatorname{Ais} S$ y $\vec{p} \in S'$; es decir, $\vec{p}$ es punto aislado de S y punto de acumulación de S. Por lo primero, para algún $r > 0$ se tiene que $(B(\vec{p}; r) \setminus \{\vec{p}\}) \cap S = \emptyset$. Por lo segundo, ocurre que $(B(\vec{p}; r) \setminus \{\vec{p}\}) \cap S \neq \emptyset$. Contradicción. Por tanto, $\operatorname{Ais} S \cap S' = \emptyset$; o sea, ningún punto de $\mathbb{R}^n$ puede ser, simultáneamente, punto aislado de S y punto de acumulación de S. ■

Equivalencia entre nulirreflexividad[1] y asimetría para relaciones transitivas

Ejemplo 2.2.17. Sean S un conjunto y $\prec$ una relación en S. Supongamos que $\prec$ es transitiva, es decir, que verifica la propiedad siguiente:
Transitividad. Para cualesquier $x, y, z \in S$,

$$\text{si} \quad x \prec y \quad \text{y} \quad y \prec z, \quad \text{entonces} \quad x \prec z.$$

Con esto, probar que las siguientes propiedades en $\prec$ son equivalentes:
Sean $a, b \in S$ cualesquier.

1. **Nulirreflexividad.** $a \not\prec a$.
2. **Asimetría.** Si $a \prec b$, entonces $b \not\prec a$.

[1] Utilizamos la palabra "nulirreflexiva" como abreviatura para la frase "nunca reflexiva."

Demostración. Sean $x, y, z \in S$ y supongamos que $\prec$ es transitiva; esto es,

$$\text{si} \quad x \prec y \quad \text{y} \quad y \prec z, \quad \text{entonces} \quad x \prec z.$$

((1)$\Longrightarrow$(2)) Supongamos que $\prec$ es nulirreflexiva. Supongamos ahora, por contradicción, que para ciertos $a, b \in S$ se tiene al mismo tiempo que

$$a \prec b \quad \text{y} \quad b \prec a.$$

Por transitividad sobre estas asociaciones obtenemos

$$a \prec a.$$

Ahora bien, como $\prec$ es nulirreflexiva, en particular para a se tiene que $a \not\prec a$; lo cual contradice lo anterior. Luego, si $a \prec b$, entonces $b \not\prec a$; es decir, $\prec$ es asimétrica.
((2)$\Longrightarrow$(1)) Supongamos que $\prec$ es asimétrica. Supongamos ahora, por contradicción, que $\prec$ no es nulirreflexiva; o sea, que en particular para $a \in S$ se podría tener que

$$a \prec a.$$

Tomando $b = a$ y sustituyendo en el lado derecho de la asociación anterior obtenemos

$$a \prec b.$$

Por la asimetría de $\prec$ conseguimos

$$b \not\prec a.$$

Restituyendo a en vez de b en el lado izquierdo, tenemos que

$$a \not\prec a,$$

lo cual es una contradicción, ya que $a \prec a$. Por tanto, para todo $a \in S$ se tiene que $a \not\prec a$; es decir, $\prec$ es nulirreflexiva. ■

Cota superior

Definición 2.2.18. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $S \subset \mathbb{R}$. Se dice que α es una *cota superior de* S si, para todo $x \in S$, se cumple que $x \leq \alpha$. Si S tiene una cota superior se dice que S está *acotado superiormente*.

Supremo

Definición 2.2.19. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $S \subset \mathbb{R}$. Se dice que α es un *supremo* o *mínima cota superior de* S, lo cual se denota por $\operatorname{Sup} S$, si las dos condiciones siguientes se cumplen para α:

1. **Cota superior.** α es una cota superior de S.
2. **Minimalidad.** Si β es otra cota superior de S, entonces $\alpha \leq \beta$.

Unicidad del supremo

Ejemplo 2.2.20. Sea $S \subset \mathbb{R}$. Probar que el supremo de S, si existe, es único.

Demostración. Supongamos que α es supremo de S; esto significa, de acuerdo a la definición de supremo, que α es cota superior de S y que, si x es otra cota superior de S, entonces $\alpha \leq x$. Supongamos ahora, por contradicción, que este supremo de S no es único; esto es, que existe $\beta \in \mathbb{R}$, con $\beta \neq \alpha$, tal que β es también supremo de S. Ahora bien, como α es supremo de S y β es otra cota superior de S, por la minimalidad de α se tiene que $\alpha \leq \beta$. Por otra parte, como asimismo β es supremo de S y α es otra cota superior de S, por la misma razón se concluye que $\beta \leq \alpha$. En resumen, $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha$; por lo que $\alpha = \beta$. Contradicción, ya que $\alpha \neq \beta$. Por tanto, el supremo de S, si existe, es único. ■

Axioma del supremo

Axioma 2.2.21. Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.

Propiedad arquimediana de los números reales

Ejemplo 2.2.22. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ y $b > 0$. Probar que existe un entero positivo n tal que $b < na$.

Demostración. Sea S el conjunto de múltiplos enteros y positivos de a; es decir,

$$S = \left\{ na : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}.$$

Supongamos ahora, por contradicción, que para todo entero positivo n se cumple que $na \leq b$. Luego, b es cota superior de S. Además, S es no vacío ya que $a = 1a \in S$. Esto es, S es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente. Por el axioma del supremo, existe $\beta = \operatorname{Sup} S$. Ahora bien, como $a > 0$, tenemos que $\beta - a < \beta$. Así, $\beta - a$ no puede ser cota superior de S, ya que es menor que la mínima cota superior; por lo que existe un entero positivo m tal que $\beta - a < ma$. Pero entonces $\beta < ma + a$. O sea, $\beta < (m+1)\,a$. Pero $(m+1)\,a \in S$, y al ser β cota superior de S se debería tener que $(m+1)\,a \leq \beta$. Contradicción. Por tanto, existe un entero positivo n tal que $b < na$. ■

Cubierta de un conjunto

Definición 2.2.23. Sean: $S \subset \mathbb{R}$, I un conjunto no vacío de índices, $J_\alpha \subset \mathbb{R}$, para todo $\alpha \in I$, y $\mathcal{J} = \{J_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Se dice que $\mathcal{J}$ es una *cubierta de* S si

$$S \subset \bigcup_{\alpha \in I} J_\alpha.$$

En este caso, se dice que $\mathcal{J}$ *cubre a* S.

Teorema de Heine-Borel

Ejemplo 2.2.24. Sean: $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$, I un conjunto no vacío de índices y $\mathcal{J} = \{J_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta de intervalos abiertos para $[a; b]$. Probar que existe una subcolección finita de $\mathcal{J}$ que también cubre $[a; b]$.

Demostración. Sea R el subconjunto de $[a; b]$ formado por los elementos $x \in [a; b]$ tales que el intervalo $[a; x]$ se puede cubrir con una subcolección finita de elementos de $\mathcal{J}$. Con respecto a R, tenemos los dos hechos siguientes.
1. (No vacuidad) Dado que $a \in [a; b]$, existe un elemento de $\mathcal{J}$, digamos J_a, tal que $a \in J_a$. Como además $[a; a] = \{a\}$, ocurre que $[a; a] \subset J_a$, y este solo elemento J_a forma una subcolección finita de $\mathcal{J}$. Luego, $a \in R$; por lo que $R \neq \emptyset$.
2. (Acotación superior) Dado que $R \subset [a; b]$, tenemos que R es un conjunto acotado superiormente por b.
Luego, R es no vacío y está acotado superiormente. Por el axioma del supremo, existe $c = \operatorname{Sup} R$. En adición, dado que $a \in R$, que c es la mínima cota superior de R y que b es cota superior de R, tenemos que $a \leq c \leq b$; es decir, $c \in [a; b]$. El objetivo inmediato es probar que $c = b$. Para lograr esto supongamos, por contradicción, que $c < b$; por lo que ahora $c \in [a; b)$. Pero como $c \in [a; b]$ y $\mathcal{J}$ es una cubierta de $[a; b]$, existe $J_c \in \mathcal{J}$ tal que $c \in J_c$. Dado que J_c es un intervalo abierto y que c es el supremo de R, existen $x_1, x_2 \in [a; b)$ tales que

$$x_1 \in R, \quad x_1, x_2 \in J_c \quad \text{y, además,} \quad x_1 \leq c < x_2.$$

Ahora bien, como $x_1 \in R$, existen, un entero positivo n, índices $k_1, \ldots, k_n \in I$ y $J_{k_1}, \ldots, J_{k_n} \in \mathcal{J}$, tales que

$$[a; x_1] \subset J_{k_1} \cup \ldots \cup J_{k_n}.$$

Adicionalmente,

$$[x_1; x_2] \subset J_c.$$

De donde

$$[a; x_2] = [a; x_1] \cup [x_1; x_2] \subset J_{k_1} \cup \ldots \cup J_{k_n} \cup J_c.$$

En otras palabras, la subcolección finita de $\mathcal{J}$ dada por $\{J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}, J_c\}$ cubre a $[a; x_2]$; por lo que $x_2 \in R$. Dado que c es el supremo de R, al respecto de x_2 se debe cumplir que $x_2 \leq c$. Contradicción, ya que $c < x_2$.

Por tanto, $c = b$. Rescatando los papeles de x_1 y J_c, obtenemos que la subcolección finita de $\mathcal{J}$ dada por $\{J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}, J_c\}$ cubre a $[a; c] = [a; b]$. Por lo que el Teorema de Heine-Borel está demostrado. ■

Intersecciones infinitas

Ejemplo 2.2.25. Probar que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0; \frac{1}{n}\right) = \emptyset.$$

Demostración. Supongamos, por contradicción, que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0; \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset.$$

Luego, existe

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0; \frac{1}{n}\right).$$

Por la definición de intersección, $x \in (0; 1/n)$, para todo entero positivo n. En otras palabras, $0 < x < 1/n$, para todo entero positivo n. Ahora bien, por la propiedad arquimediana de los números reales (ver Ejemplo 2.2.22), tenemos que existe un entero positivo N tal que $1 < Nx$; es decir, que *existe* un entero positivo N tal que $1/N < x$. Contradicción, ya que, para todo entero positivo n, ocurre que $x < 1/n$. Por tanto,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0; \frac{1}{n}\right) = \emptyset.$$

■

Ejemplo 2.2.26. Sean: n un entero positivo, X un conjunto infinito, $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ una sucesión de elementos de X y $B_n = \{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$. Probar que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset.$$

Demostración. Para empezar, nótese que $B_n \subset A$ y $B_{n+1} \subset B_n$, para todo entero positivo n y que, sin embargo, $B_n \neq B_{n+1}$, ya que $a_n \in B_n$, pero $a_n \notin B_{n+1}$, para todo entero positivo n. Supongamos, por contradicción, que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset.$$

Luego, existe

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Así $x \in B_n$, para todo entero positivo n. En particular, dado que $x \in B_n \subset A$, existe un entero positivo m tal que $x = a_m$. Pero entonces, $x = a_m \in B_m$, y, no obstante, $x = a_m \notin B_{m+1}$. Contradicción, ya que se suponía que $x \in B_n$, para todo entero positivo n. Por tanto,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset.$$

■

2.3. Ejercicios

I. Utilizar Reducción al Absurdo para demostrar que las funciones siguientes no son suprayectivas:

1. $f(x) = 5x^2 + 1$; $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
2. $g(x) = \dfrac{1}{2x-7}$; $g : \mathbb{R} \setminus \{7/2\} \longrightarrow \mathbb{R}$.
3. $h(x) = 3$; $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
4. $j(x) = (4x-9)^2 + 6$; $j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
5. $k(x) = |x|$; $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

6. $F(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $F : [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

7. $G(x) = \dfrac{8}{x^3 + 1}$; $G : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

8. $H(x) = \dfrac{-10x + 7}{5x - 2}$; $H : \mathbb{R} \setminus \{2/5\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

9. $J(x) = x^2 - 6x + 11$; $J : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

10. $K(x) = \dfrac{9 + \sqrt[3]{\left(\dfrac{21x + 6}{7x - 5}\right)^5 + 2}}{4}$; $K : \mathbb{R} \setminus \{5/7\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

II. Probar que el polinomio real $x^3 + x + 1$ no tiene raíces en los números racionales.
III. Sea $\mathbb{N}$ el *conjunto de los números enteros positivos*. Probar que si $b \in (1; +\infty)$, entonces el conjunto $A_b = \{b^n : n \in \mathbb{N}\}$ no está acotado.
IV. Sean $\mathbb{Z}$ el *conjunto de los números enteros* y $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Probar que si a no divide a bc, entonces a no divide a b.
V. Denotemos por $\mathbb{Q}$ al *conjunto de los números racionales*; con lo cual la diferencia relativa $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ representará al *conjunto de números irracionales*. Ahora, sean $x \in \mathbb{Q}$ y $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Probar que $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. Si $x \neq 0$, probar que $x/y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Respuestas a los ejercicios I
Advertencia: Las siguientes respuestas son solamente *sugerencias* para seleccionar el número b de cada ejercicio.

1. Tómese cualquier $b < 1$.

2. Tómese $b = 0$.

3. Tómese cualquier $b \neq 3$.

4. Tómese cualquier $b < 6$.

5. Tómese cualquier $b < 0$.

6. Tómese, o bien $b < 0$, o bien $b > 1$.

7. Tómese $b = 0$.

8. Tómese $b = -2$.

9. Tómese cualquier $b < 2$.

10. Tómese $b = \left(9 + \sqrt[3]{3^5 + 2}\right)/4$.

Capítulo 3

MÉTODO ANALÍTICO

3.1. Introducción

3.1.1. Presentación del método

En el contexto matemático, Análisis y Síntesis no siempre han tenido el significado que actualmente se les asigna. En sus orígenes (ver [17]), se referían a operaciones aritméticas; Síntesis significaba adición, mientras que Análisis significaba reducción, pasar de una unidad a otra inferior; aún más, su aplicación era puramente material. En este sentido el Análisis siempre presupone una Síntesis. El otro significado se refiere a modos de demostración o de invención, y en este caso es la Síntesis la que requiere de un Análisis previo. Es notorio que el Análisis no tiene la misma etimología en el sentido lógico que en el sentido de operación aritmética. Hacemos énfasis en los vocablos "análisis" y "síntesis", porque el Método Analítico, que es patrón de demostración, está compuesto por dos partes llamadas, precísamente, Análisis y Síntesis, aunque en la antigüedad no se les asignó ningún nombre. Según se dice, Platón de Atenas (427-347 a.C.) fue el inventor del método y en los textos más avanzados de la matemática griega se encuentran trazos de éste, como en los tratados de Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.) sobre la cuadratura de la parábola, en el "Tratado de las Cónicas" de Apolonio de Pérgamo (262-180 a.C.), en los "Elementos" cuyo autor fue Euclides y en la "Colección Matemática de Pappus", otro matemático griego (hacia el año 300 d.C.).

Los griegos encontraron un procedimiento heurístico, que todavía constituye un patrón estándar de la lógica del descubrimiento (ver [13]). La regla es:

Saca conclusiones de tu conjetura, una tras otra, suponiendo que la conjetura es verdadera. Si llegas a una conclusión indubitablemente verdadera, tu conjetura quizá haya sido verdadera. En este caso, invierte el proceso, trabaja hacia atrás, e intenta deducir tu conjetura original por el camino inverso, desde la verdad indudable hasta la conjetura dudosa. Si tienes éxito, habrás probado tu conjetura.

La primera parte es el Análisis y la segunda parte corresponde a la Síntesis. Este método refuta o acepta el valor de verdad de la proposición; sin embargo, no la corrige, éste es un defecto que posee el método como herramienta para el descubrimiento.

En la época del Renacimiento las Matemáticas fueron favorecidas; en ese tiempo vivió un matemático llamado Francois Vieta (1540-1603), padre de la Matemática Moderna y además inventor del Álgebra Simbólica, quien sostuvo que los griegos legaron de mala gana el arte inventivo y que, además, usaban dos tipos de Análisis: el *Porístico* y el *Zetético* (ver [17]). El Análisis Porístico consiste en probar la validez de un teorema propuesto. El Análisis Zetético es el arte de poner en ecuaciones las proposiciones. Vieta inventó otro tipo de Análisis, llamado por él *Exegético*, que es el método para calcular el valor del término desconocido en una ecuación. Es hasta la época de Vieta que se reconoce que el Método Analítico se constituye de dos partes, el Análisis y la Síntesis. Posteriormente, René Descartes (1596-1650), al igual que Vieta, encontró certeza en los geómetras, pero no cómo conseguirla; esto confirmó la sospecha de que en la antigüedad los geómetras habían conocido un cierto tipo de matemáticas, y en los escritos de Pappus y Diofanto encontró ciertos trazos de esa verdadera matemática. En particular, el circuito de Pappus se representa como sigue (ver [13]):

Figura 1

Circuito de Pappus

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} & & \text{deducción} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \text{hipótesis} & & & & \text{axioma} \\ & \nwarrow & & \swarrow & \\ & & \text{deducción} & & \end{array}}$$

El Método Analítico es muy útil; pero en los cursos elementales de Matemáticas no se detalla, aún cuando su uso es frecuente. Es por esto que daremos la regla para aplicar el Método Analítico, no sin antes decir que todas las proposiciones en las que usaremos el Método Analítico tendrán la forma de una proposición condicional. Recordemos que, en una proposición condicional, el enunciado que está al principio constituye la *hipótesis*, en tanto que el que está al final de la condicional se denomina la *conclusión*.

Regla 3.1.1. En la parte del Análisis se supone verdadera la conclusión, y por medio de equivalencias o implicaciones reversas se alcanza una verdad conocida o el valor de una variable, tomando en cuenta que, si se usan las implicaciones, éstas deben demostrarse previamente. Obtenido el Análisis se procede con la Síntesis; ésta consiste en asignar el valor de verdad verdadero a las hipótesis y, por medio de las construcciones conseguidas en el Análisis, se logra llegar a la conclusión. Esto comprueba la validez del teorema propuesto.

3.1.2. Estructura del método

En resumen, la estructura del Método Análitico es la siguiente:

Se desea probar la proposición condicional "si p entonces q."

(Análisis) Se supone, para cuestiones de Análisis, que q es verdadera y, por medio de equivalencias o implicaciones reversas, se intenta alcanzar una verdad conocida o determinar el valor de una variable.

(Síntesis) Se supone que p es verdadera y, utilizando ya sea la verdad establecida o el valor encontrado para la variable (conseguido alguno de éstos al final de la etapa de Análisis), junto con las equivalencias o implicaciones también construidas previamente, se logra probar q.

Se concluye afirmando la veracidad del teorema.

3.1.3. Sugerencias para su uso

Es de uso frecuente en proposiciones de la forma "para todo ..., existe x ... tal que ..." En el Análisis, se supone que el elemento x existe y se lo construye explícitamente. En la etapa de Síntesis, se toma el objeto x construido y se verifica que satisface las condiciones impuestas.

3.2. Ejemplos

Con el método analítico se puede demostrar la suprayectividad de una función. Para esto, recordamos la definición correspondiente provista en el capítulo anterior.

Función suprayectiva

Definición 3.2.1. Sean A y B dos conjuntos. Una función $f : A \longrightarrow B$ se llama *suprayectiva*, *sobreyectiva* o *sobre*, si $B = f(A)$; es decir, si para todo $b \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = b$.

En la práctica para demostrar la suprayectividad se parte de la igualdad $f(x) = b$, en la cual b está "despejado" en términos de x y, por medio de operaciones inversas, se efectúa el "despeje" contrario; esto es, el de x en términos de b.

Ejemplo 3.2.2. Probar que la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \frac{\sqrt[5]{\dfrac{x^9}{8} - 7}}{6} + 4$$

es suprayectiva.

Demostración. Usaremos el Método Analítico.
(Análisis) Supongamos, para cuestiones de análisis, que la función h es suprayectiva; es decir, que para todo $b \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$h(x) = b.$$

Procedamos a encontrar este x. Sustituyendo $h(x)$ tenemos que

$$\frac{\sqrt[5]{\dfrac{x^9}{8} - 7}}{6} + 4 = b.$$

Despejemos ahora x en términos de b.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[5]{\dfrac{x^9}{8} - 7}}{6} &= b - 4. \\
\sqrt[5]{\frac{x^9}{8} - 7} &= 6(b-4). \\
\left(\sqrt[5]{\frac{x^9}{8} - 7}\right)^5 &= (6(b-4))^5. \\
\frac{x^9}{8} - 7 &= (6(b-4))^5. \\
\frac{x^9}{8} &= (6(b-4))^5 + 7. \\
x^9 &= 8\left((6(b-4))^5 + 7\right). \\
\sqrt[9]{x^9} &= \sqrt[9]{8\left((6(b-4))^5 + 7\right)}. \\
x &= \sqrt[9]{8\left((6(b-4))^5 + 7\right)}.
\end{aligned}$$

(Síntesis) Comprobemos que efectivamente éste es el valor requerido para x. Dado $h(x)$, sustituyamos primeramente x,

$$h(x) = h\left(\sqrt[9]{8\left((6(b-4))^5 + 7\right)}\right).$$

Sustituyamos ahora h y procedamos, a continuación, a simplificar.

$$\begin{aligned}
h\left(\sqrt[9]{8\left((6(b-4))^5 + 7\right)}\right) &= \frac{\sqrt[5]{\dfrac{\left(\sqrt[9]{8\left((6(b-4))^5 + 7\right)}\right)^9}{8} - 7}}{6} + 4 = \frac{\sqrt[5]{\dfrac{8\left((6(b-4))^5 + 7\right)}{8} - 7}}{6} + 4 \\
&= \frac{\sqrt[5]{(6(b-4))^5 + 7 - 7}}{6} + 4 = \frac{\sqrt[5]{(6(b-4))^5}}{6} + 4 = \frac{6(b-4)}{6} + 4 = b - 4 + 4 \\
&= b.
\end{aligned}$$

Por tanto, h es suprayectiva. ■

Ejemplo 3.2.3. Probar que la función $j : (-\infty; -1/8) \cup (-1/8; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$j(x) = \frac{-64x^2 + 80x + 21}{8x + 1}$$

es suprayectiva.

Demostración. Usaremos el Método Analítico.
(Análisis) Supongamos, para cuestiones de análisis, que la función j es suprayectiva; es decir, que para todo $b \in \mathbb{R}$, existe $x \in (-\infty; -1/8) \cup (-1/8; +\infty)$ tal que

$$j(x) = b.$$

Procedamos a encontrar este x. Sustituyendo $j(x)$ tenemos que

$$\frac{-64x^2 + 80x + 21}{8x + 1} = b.$$

Ahora, nos conviene expresar el numerador como un polinomio cuadrático del denominador. Lo llevamos a cabo utilizando el algoritmo de división sintética repetida de Horner.

A continuación efectuamos la división. Si $8x + 1 = 0$, entonces $x = -1/8$. Dividamos.

$$\begin{array}{r|rrr}
-\frac{1}{8} & -64 & 80 & 21 \\
 & & +8 & -11 \\
\hline
 & -64 & 88 & \multicolumn{1}{|r}{10} \\
 & & +8 & \\
\hline
 & -64 & \multicolumn{1}{|r}{96} &
\end{array}$$

Luego, $-64x^2 + 80x + 21 = -64(x + 1/8)^2 + 96(x + 1/8) + 10$. Sustituyendo el numerador obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{-64\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 + 96\left(x + \frac{1}{8}\right) + 10}{8x + 1} &= b. \\
\frac{-64\left(\frac{8x+1}{8}\right)^2 + 96\left(\frac{8x+1}{8}\right) + 10}{8x + 1} &= b. \\
\frac{-\frac{64}{64}(8x+1)^2 + \frac{96}{8}(8x+1) + 10}{8x + 1} &= b. \\
\frac{-(8x+1)^2 + 12(8x+1) + 10}{8x + 1} &= b. \\
-(8x+1)^2 + 12(8x+1) + 10 &= b(8x+1). \\
-(8x+1)^2 + 12(8x+1) - b(8x+1) + 10 &= 0. \\
-(8x+1)^2 + (12 - b)(8x+1) + 10 &= 0.
\end{aligned}$$

Ésta es una ecuación cuadrátrica en $8x+1$, la cual puede resolverse usando la fórmula general.

$$\begin{aligned}
8x+1 &= \frac{-(12-b) \pm \sqrt{(12-b)^2 - 4(-1)(10)}}{2(-1)}.\\
8x+1 &= \frac{-12+b \pm \sqrt{(12-b)^2+40}}{-2}.\\
8x &= \frac{-12+b \pm \sqrt{(12-b)^2+40}}{-2} - 1.\\
8x &= \frac{-12+b \pm \sqrt{(12-b)^2+40}+2}{-2}.\\
x &= \frac{b-10 \pm \sqrt{(12-b)^2+40}}{8(-2)}.\\
x &= \frac{b-10 \pm \sqrt{(12-b)^2+40}}{-16}.
\end{aligned}$$

Como el interior del radical, $(12-b)^2+40$, es no negativo sea cual sea el valor de b, siempre puede garantizarse la existencia de la preimagen x; es decir, $x \in \mathbb{R}$. No obstante lo anterior, todavía falta por probar que, sin importar qué signo se tome para la raíz cuadrada, el elemento correspondiente x *jamás* puede ser igual a $-1/8$. A este fin, damos a continuación la demostración correspondiente empleando reducción al absurdo.

Supongamos, por contradicción, que

$$x = -\frac{1}{8}.$$

Sustituyendo la expresión para x obtenemos

$$\frac{b-10 \pm \sqrt{(12-b)^2+40}}{-16} = -\frac{1}{8}.$$

Manipulando algebraicamente la ecuación anterior, conseguimos la siguiente cadena de igualdades;

$$\begin{aligned}
b-10 \pm \sqrt{(12-b)^2+40} &= -\frac{-16}{8}.\\
b-10 \pm \sqrt{(12-b)^2+40} &= 2.\\
\pm\sqrt{(12-b)^2+40} &= 2-b+10.\\
\pm\sqrt{(12-b)^2+40} &= 12-b.\\
\left[\pm\sqrt{(12-b)^2+40}\right]^2 &= (12-b)^2.\\
(12-b)^2+40 &= (12-b)^2.\\
40 &= 0.
\end{aligned}$$

Contradicción. De donde $x \neq -1/8$.

En conclusión, hemos encontrado para la función j y la imagen b una preimagen $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq -1/8$; esto es, $x \in (-\infty; -1/8) \cup (-1/8; +\infty)$; razón por la cual termina el análisis.

(Síntesis) Sea $b \in \mathbb{R}$. Existe

$$x = \frac{b-10 \pm \sqrt{(12-b)^2+40}}{-16} \in \left(-\infty; -\frac{1}{8}\right) \cup \left(-\frac{1}{8}; +\infty\right)$$

tal que

$\Longrightarrow$
$$x = \frac{b - 10 \pm \sqrt{(12-b)^2 + 40}}{8(-2)}.$$
$\Longrightarrow$
$$8x = \frac{-12 + b \pm \sqrt{(12-b)^2 + 40} + 2}{-2}.$$
$\Longrightarrow$
$$8x = \frac{-12 + b \pm \sqrt{(12-b)^2 + 40}}{-2} - 1.$$
$\Longrightarrow$
$$8x + 1 = \frac{-12 + b \pm \sqrt{(12-b)^2 + 40}}{-2}.$$
$\Longrightarrow$
$$8x + 1 = \frac{-(12-b) \pm \sqrt{(12-b)^2 - 4(-1)(10)}}{2(-1)}.$$
Lo anterior nos dice que $8x+1$ es solución de la siguiente ecuación cuadrática,
$\Longrightarrow$
$$-(8x+1)^2 + (12-b)(8x+1) + 10 = 0.$$
$\Longrightarrow$
$$-(8x+1)^2 + 12(8x+1) - b(8x+1) + 10 = 0.$$
$\Longrightarrow$
$$-(8x+1)^2 + 12(8x+1) + 10 = b(8x+1).$$
$\Longrightarrow$
$$\frac{-(8x+1)^2 + 12(8x+1) + 10}{8x+1} = b.$$
Simplificando el numerador obtenemos
$\Longrightarrow$
$$\frac{-64x^2 + 80x + 21}{8x+1} = b.$$
Es decir,
$\Longrightarrow$
$$j(x) = b.$$
En resumen, para todo $b \in \mathbb{R}$, existe $x \in (-\infty; -1/8) \cup (-1/8; +\infty)$ tal que $j(x) = b$. Por tanto, j es suprayectiva. ■

Desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética para dos números positivos

Ejemplo 3.2.4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ y $b > 0$. Probar que $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$.

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ y $b > 0$. Usaremos el Método Analítico.
(**Análisis**) Supongamos, para cuestiones de análisis, que ya hemos demostrado la desigualdad
$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$
Usaremos equivalencias. Elevando al cuadrado ambos lados obtenemos
$\Longleftrightarrow$
$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$
$\Longleftrightarrow$
$$ab \leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}.$$
Multiplicando por 4 ambos miembros conseguimos

$\iff$

$$4ab \leq a^2 + 2ab + b^2.$$

Pasando el lado izquierdo restando al lado derecho tenemos que
$\iff$

$$0 \leq a^2 + 2ab + b^2 - 4ab.$$

$\iff$

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2.$$

Expresando el trinomio cuadrado perfecto como binomio al cuadrado obtenemos
$\iff$

$$0 \leq (a-b)^2.$$

Dado que esta desigualdad es evidente, damos por terminada la etapa de análisis.
(Síntesis) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ y $b > 0$. Tenemos que $a - b \in \mathbb{R}$ y que, por ello,

$$0 \leq (a-b)^2.$$

Desarrollando el binomio al cuadrado obtenemos

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2.$$

Sumando $4ab$ en ambos lados de la desigualdad conseguimos

$$\begin{aligned} 0 + 4ab &\leq a^2 - 2ab + b^2 + 4ab. \\ 4ab &\leq a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned}$$

Expresando el trinomio cuadrado perfecto del lado derecho como binomio al cuadrado tenemos que

$$4ab \leq (a+b)^2.$$

Dividiendo entre 4 ambos miembros de la desigualdad obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{4ab}{4} &\leq \frac{(a+b)^2}{4}. \\ ab &\leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Extrayendo raíces cuadradas de ambos lados de la desigualdad y recordando que tanto a como b son *positivos* conseguimos

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} &\leq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}. \\ \sqrt{ab} &\leq \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$. ■

Para los siguientes ejemplos referentes a límites de funciones reales de variable real, consúltese la definición respectiva dada en el primer capítulo.

Método para encontrar δ en términos de ε en pruebas de límites de funciones reales de variable real

En los ejemplos concretos, para construir δ a partir de ε se usa el Método Analítico. En este caso particular, en el Análisis vamos a partir de la inecuación que se desea obtener y que es $|f(x) - L| < \varepsilon$ y, por medio de operaciones reversibles en desigualdades (equivalencias), vamos a intentar llegar a $|x - a| < R(\varepsilon)$, donde $R(\varepsilon)$ es una función de ε que nos proveerá de δ. Finalmente, en la parte de la Síntesis, se tomará $\delta = R(\varepsilon)$ en conjunción con la hipótesis $0 < |x - a| < \delta$ y, usando las equivalencias obtenidas durante el Análisis, se arribará a la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Existencia de límite por definición

Ejemplo 3.2.5. Utilizar la definición de límite (ε y δ) para probar que

$$\lim_{x\longrightarrow -3}\left(2x^3+13x^2+17x-11\right)=1.$$

Demostración. Usaremos el Método Analítico.
(Análisis) Supongamos, para cuestiones de análisis, que ya hemos demostrado que

$$\lim_{x\longrightarrow -3}\left(2x^3+13x^2+17x-11\right)=1.$$

Es decir, que dado $\varepsilon>0$, hemos podido encontrar $\delta>0$ tal que,

$$\text{si}\quad 0<|x-(-3)|<\delta,\quad \text{entonces}\quad \left|\left(2x^3+13x^2+17x-11\right)-1\right|<\varepsilon.$$

Para encontrar δ, vamos a desarrollar hacia "arriba" el lado izquierdo de la desigualdad del consecuente de la condicional anterior, el cual es $\left|\left(2x^3+13x^2+17x-11\right)-1\right|$, usando la desigualdad triangular, con el fin de alcanzar ε. Para empezar, hay que factorizar

$$\left(2x^3+13x^2+17x-11\right)-1=2x^3+13x^2+17x-12.$$

Como de antemano sabemos que $x-(-3)=x+3$ tiene que ser un factor para $2x^3+13x^2+17x-12$, podemos hacer un paréntesis para factorizar usando división. Sin embargo, haremos mucho más que esto. Nos conviene aún más poner el polinomio anterior como un polinomio homogéneo en $x+3$, ya que esto permitirá no sólo la factorización inmediata de este binomio sino, incluso, que el factor restante, que quedará como coeficiente polinomial de $x+3$, sea a su vez un polinomio en él. Esta "homogenización" puede lograrse, por ejemplo, utilizando el algoritmo de división sintética repetida de Horner.

Hacemos, pues, un paréntesis para efectuar la división. Si $x+3=0$, entonces $x=-3$. Dividamos.

$$\begin{array}{r|rrrr}
-3 & 2 & 13 & 17 & -12\\
 & & -6 & -21 & +12\\
\hline
 & 2 & 7 & -4 & 0\\
 & & -6 & -3 & \\
\hline
 & 2 & 1 & -7 & \\
 & & -6 & & \\
\hline
 & 2 & -5 & &
\end{array}$$

Luego,

$$2x^3+13x^2+17x-12=2\left(x+3\right)^3-5\left(x+3\right)^2-7\left(x+3\right)=\left[2\left(x+3\right)^2-5\left(x+3\right)-7\right]\left(x+3\right).$$

Sustituyendo en el valor absoluto obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|2x^3+13x^2+17x-12\right| &= \left|\left[2\left(x+3\right)^2-5\left(x+3\right)-7\right]\left(x+3\right)\right|=\left|2\left(x+3\right)^2-5\left(x+3\right)-7\right|\left|x+3\right|\\
&\leq \left(|2|\left|x+3\right|^2+|-5|\left|x+3\right|+|-7|\right)\left|x+3\right|=\left(2\left|x+3\right|^2+5\left|x+3\right|+7\right)\left|x+3\right|.
\end{aligned}$$

En resumen,

$$\left|2x^3+13x^2+17x-12\right|\leq\left(2\left|x+3\right|^2+5\left|x+3\right|+7\right)\left|x+3\right|. \tag{3.1}$$

La estrategia ahora es la siguiente; si exigimos que $\delta\leq 1$, dado que $|x+3|<\delta$, podemos acotar numéricamente el coeficiente de $|x+3|$ y así poder continuar nuestro camino de acercarnos a ε. Luego, $|x+3|<\delta$ y $\delta\leq 1$ dan por transitividad

$$|x+3|<1.$$

Con esta cota, podemos proseguir desarrollando la desigualdad (3.1).

$$\begin{aligned}
\left|2x^3+13x^2+17x-12\right| &\leq \left(2\left|x+3\right|^2+5\left|x+3\right|+7\right)\left|x+3\right|<\left(2\left(1^2\right)+5\left(1\right)+7\right)\left|x+3\right|=14\left|x+3\right|\\
&< 14\delta\leq\varepsilon.
\end{aligned}$$

De donde podemos hacer $\delta \leq \varepsilon/14$. Recapitulando, δ tiene que cumplir las dos restricciones siguientes: $\delta \leq 1$ y $\delta \leq \varepsilon/14$. Por tanto, podemos tomar $\delta = \text{Mín}\,(1, \varepsilon/14)$. Aquí termina la etapa de análisis.
(Síntesis) Pasemos a efectuar la comprobación. Demos $\varepsilon > 0$. Existe $\delta = \text{Mín}\,(1, \varepsilon/14) > 0$ tal que,

$$\text{si} \quad 0 < |x - (-3)| < \delta = \text{Mín}\left(1, \frac{\varepsilon}{14}\right),$$

$\Longrightarrow$

$$0 < |x+3| < \delta, \quad \delta \leq 1 \quad \text{y} \quad \delta \leq \frac{\varepsilon}{14}.$$

$\Longrightarrow$

$$|x+3| < 1 \quad \text{y} \quad |x+3| < \frac{\varepsilon}{14}.$$

$\Longrightarrow$

$$2\,|x+3|^2 + 5\,|x+3| + 7 < 2\,(1)^2 + 5\,(1) + 7 \quad \text{y} \quad |x+3| < \frac{\varepsilon}{14}.$$

$\Longrightarrow$

$$2\,|x+3|^2 + 5\,|x+3| + 7 < 14 \quad \text{y} \quad |x+3| < \frac{\varepsilon}{14}.$$

$\Longrightarrow$

$$\Big(2\,|x+3|^2 + 5\,|x+3| + 7\Big)\,|x+3| < 14\,|x+3| \quad \text{y} \quad 14\,|x+3| < \varepsilon.$$

$\Longrightarrow$

$$\Big(2\,|x+3|^2 + 5\,|x+3| + 7\Big)\,|x+3| < \varepsilon.$$

$\Longrightarrow$

$$\left|2x^3 + 13x^2 + 17x - 12\right| \leq \Big(2\,|x+3|^2 + 5\,|x+3| + 7\Big)\,|x+3| < \varepsilon.$$

$\Longrightarrow$

$$\left|2x^3 + 13x^2 + 17x - 12\right| < \varepsilon.$$

$\Longrightarrow$

$$\left|\left(2x^3 + 13x^2 + 17x - 11\right) - 1\right| < \varepsilon.$$

En conclusión, si $0 < |x - (-3)| < \delta = \text{Mín}\,(1, \varepsilon/14)$, entonces $\left|\left(2x^3 + 13x^2 + 17x - 11\right) - 1\right| < \varepsilon$. Por tanto,

$$\lim_{x \longrightarrow -3} \left(2x^3 + 13x^2 + 17x - 11\right) = 1.$$

■

Preservación del límite bajo las operaciones elementales

Ejemplo 3.2.6. Sean: A un intervalo abierto no vacío, $a \in A$, f y g dos funciones reales de variable real con dominios respectivos $\mathcal{D}_f$ y $\mathcal{D}_g$, $A \setminus \{a\} \subset \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ y $L, M \in \mathbb{R}$. Probar que, si $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \longrightarrow a} g(x) = M$, se tiene lo siguiente:

1. **Suma.** $\lim\limits_{x \longrightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$.

2. **Producto.** $\lim\limits_{x \longrightarrow a} [f(x)\, g(x)] = LM$.

3. **División.** Si $M \neq 0$, entonces existe $r > 0$ tal que $g(x) \neq 0$, para todo $x \in ((a - r; a + r) \setminus \{a\}) \cap A$, y además

$$\lim_{x \longrightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L}{M}.$$

Demostración. Supongamos que $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \longrightarrow a} g(x) = M$.
1. En este inciso tenemos que probar que el límite de una suma es la suma de los límites. Usaremos el Método Analítico.
(Análisis) Supongamos, para cuestiones de análisis, que ya hemos demostrado que

$$\lim_{x \longrightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M.$$

Es decir, que dado $\varepsilon > 0$, hemos podido encontrar $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$,

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon.$$

Para encontrar δ, vamos a desarrollar hacia "arriba" el lado izquierdo de la desigualdad del consecuente de la condicional anterior, usando la desigualdad triangular y suponiendo válido el antecedente, con el fin de alcanzar ε. Procediendo,

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| = |[f(x) - L] + [g(x) - M]| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|.$$

En resumen,

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|. \tag{3.2}$$

Como $lím_{x \longrightarrow a}\, f(x) = L$ y $lím_{x \longrightarrow a}\, g(x) = M$, para una cierta aproximación por determinar, que podemos llamar $\beta > 0$, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que, con $x \in A$, y

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \beta,$$

y

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2, \quad \text{entonces} \quad |g(x) - M| < \beta.$$

Exigiendo que $\delta \leq \delta_1$ y $\delta \leq \delta_2$, podemos continuar con el desarrollo de la desigualdad (3.2).

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \beta + \beta = 2\beta = \varepsilon.$$

Luego, podemos tomar $\beta = \varepsilon/2$. A su vez, para que esta aproximación se cumpla, debemos asegurarnos de hacer $\delta = \text{Mín}(\delta_1, \delta_2)$. Aquí termina la etapa de análisis.

(Síntesis) Demos $\varepsilon > 0$. Como $lím_{x \longrightarrow a}\, f(x) = L$ y $lím_{x \longrightarrow a}\, g(x) = M$, tenemos que, para $\beta = \varepsilon/2 > 0$, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que, con $x \in A$, si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - L| < \beta$, y si $0 < |x - a| < \delta_2$, entonces $|g(x) - M| < \beta$. Luego, si $x \in A$, tomando $\delta = \text{Mín}(\delta_1, \delta_2)$ tenemos que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta = \text{Mín}(\delta_1, \delta_2),$$

$\Longrightarrow$

$$0 < |x - a| < \delta, \quad \delta \leq \delta_1 \quad \text{y} \quad \delta \leq \delta_2.$$

$\Longrightarrow$

$$0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{y} \quad 0 < |x - a| < \delta_2.$$

$\Longrightarrow$

$$|f(x) - L| < \beta \quad \text{y} \quad |g(x) - M| < \beta.$$

$\Longrightarrow$

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < 2\beta = \varepsilon.$$

Por tanto,

$$\underset{x \longrightarrow a}{lím}\, [f(x) + g(x)] = L + M.$$

2. Aquí tenemos que probar que el límite de un producto es igual al producto de los límites. Usaremos el Método Analítico.

(**Análisis**) Supongamos, para cuestiones de análisis, que ya hemos demostrado que

$$\underset{x \longrightarrow a}{lím}\, [f(x)\, g(x)] = LM.$$

Es decir, que dado $\varepsilon > 0$, hemos podido encontrar $\delta > 0$ tal que, si $x \in A$, y

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x)\, g(x) - LM| < \varepsilon.$$

Para encontrar δ, vamos a desarrollar hacia "arriba" el lado izquierdo de la desigualdad del consecuente de la condicional anterior, usando la desigualdad triangular, y suponiendo válido el antecedente, con el fin de alcanzar ε.

Para empezar, hacemos un paréntesis para poner el interior del valor absoluto, $f(x)g(x)-LM$, como un polinomio homogéneo en $f(x)-L$ y $g(x)-M$. A fin de conseguir esto, comencemos dividiendo dicha expresión entre $f(x)-L$.

$$\begin{array}{r|lll} & g(x) & & \\ \hline f(x)-L & f(x)g(x) & & -LM \\ & -f(x)g(x) & +Lg(x) & \\ \hline & & Lg(x) & -LM \end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned} f(x)g(x)-LM &= [f(x)-L]\,g(x)+Lg(x)-LM=[f(x)-L]\,([g(x)-M]+M)+L\,[g(x)-M] \\ &= [f(x)-L]\,[g(x)-M]+M\,[f(x)-L]+L\,[g(x)-M]\,. \end{aligned}$$

Con esto, podemos proceder a desarrollar el valor absoluto.

$$\begin{aligned} |f(x)g(x)-LM| &= |[f(x)-L]\,[g(x)-M]+M\,[f(x)-L]+L\,[g(x)-M]| \\ &\leq |f(x)-L|\,|g(x)-M|+|M|\,|f(x)-L|+|L|\,|g(x)-M|\,. \end{aligned}$$

En resumen,

$$|f(x)g(x)-LM|\leq|f(x)-L|\,|g(x)-M|+|M|\,|f(x)-L|+|L|\,|g(x)-M|\,. \tag{3.3}$$

Como $lím_{x\longrightarrow a}\ f(x)=L$ y $lím_{x\longrightarrow a}\ g(x)=M$, para una cierta aproximación por determinar, que podemos llamar $\beta>0$, existen $\delta_1>0$ y $\delta_2>0$ tales que, con $x\in A$, y

$$\text{si}\quad 0<|x-a|<\delta_1,\quad\text{entonces}\quad |f(x)-L|<\beta,$$

y

$$\text{si}\quad 0<|x-a|<\delta_2,\quad\text{entonces}\quad |g(x)-M|<\beta.$$

Exigiendo que $\delta\leq\delta_1$ y $\delta\leq\delta_2$, podemos continuar con el desarrollo de la desigualdad (3.3).

$$\begin{aligned} |f(x)g(x)-LM| &\leq |f(x)-L|\,[g(x)-M]+|M|\,|f(x)-L|+|L|\,|g(x)-M|<\beta\beta+|M|\,\beta+|L|\,\beta \\ &= \beta^2+(|L|+|M|)\,\beta=\varepsilon. \end{aligned}$$

Ahora, hay que resolver la siguiente ecuación cuadrática,

$$\begin{aligned} \beta^2+(|L|+|M|)\,\beta &= \varepsilon. \\ \beta^2+(|L|+|M|)\,\beta-\varepsilon &= 0. \end{aligned}$$

Sus raíces son

$$\beta=\frac{-(|L|+|M|)\pm\sqrt{(|L|+|M|)^2+4\varepsilon}}{2}.$$

Como $\beta>0$, descartamos la raíz negativa y tomamos

$$\beta=\frac{-(|L|+|M|)+\sqrt{(|L|+|M|)^2+4\varepsilon}}{2}.$$

A su vez, para que esta aproximación se cumpla, debemos asegurarnos de tomar $\delta=\text{Mín}\,(\delta_1,\delta_2)$. Aquí termina la etapa de análisis.

(Síntesis) Demos $\varepsilon>0$. Como $lím_{x\longrightarrow a}\ f(x)=L$ y $lím_{x\longrightarrow a}\ g(x)=M$, tenemos que, para

$$\beta=\frac{-(|L|+|M|)+\sqrt{(|L|+|M|)^2+4\varepsilon}}{2}>0,$$

existen $\delta_1>0$ y $\delta_2>0$ tales que, con $x\in A$, si $0<|x-a|<\delta_1$, entonces $|f(x)-L|<\beta$, y si $0<|x-a|<\delta_2$, entonces $|g(x)-M|<\beta$. Luego, si $x\in A$, tomando $\delta=\text{Mín}\,(\delta_1,\delta_2)$ tenemos que

$$\text{si}\quad 0<|x-a|<\delta=\text{Mín}\,(\delta_1,\delta_2)\,,$$

$\Longrightarrow$

$$0 < |x-a| < \delta, \quad \delta \leq \delta_1 \quad \text{y} \quad \delta \leq \delta_2.$$

$\Longrightarrow$

$$0 < |x-a| < \delta_1 \quad \text{y} \quad 0 < |x-a| < \delta_2.$$

$\Longrightarrow$

$$|f(x) - L| < \beta \quad \text{y} \quad |g(x) - M| < \beta.$$

$\Longrightarrow$

$$|f(x)\, g(x) - LM| \leq |f(x) - L|\, |g(x) - M| + |M|\, |f(x) - L| + |L|\, |g(x) - M| < \beta^2 + (|L| + |M|)\, \beta = \varepsilon.$$

Por tanto,

$$\underset{x \longrightarrow a}{lím} [f(x)\, g(x)] = LM.$$

3. En esta ocasión, tenemos que probar que el límite de un cociente es igual al cociente de los límites, si el denominador no tiende a cero en el límite. Usaremos el Método Analítico.
(Análisis) Supongamos, para cuestiones de análisis, que ya hemos demostrado que

$$\underset{x \longrightarrow a}{lím} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L}{M}.$$

Es decir, que dado $\varepsilon > 0$, hemos podido encontrar $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M}\right| < \varepsilon.$$

En la desigualdad anterior, al interior del valor absoluto, efectuemos la operación indicada, obteniéndose la equivalencia siguiente,
$\Longleftrightarrow$

$$\left|\frac{Mf(x) - Lg(x)}{Mg(x)}\right| < \varepsilon.$$

Ahora, siempre en el lado izquierdo de la relación, apliquemos el valor absoluto en numerador y denominador, consiguiéndose el equivalente que sigue,
$\Longleftrightarrow$

$$\frac{|Mf(x) - Lg(x)|}{|M|\, |g(x)|} < \varepsilon. \tag{3.4}$$

A continuación, para determinar δ, vamos a desarrollar hacia "arriba" el lado izquierdo de la desigualdad anterior, con el fin de alcanzar ε. Para empezar, hacemos un paréntesis para poner el interior del valor absoluto del numerador, $Mf(x) - Lg(x)$, como un polinomio homogéneo en $f(x) - L$ y $g(x) - M$.

$$Mf(x) - Lg(x) = Mf(x) - LM - Lg(x) + LM = M[f(x) - L] - L[g(x) - M].$$

Luego, sustituyendo en su valor absoluto, podemos ahora aplicar la desigualdad triangular y obtenemos

$$|Mf(x) - Lg(x)| = |M[f(x) - L] - L[g(x) - M]| \leq |M|\, |f(x) - L| + |L|\, |g(x) - M|.$$

O sea,

$$|Mf(x) - Lg(x)| \leq |M|\, |f(x) - L| + |L|\, |g(x) - M|.$$

Con esto, podemos ocuparnos del lado izquierdo de la desigualdad (3.4).

$$\frac{|Mf(x) - Lg(x)|}{|M|\, |g(x)|} \leq \frac{|M|\, |f(x) - L| + |L|\, |g(x) - M|}{|M|\, |g(x)|}. \tag{3.5}$$

Como $lím_{x \longrightarrow a}\, f(x) = L$ y $lím_{x \longrightarrow a}\, g(x) = M$, para una cierta aproximación por determinar, que podemos llamar $\beta > 0$, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que, para $x \in A$,

$$\text{si} \quad 0 < |x-a| < \delta_1, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \beta,$$

y

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2, \quad \text{entonces} \quad |g(x) - M| < \beta.$$

Con δ verificando al mismo tiempo $\delta \leq \delta_1$ y $\delta \leq \delta_2$, podemos continuar desarrollando la desigualdad (3.5).

$$\frac{|Mf(x) - Lg(x)|}{|M|\,|g(x)|} \leq \frac{|M|\,|f(x) - L| + |L|\,|g(x) - M|}{|M|\,|g(x)|} < \frac{|M|\,\beta + |L|\,\beta}{|M|\,|g(x)|} = \frac{(|L| + |M|)\,\beta}{|M|\,|g(x)|}.$$

Mejor aún, en forma abreviada,

$$\frac{|Mf(x) - Lg(x)|}{|M|\,|g(x)|} < \frac{(|L| + |M|)\,\beta}{|M|\,|g(x)|}. \tag{3.6}$$

Ahora, necesitamos acotar superiormente a $1/|g(x)|$. Para lograr esto, basta con acotar inferiormente a $|g(x)|$. Claramente, dicha cota inferior para $|g(x)|$ tenemos que obtenerla a partir de la información de que disponemos. En concreto, a partir de que $\textit{lím}_{x \longrightarrow a}\, g(x) = M$, con $M \neq 0$ (con lo que $|M| > 0$). Recordemos que, por definición, este límite significa que, dado $\xi > 0$, existe $\gamma > 0$ tal que, para $x \in A$,

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \gamma, \quad \text{entonces} \quad |g(x) - M| < \xi. \tag{3.7}$$

Para proseguir, tómense en cuenta los considerandos siguientes:

1. $|g(x) - M|$ es la distancia entre M y $g(x)$.
2. La distancia de M al cero es $|M|$, el cual es *positivo*.
3. Dado que $g(x)$ aparece en el denominador de (3.6), de ninguna manera puede permitirse que se haga cero.

De todo esto, una forma de garantizar el último considerando, consiste en acotar superiormente la distancia entre M y $g(x)$ (esta cota está representada por ξ en (3.7)), tomando como ξ algún número positivo *menor* que $|M|$. Para no ir muy lejos, sería suficiente con hacer $\xi = |M|/2 > 0$. Con esto, quedaría zanjada la cuestión. Así las cosas, el enunciado todavía ambiguo de límite representado por (3.7), quedaría firmemente establecido de la manera siguiente. Dado $|M|/2 > 0$, existe $\delta_3 > 0$ tal que, para $x \in A$,

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_3, \quad \text{entonces} \quad |g(x) - M| < \frac{|M|}{2}.$$

Ahora bien, si $x \in ((a - \delta_3; a + \delta_3) \setminus \{a\}) \cap A$, entonces

$$|M| = |M - g(x) + g(x)| \leq |M - g(x)| + |g(x)| < \frac{|M|}{2} + |g(x)|.$$

En resumen,

$$|M| < \frac{|M|}{2} + |g(x)|.$$

De donde

$$\begin{aligned} |M| - \frac{|M|}{2} &< |g(x)|. \\ \frac{|M|}{2} &< |g(x)|. \end{aligned}$$

En concreto, $g(x) \neq 0$, para todo $x \in ((a - \delta_3; a + \delta_3) \setminus \{a\}) \cap A$; de aquí que δ_3 sea el $r > 0$ que necesitábamos para garantizar que $g(x) \neq 0$. Además, tomando recíprocos conseguimos

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|}.$$

Con esta cota y la restricción $\delta \leq \delta_3$, podemos continuar con (3.6).

$$\frac{|Mf(x) - Lg(x)|}{|M|\,|g(x)|} < \frac{(|L| + |M|)\,\beta}{|M|\,|g(x)|} < \frac{2\,(|L| + |M|)\,\beta}{|M|^2} = \varepsilon.$$

Despejando β obtenemos

$$\beta = \frac{|M|^2 \varepsilon}{2\left(|L| + |M|\right)}.$$

A su vez, para que esta aproximación se cumpla, debemos asegurarnos de tomar $\delta = \text{Mín}\left(\delta_1, \delta_2, \delta_3\right)$. Aquí termina la etapa de análisis.
(Síntesis) Demos $\varepsilon > 0$. Como $lím_{x \longrightarrow a} \; f(x) = L$ y $lím_{x \longrightarrow a} \; g(x) = M$, tenemos que para $\beta = |M|^2 \varepsilon / \left[2\left(|L| + |M|\right)\right] > 0$, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que, para $x \in A$, si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - L| < \beta$, y si $0 < |x - a| < \delta_2$, entonces $|g(x) - M| < \beta$. Por otro lado, para $|M|/2 > 0$, existe $\delta_3 > 0$ tal que, si $0 < |x - a| < \delta_3$, entonces $|g(x) - M| < |M|/2$. Luego, si $x \in A$, tomando $\delta = \text{Mín}\left(\delta_1, \delta_2, \delta_3\right)$, tenemos que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta = \text{Mín}\left(\delta_1, \delta_2, \delta_3\right),$$

$\Longrightarrow$
$$0 < |x - a| < \delta, \quad \delta \leq \delta_1, \quad \delta \leq \delta_2 \quad \text{y} \quad \delta \leq \delta_3.$$

$\Longrightarrow$
$$0 < |x - a| < \delta_1, \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{y} \quad 0 < |x - a| < \delta_3.$$

$\Longrightarrow$
$$|f(x) - L| < \beta, \quad |g(x) - M| < \beta \quad \text{y} \quad |g(x) - M| < \frac{|M|}{2}.$$

$\Longrightarrow$
$$|f(x) - L| < \beta, \quad |g(x) - M| < \beta \quad \text{y} \quad \frac{|M|}{2} < |g(x)|.$$

$\Longrightarrow$
$$|f(x) - L| < \beta, \quad |g(x) - M| < \beta \quad \text{y} \quad \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|}.$$

$\Longrightarrow$
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M}\right| = \frac{|Mf(x) - Lg(x)|}{|M|\,|g(x)|} \leq \frac{|M|\,|f(x) - L| + |L|\,|g(x) - M|}{|M|\,|g(x)|} < \frac{2\left(|L| + |M|\right)\beta}{|M|^2} = \varepsilon.$$

Por tanto,

$$\underset{x \longrightarrow a}{lím} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L}{M}.$$

■

Para los siguientes ejemplos correspondientes a continuidad uniforme en funciones reales de variable real, favor de consultar la definición respectiva dada en el segundo capítulo.

Existencia de continuidad uniforme por definición

Ejemplo 3.2.7. Sea $F(x) = 2x + 5$, tal que $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Probar que F es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$.

Demostración. Usaremos el Método Analítico.
(Análisis) Supongamos, para cuestiones de análisis, que ya hemos demostrado que $F(x) = 2x + 5$ es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$. Es decir, que dado $\varepsilon > 0$, hemos podido encontrar $\delta > 0$ tal que, para cualesquier $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\text{si} \quad |x - y| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Para encontrar δ en términos de ε vamos a desarrollar hacia "arriba" el lado izquierdo de la desigualdad del consecuente de la condicional anterior, suponiendo válido su antecedente, con el fin de alcanzar ε. Procediendo,

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(y)| &= |2x + 5 - (2y + 5)| = |2x + 5 - 2y - 5| = |2x - 2y| = |2(x - y)| = |2|\,|x - y| = 2\,|x - y| \\
&< 2\delta = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Luego, podemos tomar $\delta = \varepsilon/2$. Aquí termina la etapa de análisis.
(Síntesis) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon/2 > 0$ tal que, para cualesquier $x, y \in \mathbb{R}$, si $|x - y| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(y)| &= |2x + 5 - (2y + 5)| = |2x + 5 - 2y - 5| = |2x - 2y| = |2(x - y)| = |2|\,|x - y| = 2\,|x - y| \\
&< 2\delta = 2\,\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto, F es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$. ■

Para el siguiente ejemplo referente a la continuidad de funciones reales de variable real, consúltese la definición respectiva dada en el primer capítulo.

Teorema de Continuidad Uniforme

Ejemplo 3.2.8. Probar que toda función real de variable real continua definida en un intervalo cerrado es uniformemente continua sobre dicho intervalo.

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, y $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Antes de pasar a la prueba propiamente dicha, aprovechando la continuidad de la función en el intervalo, veamos cómo es posible obtener recubrimientos finitos por intervalos abiertos del intervalo cerrado, generados aquellos a partir de una cierta aproximación en las imágenes.

Sean $u \in [a;b]$ y $\xi \in \mathbb{R}$, con $\xi > 0$. Dado que f es, en particular, continua en u, tenemos que para ξ, existe $\zeta(u, \xi) > 0$ tal que,

$$\text{si} \quad t \in [a;b] \quad \text{y} \quad \text{si} \quad |u - t| < \zeta(u, \xi), \quad \text{entonces} \quad |f(u) - f(t)| < \xi.$$

A continuación, tomemos $\gamma(\zeta(u, \xi)) \in \mathbb{R}$, con $0 < \gamma(\zeta(u, \xi)) \leq \zeta(u, \xi)$. Ahora bien, como

$$[a;b] = \bigcup_{u \in [a;b]} \{u\} \subset \bigcup_{u \in [a;b]} (u - \gamma(\zeta(u, \xi)); u + \gamma(\zeta(u, \xi))),$$

ocurre que la colección

$$\{(u - \gamma(\zeta(u, \xi)); u + \gamma(\zeta(u, \xi))) : u \in [a;b]\}$$

es una cubierta de intervalos abiertos para $[a;b]$. Por el Teorema de Heine-Borel (Ejemplo 2.2.24 del Capítulo 2) existen un entero positivo n y $u_1, \ldots, u_n \in [a;b]$ tales que

$$[a;b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} (u_i - \gamma(\zeta(u_i, \xi)); u_i + \gamma(\zeta(u_i, \xi))).$$

Para abreviar, definamos

$$\gamma_i(\xi) = \gamma(\zeta(u_i, \xi)), \quad \text{con} \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Finalmente, definamos

$$\beta = \text{Mín}\{\gamma_i(\xi) : i \in \{1, \ldots, n\}\};$$

por lo que $\beta \leq \gamma_i(\xi)$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Entrando en materia, auxiliándonos de lo anterior, procedamos a probar que f es uniformemente continua en $[a;b]$. Para esto, usaremos el Método Analítico.

(Análisis) Supongamos, para cuestiones de análisis, que ya hemos demostrado que f es uniformemente continua en $[a;b]$; es decir, que dado $\varepsilon > 0$, hemos podido encontrar $\delta > 0$ tal que, para cualesquier $x, y \in [a;b]$,

$$\text{si} \quad |x - y| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

A fin de determinar completamente a δ en términos de ε, echaremos mano del recubrimiento finito

$$\{(u_i - \gamma(\zeta(u_i, \xi)); u_i + \gamma(\zeta(u_i, \xi))) : i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

previamente encontrado. A su vez, para que éste sea útil a nuestros propósitos, bastará que el parámetro ξ, quien es el que lo "controla", a su vez dependa de ε. Dado que $\xi > 0$ y que ε es "pequeño", por el momento nos podemos conformar con que $\xi \leq \varepsilon$. Con todo esto, supongamos, para cuestiones de análisis, que ya hemos encontrado ξ, con $0 < \xi \leq \varepsilon$, y tal que nos permita diseñar δ. Ahora, debido a que

$$x \in [a;b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} (u_i - \gamma(\zeta(u_i, \xi)); u_i + \gamma(\zeta(u_i, \xi))),$$

existe $k \in \{1, \ldots, n\}$, tal que

$$x \in (u_k - \gamma_i(\xi); u_k + \gamma_k(\xi));$$

con lo que $|u_k - x| < \gamma_k(\xi)$. Mejor aún,

$$|u_k - x| < \gamma_k(\xi) = \gamma(\zeta(u_k, \xi)) \leq \zeta(u_k, \xi).$$

En resumen, $|u_k - x| < \zeta(u_k, \xi)$. A continuación, como $|x - y| < \delta$, midamos con esto la distancia entre y y u_k;

$$|u_k - y| = |u_k - x + x - y| \leq |u_k - x| + |x - y| < \gamma_k(\xi) + \delta.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos pedir que $\delta \leq \gamma_i(\xi)$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. En particular, $\delta \leq \gamma_k(\xi)$. Con esto, podemos continuar desarrollando la cadena de desigualdades;

$$|u_k - y| < \gamma_k(\xi) + \delta \leq \gamma_k(\xi) + \gamma_k(\xi) = 2\gamma_k(\xi) = 2\gamma(\zeta(u_k, \xi)) = \zeta(u_k, \xi).$$

Luego, podemos tomar $\gamma_k(\xi) = \gamma(\zeta(u_k, \xi)) = \zeta(u_k, \xi)/2$. Nótese que lo anterior permite determinar a $\gamma_k(\xi)$ completamente a partir de ξ. Pero entonces, si este caso particular se resuelve de esta manera, dado que hemos establecido en general que $\gamma(\zeta(u, \xi)) \leq \zeta(u, \xi)$, para todo $u \in [a; b]$, sin pérdida de generalidad podemos exigir en su totalidad que

$$\gamma(\zeta(u, \xi)) = \zeta(u, \xi)/2, \quad \text{para todo} \quad u \in [a; b].$$

Retomando la cuestión respecto de y, tenemos que el desarrollo previo que lo involucra se puede simplificar a $|u_k - y| < \zeta(u_k, \xi)$. Ahora, por la continuidad de f,

$$\text{como} \quad x \in [a; b] \quad \text{y} \quad |u_k - x| < \zeta(u_k, \xi), \quad \text{entonces} \quad |f(u_k) - f(x)| < \xi,$$

y

$$\text{como} \quad y \in [a; b] \quad \text{y} \quad |u_k - y| < \zeta(u_k, \xi), \quad \text{entonces} \quad |f(y) - f(u_k)| < \xi.$$

Finalmente, determinemos tanto δ como ξ. Para el primero, debido a que hemos solicitado que $\delta \leq \gamma_i(\xi)$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, en este caso será suficiente con tomar el óptimo, el cual está dado por

$$\delta = \beta = \text{Mín}\{\gamma_i(\xi) : i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Para el segundo, por la desigualdad triangular tenemos que

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(u_k) + f(u_k) - f(y)| \leq |f(x) - f(u_k)| + |f(u_k) - f(y)| < \xi + \xi = 2\xi = \varepsilon.$$

De donde podemos hacer $\xi = \varepsilon/2$. Aquí termina la etapa de análisis.
(Síntesis) Demos $\varepsilon > 0$. Para $\xi = \varepsilon/2 > 0$ y $u \in [a; b]$, por la continuidad de f en $[a; b]$, existe $\zeta(u, \xi) > 0$ tal que

$$\text{si} \quad t \in [a; b] \quad \text{y} \quad \text{si} \quad |u - t| < \zeta(u, \xi), \quad \text{entonces} \quad |f(u) - f(t)| < \xi.$$

A su vez, definamos $\gamma(\zeta(u, \xi)) = \zeta(u, \xi)/2 > 0$. Ocurre que la colección

$$\{(u - \gamma(\zeta(u, \xi)); u + \gamma(\zeta(u, \xi))) : u \in [a; b]\}$$

es una cubierta de intervalos abiertos para $[a; b]$. Por el Teorema de Heine-Borel (Ejemplo 2.2.24 del Capítulo 2) existen un entero positivo n y $u_1, \ldots, u_n \in [a; b]$ tales que

$$[a; b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} (u_i - \gamma(\zeta(u_i, \xi)); u_i + \gamma(\zeta(u_i, \xi))).$$

Para abreviar, definamos

$$\gamma_i(\xi) = \gamma(\zeta(u_i, \xi)), \quad \text{con} \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

y

$$\delta = \text{Mín}\{\gamma_i(\xi) : i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Ahora sean $x, y \in [a; b]$ que cumplan que $|x - y| < \delta$. En particular, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$, tal que

$$x \in (u_k - \gamma_i(\xi); u_k + \gamma_k(\xi));$$

con lo que $|u_k - x| < \gamma_k(\xi)$. Mejor aún,

$$|u_k - x| < \gamma_k(\xi) = \gamma(\zeta(u_k, \xi)) = \zeta(u_k, \xi)/2 < \zeta(u_k, \xi).$$

Similarmente, para el caso de y tenemos que

$$\begin{aligned} |u_k - y| &= |u_k - x + x - y| \leq |u_k - x| + |x - y| < \gamma_k(\xi) + \delta \leq \gamma_k(\xi) + \gamma_k(\xi) = 2\gamma_k(\xi) = 2\gamma(\zeta(u_k, \xi)) \\ &= 2\,\frac{\zeta(u_k, \xi)}{2} = \zeta(u_k, \xi). \end{aligned}$$

Ahora, por la continuidad de f,

$$\text{como} \quad |u_k - x| < \zeta(u_k, \xi), \quad \text{entonces} \quad |f(u_k) - f(x)| < \xi,$$

y

$$\text{como} \quad |u_k - y| < \zeta(u_k, \xi), \quad \text{entonces} \quad |f(y) - f(u_k)| < \xi.$$

De donde

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(u_k) + f(u_k) - f(y)| \leq |f(x) - f(u_k)| + |f(u_k) - f(y)| < \xi + \xi = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dado que esto acontece para *cualesquier* $x, y \in [a; b]$ que cumplan que $|x - y| < \delta$, concluimos que f es uniformemente continua en $[a; b]$. ■

Para el siguiente ejemplo topológico, consúltense las definiciones dadas en el primer capítulo.

Las bolas abiertas como conjuntos abiertos

Ejemplo 3.2.9. Sea n un entero positivo. Probar que toda bola abierta de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. En particular, ocurre que todo intervalo abierto no vacío es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$.

Demostración. Sean $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Hay que probar que $B(\vec{a}; r)$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Para esto, por definición, hay que probar que todo punto de $B(\vec{a}; r)$ es un punto interior. Sea $\vec{p} \in B(\vec{a}; r)$ cualquier punto de la bola. Debemos encontrar $s > 0$ tal que

$$B(\vec{p}; s) \subset B(\vec{a}; r).$$

Para encontrar s en términos de los elementos conocidos que son $\vec{a}$, r y $\vec{p}$ usaremos el Método Analítico.
(Análisis) Supongamos, para cuestiones de análisis, que ya hemos encontrado $s > 0$ tal que

$$B(\vec{p}; s) \subset B(\vec{a}; r).$$

La contención anterior significa que,

$$\text{para todo} \quad \vec{q} \in B(\vec{p}; s), \quad \text{se tiene que} \quad \vec{q} \in B(\vec{a}; r).$$

Convirtiendo a normas se consigue lo siguiente,

$$\text{si} \quad \|\vec{q} - \vec{p}\| < s, \quad \text{entonces} \quad \|\vec{q} - \vec{a}\| < r.$$

Para construir s, vamos a desarrollar hacia "arriba" el lado izquierdo de la desigualdad del consecuente de la condicional anterior, usando la desigualdad triangular y suponiendo válido el antecedente, con el fin de alcanzar r. Procediendo,

$$\|\vec{q} - \vec{a}\| = \|\vec{q} - \vec{p} + \vec{p} - \vec{a}\| \leq \|\vec{q} - \vec{p}\| + \|\vec{p} - \vec{a}\| < s + \|\vec{p} - \vec{a}\| = r.$$

Luego, podemos tomar $s = r - \|\vec{p} - \vec{a}\|$. Aquí termina la etapa de análisis.
(Síntesis) Sea $\vec{p} \in B(\vec{a}; r)$; por lo que $\|\vec{p} - \vec{a}\| < r$. Definamos $s = r - \|\vec{p} - \vec{a}\| > 0$. A fin de probar que $\vec{p}$ es un punto interior de $B(\vec{a}; r)$, demostremos que $B(\vec{p}; s) \subset B(\vec{a}; r)$. Para esto, tomemos $\vec{q} \in B(\vec{p}; s)$; con lo cual $\|\vec{q} - \vec{p}\| < s$. A continuación, midamos la distancia de $\vec{q}$ al centro $\vec{a}$ de la bola $B(\vec{a}; r)$ para comprobar que dicha distancia es menor que el radio r. Procediendo,

$$\|\vec{q} - \vec{a}\| = \|\vec{q} - \vec{p} + \vec{p} - \vec{a}\| \leq \|\vec{q} - \vec{p}\| + \|\vec{p} - \vec{a}\| < s + \|\vec{p} - \vec{a}\| = r - \|\vec{p} - \vec{a}\| + \|\vec{p} - \vec{a}\| = r.$$

En resumen, $\|\vec{q} - \vec{a}\| < r$; de donde $\vec{q} \in B(\vec{a}; r)$. Dado que esto ocurre para *todo* $\vec{q} \in B(\vec{p}; s)$, concluimos que $B(\vec{p}; s) \subset B(\vec{a}; r)$. En otras palabras, $\vec{p}$ es un punto interior de $B(\vec{a}; r)$. Ahora, como lo anterior acontece para *todo* $\vec{p} \in B(\vec{a}; r)$, concluimos que $B(\vec{a}; r)$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Por tanto, toda bola abierta de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Al respecto de los intervalos abiertos no vacíos, tenemos lo siguiente. En el Ejemplo 1.2.31 del Capítulo 1 probamos que todo intervalo abierto no vacío es una bola abierta de $\mathbb{R}$. En virtud del resultado anteriormente demostrado, podemos concluir que todo intervalo abierto no vacío es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$. ■

Métricas y espacios métricos

Definición 3.2.10. Sean E un conjunto no vacío y $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que d es una *métrica* o *distancia en* E si se satisfacen las condiciones siguientes:
Sean $a, b, c \in E$ cualesquier.

1. **Positividad.** $d(a, b) \geq 0$.
2. **No degeneración.** $d(a, b) = 0$ si, y sólo si, $a = b$.
3. **Simetría.** $d(a, b) = d(b, a)$.
4. **Desigualdad triangular.** $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

A la pareja (E, d) se le llama un *espacio métrico*, en tanto que a E se le denomina un *conjunto metrizado por* d o, simplemente, un *conjunto metrizado*.

Verificación de la desigualdad triangular en la métrica acotada

Ejemplo 3.2.11. Sea (E, d) un espacio métrico. Definamos $\rho : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \tag{3.8}$$

para cualesquier $x, y \in E$. Probar que ρ cumple la desigualdad triangular; es decir, que para cualesquier $a, b, c \in E$ se tiene que $\rho(a, c) \leq \rho(a, b) + \rho(b, c)$.

Demostración. Sean $a, b, c \in E$. Usaremos el Método Analítico.
(Análisis) Supongamos, para cuestiones de análisis, que ya hemos demostrado que

$$\rho(a, c) \leq \rho(a, b) + \rho(b, c).$$

A continuación, usaremos equivalencias. Sustituyendo la definición de ρ dada por (3.8) obtenemos
$\Longleftrightarrow$

$$\frac{d(a, c)}{1 + d(a, c)} \leq \frac{d(a, b)}{1 + d(a, b)} + \frac{d(b, c)}{1 + d(b, c)}.$$

Ahora, efectuando operaciones, conseguimos la cadena de equivalencias siguiente;
$\Longleftrightarrow$

$$\frac{d(a, c)}{1 + d(a, c)} \leq \frac{d(a, b)[1 + d(b, c)] + [1 + d(a, b)]\, d(b, c)}{[1 + d(a, b)][1 + d(b, c)]}.$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{d(a, c)}{1 + d(a, c)} \leq \frac{d(a, b) + d(b, c) + 2d(a, b)\, d(b, c)}{1 + d(a, b) + d(b, c) + d(a, b)\, d(b, c)}.$$

$\Longleftrightarrow$

$$[1 + d(a, b) + d(b, c) + d(a, b)\, d(b, c)]\, d(a, c) \leq [d(a, b) + d(b, c) + 2d(a, b)\, d(b, c)]\, [1 + d(a, c)].$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} & d(a, c) + d(a, b)\, d(a, c) + d(b, c)\, d(a, c) + d(a, b)\, d(b, c)\, d(a, c) \\ \leq\ & d(a, b) + d(b, c) + 2d(a, b)\, d(b, c) + d(a, b)\, d(a, c) + d(b, c)\, d(a, c) + 2d(a, b)\, d(b, c)\, d(a, c). \end{aligned}$$

Eliminando términos semejantes de ambos lados de la desigualdad obtenemos

$\Longleftrightarrow$
$$d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c) + 2d(a,b)\,d(b,c) + d(a,b)\,d(b,c)\,d(a,c)\,. \tag{3.9}$$

Ahora bien, como d es una métrica, cumple la desigualdad triangular dada por

$$d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)\,.$$

A continuación, podemos desarrollar hacia "arriba" el lado derecho de esta desigualdad sumando la cantidad no negativa $2d(a,b)\,d(b,c) + d(a,b)\,d(b,c)\,d(a,c)$ obteniendo

$$d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c) \leq d(a,b) + d(b,c) + 2d(a,b)\,d(b,c) + d(a,b)\,d(b,c)\,d(a,c)\,,$$

y de esta cadena de desigualdades, por transitividad conseguimos (3.9). Aquí termina la etapa de análisis.
(Síntesis) Sean $a, b, c \in E$. Dado que d es una métrica para E, se cumple respecto de ésta la desigualdad triangular; esto es,

$$d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)\,.$$

Ahora bien, por lo mismo, tenemos que $d(a,c)$, $d(a,b)$ y $d(b,c)$ son números reales no negativos. Luego, ocurre que

$$d(a,b) + d(b,c) \leq d(a,b) + d(b,c) + 2d(a,b)\,d(b,c) + d(a,b)\,d(b,c)\,d(a,c)\,.$$

A continuación, por transitividad sobre las dos desigualdades anteriores obtenemos

$$d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c) + 2d(a,b)\,d(b,c) + d(a,b)\,d(b,c)\,d(a,c)\,.$$

Para proseguir, de los desarrollos conseguidos en la etapa de análisis, tenemos la siguiente cadena de implicaciones;
$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} & d(a,c) + d(a,b)\,d(a,c) + d(b,c)\,d(a,c) + d(a,b)\,d(b,c)\,d(a,c) \\ \leq\ & d(a,b) + d(b,c) + 2d(a,b)\,d(b,c) + d(a,b)\,d(a,c) + d(b,c)\,d(a,c) + 2d(a,b)\,d(b,c)\,d(a,c)\,. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$
$$[1 + d(a,b) + d(b,c) + d(a,b)\,d(b,c)]\,d(a,c) \leq [d(a,b) + d(b,c) + 2d(a,b)\,d(b,c)]\,[1 + d(a,c)]\,.$$

$\Longrightarrow$
$$\frac{d(a,c)}{1 + d(a,c)} \leq \frac{d(a,b) + d(b,c) + 2d(a,b)\,d(b,c)}{1 + d(a,b) + d(b,c) + d(a,b)\,d(b,c)}.$$

$\Longrightarrow$
$$\frac{d(a,c)}{1 + d(a,c)} \leq \frac{d(a,b)\,[1 + d(b,c)] + [1 + d(a,b)]\,d(b,c)}{[1 + d(a,b)]\,[1 + d(b,c)]}.$$

$\Longrightarrow$
$$\frac{d(a,c)}{1 + d(a,c)} \leq \frac{d(a,b)}{1 + d(a,b)} + \frac{d(b,c)}{1 + d(b,c)}.$$

Ahora, como
$$\rho(a,c) = \frac{d(a,c)}{1 + d(a,c)}, \quad \rho(a,b) = \frac{d(a,b)}{1 + d(a,b)} \quad \text{y} \quad \rho(b,c) = \frac{d(b,c)}{1 + d(b,c)},$$

sustituyendo en la desigualdad previa obtenemos finalmente
$\Longrightarrow$
$$\rho(a,c) \leq \rho(a,b) + \rho(b,c)\,.$$

Dado que esto ocurre para *cualesquier* $a, b, c \in E$, concluimos que ρ satisface la desigualdad triangular. ■

Existencia de raíces cuadradas de números complejos

Ejemplo 3.2.12. Denotemos por $\mathbb{C}$ al *conjunto de los números complejos*, y sea $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$. Probar que existen para z exactamente dos raíces cuadradas en $\mathbb{C}$. Mejor aún, si $z = a + bi$ y $w = x + yi$ es una de sus raíces cuadradas, se tiene que

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \quad \text{y} \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}, \quad \text{con} \quad xy = \frac{b}{2}.$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$. Luego, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $z = a + bi$. Además, dado que $z \neq 0$, se tiene que $a^2 + b^2 > 0$. Debemos hallar $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^2 = z$. Para encontrarlo, usaremos el Método Analítico.
(Análisis) Supongamos, para cuestiones de análisis, que ya hemos hallado $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^2 = z$. Por una parte, existen $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $w = x + yi$. Por otra parte, sustituyendo en la igualdad $w^2 = z$ obtenemos

$$\begin{aligned} (x+yi)^2 &= a+bi. \\ x^2 - y^2 + 2xyi &= a+bi. \end{aligned}$$

Igualando partes reales e imaginarias conseguimos el sistema de ecuaciones reales siguiente

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases} \tag{3.10}$$

Para resolver este sistema, empecemos elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumémoslas miembro a miembro a continuación.

$$\begin{cases} \left(x^2 - y^2\right)^2 = a^2, \\ (2xy)^2 = b^2. \end{cases}$$

$$\begin{array}{rccc} & x^4 - 2x^2y^2 + y^4 & = & a^2 \\ + & 4x^2y^2 & = & b^2 \\ \hline & x^4 + 2x^2y^2 + y^4 & = & a^2 + b^2 \end{array}$$

O sea,

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2 + b^2.$$

Extrayendo raíces cuadradas de ambos lados de esta igualdad obtenemos

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{3.11}$$

Nótese que la existencia como número real de la raíz cuadrada del lado derecho está garantizada por ser $a^2 + b^2 > 0$. Por otro lado, se toma únicamente el caso positivo de ésta, ya que también $x^2 + y^2 > 0$. Prosiguiendo, a fin de despejar x, sumemos la primera ecuación del sistema (3.10) con la ecuación (3.11) anterior.

$$\begin{array}{rccc} & x^2 - y^2 & = & a \\ + & x^2 + y^2 & = & \sqrt{a^2 + b^2} \\ \hline & 2x^2 & = & \sqrt{a^2 + b^2} + a \end{array}$$

Luego,

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}.$$

Ahora, para despejar y, cambiemos el signo a la primera ecuación del sistema (3.10) y sumemos el resultado miembro a miembro con la ecuación (3.11).

$$\begin{array}{rccc} & -x^2 + y^2 & = & -a \\ + & x^2 + y^2 & = & \sqrt{a^2 + b^2} \\ \hline & 2y^2 & = & \sqrt{a^2 + b^2} - a \end{array}$$

De donde

$$y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Para terminar, obsérvese que los signos de x y y *no* se pueden elegir arbitrariamente, ya que, por la segunda ecuación de (3.10), están ligados por la siguiente relación

$$xy = \frac{b}{2}.$$

Así, cuando $x \neq 0$, los signos de y están determinados unívocamente por los de x, y viceversa. Por esta razón, el sistema (3.10) tiene exactamente dos parejas de soluciones en x y y. Por tanto, la ecuación $w^2 = z$ tiene invariablemente dos soluciones distintas para $z \neq 0$. Aquí termina la etapa de análisis.

(Síntesis) Para $z = a + bi \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$, tenemos que existe $w = x + yi$, con

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \text{y} \quad xy = \frac{b}{2},$$

tal que

$$w^2 = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

O sea,

$$w^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Ahora bien, nótese que

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \quad \text{y} \quad y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}, \quad \text{además de que} \quad xy = \frac{b}{2}.$$

Sustituyendo en la igualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned} w^2 &= x^2 - y^2 + 2xyi = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} + 2\,\frac{b}{2}\,i = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a-\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} + bi \\ &= \frac{2a}{2} + bi = a + bi = z. \end{aligned}$$

En resumen, para todo $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^2 = z$. En otras palabras, todo número complejo distinto de cero tiene al menos una raíz cuadrada compleja. Además, eligiendo cuidadosamente los signos de las partes real e imaginaria de esta raíz cuadrada, se pueden obtener exactamente dos raíces cuadradas complejas distintas. ■

3.3. Ejercicios

I. Utilizar el Método Analítico para demostrar que las funciones siguientes son suprayectivas:

1. $f(x) = 4x - 1$; $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
2. $g(x) = x^3 + 5$; $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
3. $h(x) = 9 - 4(8x+3)^5$; $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
4. $j(x) = \sqrt[3]{1-2x^3}$; $j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
5. $k(x) = 4 - \sqrt[5]{x^3+3}$; $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
6. $F(x) = 2 - 7\left(6\sqrt[3]{5-8(7x+4)^5} + 11\right)^3$; $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
7. $G(x) = 8 - \left(\dfrac{1-\sqrt[7]{4-2x^5}}{10}\right)^3$; $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
8. $H(x) = \left(\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x^7}{3}+8} - 9}{-4}\right)^5 + 1$; $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
9. $J(x) = \dfrac{18x^2 - 15x - 19}{3x+1}$; $J : \mathbb{R} \setminus \{-1/3\} \longrightarrow \mathbb{R}$.
10. $K(x) = \dfrac{18x^2 - 21x - 10}{-3x+4}$; $K : \mathbb{R} \setminus \{4/3\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

II. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Probar que $\text{Máx}\,(a, b) \leq \sqrt{a^2 + b^2}$. (**Sugerencia:** Demostrar por separado las desigualdades $a \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ y $b \leq \sqrt{a^2 + b^2}$, y, de ellas, inferir el resultado.)
III. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Probar que $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$.
IV. Usar la definición de límite (ε y δ) para probar los límites siguientes:

1. $\underset{x \longrightarrow 5}{lím} (7x - 18) = 17$.
2. $\underset{x \longrightarrow -5}{lím} \left(2x^2 + 7x - 10\right) = 5$.
3. $\underset{x \longrightarrow 4}{lím} \left(2x^3 - 13x^2 + 15x + 11\right) = -9$.
4. $\underset{x \longrightarrow -4}{lím} \left(-x^4 - 10x^3 - 23x^2 + 14x + 19\right) = -21$.
5. $\underset{x \longrightarrow 3}{lím} \left(3x^5 - 29x^4 + 66x^3 + 53x^2 - 181x - 64\right) = 32$.
6. $\underset{x \longrightarrow -3}{lím} \left(x^6 + 16x^5 + 98x^4 + 275x^3 + 285x^2 - 89x - 107\right) = 79$.
7. $\underset{x \longrightarrow 2}{lím} \left(5x^7 - 34x^6 + 69x^5 - 11x^4 - 89x^3 + 29x^2 + 44x + 13\right) = 1$.
8. $\underset{x \longrightarrow -2}{lím} \left(3x^8 + 31x^7 + 105x^6 + 96x^5 - 133x^4 - 167x^3 + 126x^2 - 75\right) = 85$.
9. $\underset{x \longrightarrow 1}{lím} \left(4x^9 - 17x^8 + 20x^7 + 5x^6 - 16x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 11x - 9\right) = -7$.
10. $\underset{x \longrightarrow -1}{lím} \left(6x^{10} + 29x^9 + 41x^8 - 5x^7 - 42x^6 + 9x^5 + 45x^4 + 8x^3 - 17x^2 - 5x + 11\right) = 8$.

Respuestas a los ejercicios IV
Advertencia: Las siguientes respuestas son solamente *sugerencias* para seleccionar el número δ de cada ejercicio. En su caso, el lector deberá construir este δ y dar la demostración correspondiente.
1. $\delta = \varepsilon/7$. 2. $\delta = \text{Mín}\,(1, \varepsilon/15)$. 3. $\delta = \text{Mín}\,(1, \varepsilon/20)$. 4. $\delta = \text{Mín}\,(1, \varepsilon/34)$. 5. $\delta = \text{Mín}\,(1, \varepsilon/142)$. 6. $\delta = \text{Mín}\,(1, \varepsilon/78)$. 7. $\delta = \text{Mín}\,(1, \varepsilon/295)$. 8. $\delta = \text{Mín}\,(1, \varepsilon/399)$. 9. $\delta = \text{Mín}\,(1, \varepsilon/112)$. 10. $\delta = \text{Mín}\,(1, \varepsilon/177)$.

Capítulo 4

DEMOSTRACIÓN POR CASOS

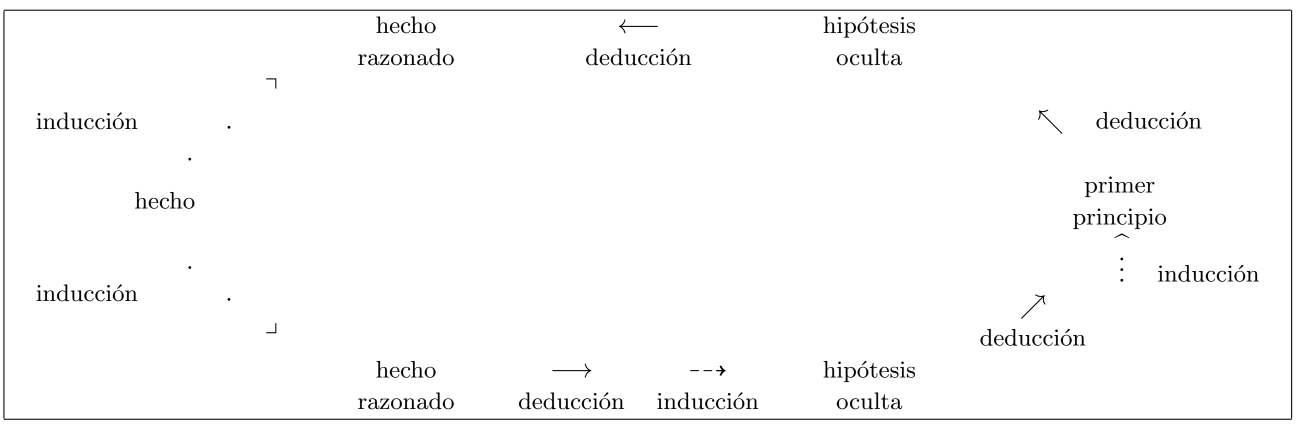
4.1. Introducción

4.1.1. Presentación del método

En el afán de explotar los antiguos métodos de Análisis y Síntesis para obtener conocimientos, Descartes construyó un circuito basado en el circuito de Pappus (ver capítulo 3, figura 1). En esta ocasión, el circuito cartesiano incluía tanto inferencias deductivas como inductivas, así como la introducción de dos nuevos factores en la ciencia moderna, a saber: los hechos razonados y las hipótesis ocultas. El circuito de Descartes queda como sigue (ver [13]):

Figura 2

Circuito de Descartes



Este circuito obtuvo críticas sobre todo en el paso inductivo de los hechos razonados a las hipótesis ocultas; el argumento consistía en considerar imposible la transferencia de la verdad entre estos dos factores por medio del paso inductivo, surgiendo como alternativa, entre otros, el método de división, que consistió en enumerar todas las conjeturas posibles de las que se podía derivar el hecho. A continuación se falsaban todas excepto una, y se conseguía de esta forma probar esta última. Por supuesto, este método se apoyaba en la infalibilidad absoluta de la intuición para seccionar en casos el problema planteado. Un partidario de este método era Galileo Galilei (1564-1642) (ver [6]), quien, ante cierta situación, aplicó el método y dividió un problema en una disyunción: la tierra se mueve o se mantiene quieta. Galileo fue derribando los argumentos a favor de que la tierra se mantiene quieta y se quedó con la primera posibilidad como cierta; aún cuando ésta tampoco era indubitablemente verdadera. Además, el método de división sufrió críticas por parte de Leibniz y de los lógicos católicos; por lo que quedó en duda como método heurístico. Debido a las diferencias que existen entre las Matemáticas y la ciencia, el método de división casi desapareció en esta última; sin embargo, en Matemáticas el método permanecería y se conoce con el nombre de *Método de Demostración por Casos*.

Generalmente, el Método de Demostración por Casos se presenta en dos posibilidades: la *Dicotomía* y la *Tricotomía*. Cuando se comparan dos elementos a y b pertenecientes a un conjunto surgen dos casos, es decir, una dicotomía: o bien $a = b$, o bien $a \neq b$. Cada caso se resuelve por separado utilizando algún método de demostración; al final, se juntan los resultados para llegar a una conclusión. La tricotomía, en cambio, afirma que al compararse dos elementos a y b pertenecientes a un conjunto totalmente ordenado, una, y sólo una, de las relaciones siguientes es válida: o bien $a = b$, o bien $a < b$, o bien $b < a$. De igual manera, cada caso se resuelve separadamente y al final se juntan los resultados para lograr dar una conclusión. La situación es análoga a lo que cada individuo enfrenta de manera cotidiana, al elegir un curso de acción, pues considera todas las alternativas y se imagina el resultado de cada una, reúne todas las posibilidades y elige la mejor del menú.

Cabe mencionar que hay ocasiones en que un caso origina subcasos y éstos se consideran para dar la solución final.

4.1.2. Estructura del método

A continuación, damos la estructura general del Método de Demostración por Casos.

Dividimos en los posibles casos que posea la variable problemática seleccionada:

o bien ... (caso 1), o bien ... (caso 2), ... , o bien ... (caso n).

Luego, procedemos a examinar individualmente los casos.

Caso 1. ... **Conclusión 1.**

Caso 2. ... **Conclusión 2.**

⋮

Caso n. ... **Conclusión n.**

Para finalizar, se juntan los resultados para concluir,

o bien **conclusión 1**, o bien **conclusión 2**, ... , o bien **conclusión n**.

4.1.3. Sugerencias para su uso

Este método es muy útil cuándo se trabaja en conjuntos totalmente ordenados; se aplica al comparar elementos pertenecientes a estos tipos de conjuntos. Hay que tener en cuenta que la demostración empleada en cada caso debe ser diferente; esto justifica la aplicación del método. Ahora, hay ocasiones en las que se plantea una conjunción, la cual enlaza dos o más disyunciones. En esta situación, se aplica la propiedad distributiva de la conjunción sobre la disyunción (ver, por ejemplo, [3] o [21]), originando un cierto número de alternativas que constan de conjunciones; cada una de éstas se trata como un caso separado.

4.2. Ejemplos

La demostración por casos sirve para para encontrar el conjunto solución de inecuaciones cuadráticas.

Ejemplo 4.2.1. Probar que el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $(x+1)(x-5) < 0$ es $(-1; 5)$.

Demostración. Dada la inecuación

$$(x+1)(x-5) < 0,$$

por las leyes de los signos tenemos dos casos: o bien $0 < x+1$ y $x-5 < 0$, o bien $x+1 < 0$ y $0 < x-5$.

Caso 1. $0 < x+1$ y $x-5 < 0$.

Empecemos resolviendo la primera desigualdad

$$0 < x+1.$$

Restando 1 en ambos miembros de la inecuación tenemos que

$$\begin{aligned} 0-1 &< x+1-1. \\ -1 &< x. \end{aligned}$$

El intervalo solución es $(-1; +\infty)$.

Pasemos ahora a resolver la segunda desigualdad

$$x - 5 < 0.$$

Sumando 5 en ambos miembros de la inecuación tenemos que

$$\begin{aligned} x - 5 + 5 &< 0 + 5. \\ x &< 5. \end{aligned}$$

El intervalo solución para la segunda desigualdad es $(-\infty; 5)$.

La solución del caso 1 es la intersección de los intervalos solución de sus dos desigualdades; $(-1; +\infty) \cap (-\infty; 5) = (-1; 5)$.

Caso 2. $x + 1 < 0$ y $0 < x - 5$.

Empecemos resolviendo la primera desigualdad

$$x + 1 < 0.$$

Restando 1 en ambos miembros de la inecuación tenemos que

$$\begin{aligned} x + 1 - 1 &< 0 - 1. \\ x &< -1. \end{aligned}$$

El intervalo solución para la primera desigualdad es $(-\infty; -1)$.

Pasemos ahora a resolver la segunda desigualdad

$$0 < x - 5.$$

Sumando 5 en ambos miembros de la inecuación tenemos que

$$\begin{aligned} 0 + 5 &< x - 5 + 5. \\ 5 &< x. \end{aligned}$$

El intervalo solución para la segunda desigualdad es $(5; +\infty)$.

La solución del caso 2 es la intersección de los intervalos solución de sus dos desigualdades; $(-\infty; -1) \cap (5; +\infty) = \emptyset$.

La solución del problema es la unión de las soluciones de los dos casos; $(-1; 5) \cup \emptyset = (-1; 5)$. ■

Ejemplo 4.2.2. Probar que el conjunto de números reales que satisfacen la inecuación

$$-12x^2 - 11x + 37 \geq -13x^2 - 29x - 43$$

es $(-\infty; -10] \cup [-8; +\infty)$.

Demostración. Dada la desigualdad

$$-12x^2 - 11x + 37 \geq -13x^2 - 29x - 43,$$

pasando todos los términos del lado derecho al izquierdo obtenemos la cadena de equivalencias algebraicas siguiente,

$$\begin{aligned} -12x^2 - 11x + 37 + 13x^2 + 29x + 43 &\geq 0. \\ x^2 + 18x + 80 &\geq 0. \\ (x + 10)(x + 8) &\geq 0. \\ 0 &\leq (x + 10)(x + 8). \end{aligned}$$

Por las leyes de los signos tenemos dos casos: o bien $0 \leq x + 10$ y $0 \leq x + 8$, o bien $x + 10 \leq 0$ y $x + 8 \leq 0$.

Caso 1. $0 \leq x + 10$ y $0 \leq x + 8$.

Empecemos resolviendo la primera desigualdad

$$0 \leq x + 10.$$

Restando 10 en ambos miembros de la inecuación tenemos que

$$\begin{aligned} 0-10 &\leq x+10-10. \\ -10 &\leq x. \end{aligned}$$

El intervalo solución para la primera desigualdad es $[-10;+\infty)$.

Pasemos ahora a resolver la segunda desigualdad

$$0 \leq x+8.$$

Restando 8 en ambos miembros de la inecuación tenemos que

$$\begin{aligned} 0-8 &\leq x+8-8. \\ -8 &\leq x. \end{aligned}$$

El intervalo solución para la segunda desigualdad es $[-8;+\infty)$.

La solución del caso 1 es la intersección de los intervalos solución de sus dos desigualdades; $[-10;+\infty)\cap[-8;+\infty) = [-8;+\infty)$.

Caso 2. $x+10 \leq 0$ y $x+8 \leq 0$.

Empecemos resolviendo la primera desigualdad

$$x+10 \leq 0.$$

Restando 10 en ambos miembros de la inecuación tenemos que

$$\begin{aligned} x+10-10 &\leq 0-10. \\ x &\leq -10. \end{aligned}$$

El intervalo solución para la primera desigualdad es $(-\infty;-10]$.

Pasemos a resolver la segunda desigualdad

$$x+8 \leq 0.$$

Restando 8 en ambos miembros de la inecuación tenemos que

$$\begin{aligned} x+8-8 &\leq 0-8. \\ x &\leq -8. \end{aligned}$$

El intervalo solución para la segunda desigualdad es $(-\infty;-8]$.

La solución del caso 2 es la intersección de los intervalos solución de sus dos desigualdades; $(-\infty;-10]\cap(-\infty;-8] = (-\infty;-10]$.

La solución del problema es la unión de las soluciones de los dos casos; $[-8;+\infty) \cup (-\infty;-10] = (-\infty;-10] \cup [-8;+\infty)$. ■

No negatividad de las potencias cuadradas

Ejemplo 4.2.3. Sea a un número real, con $a \neq 0$. Probar que $a^2 > 0$.

Demostración. Por hipótesis tenemos que $a \neq 0$. Por tricotomía tenemos dos posibilidades para a: o bien $a > 0$, o bien $-a > 0$.

Caso 1. $a > 0$. Multiplicando por a ambos lados obtenemos

$$\begin{aligned} aa &> a0. \\ a^2 &> 0. \end{aligned}$$

Caso 2. $-a > 0$. Multiplicando por $-a$ ambos lados tenemos que

$$\begin{aligned} (-a)\,(-a) &> (-a)\,0. \\ aa &> 0. \\ a^2 &> 0. \end{aligned}$$

En conclusión, en cualquier caso obtenemos $a^2 > 0$. ■

Homogeneidad del valor absoluto

Ejemplo 4.2.4. Sean a y b dos números reales. Probar que $|ab| = |a|\,|b|$.

Demostración. Hay dos casos para a y dos casos para b: o bien $a \geq 0$, o bien $a < 0$, y, o bien $b \geq 0$, o bien $b < 0$. De aquí surge un total de cuatro casos:

1. $a \geq 0$ y $b \geq 0$.
2. $a \geq 0$ y $b < 0$.
3. $a < 0$ y $b \geq 0$.
4. $a < 0$ y $b < 0$.

Revisemos cada una de estas opciones.
Caso 1. $a \geq 0$ y $b \geq 0$. En este caso, $|a| = a$ y $|b| = b$. Además, por las leyes de los signos, $ab \geq 0$; por lo que, $|ab| = ab$. Luego,

$$|a|\,|b| = ab = |ab|\,.$$

Caso 2. $a \geq 0$ y $b < 0$. En esta ocasión, $|a| = a$ y $|b| = -b$. Adicionalmente, por las leyes de los signos, $ab \leq 0$; por lo cual $|ab| = -ab$. De donde

$$|a|\,|b| = a\,(-b) = -ab = |ab|\,.$$

Caso 3. $a < 0$ y $b \geq 0$. En esta opción, $|a| = -a$ y $|b| = b$. En adición, por las leyes de los signos, $ab \leq 0$; con lo que $|ab| = -ab$. De ahí que

$$|a|\,|b| = (-a)\,(b) = -ab = |ab|\,.$$

Caso 4. $a < 0$ y $b < 0$. En esta situación, $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Por añadidura, por las leyes de los signos, $ab > 0$; de lo cual $|ab| = ab$. Por todo esto,

$$|a|\,|b| = (-a)\,(-b) = ab = |ab|\,.$$

En conclusión, en cualquier caso obtenemos $|a|\,|b| = |ab|$. ■

Ecuación cartesiana de la recta

Ejemplo 4.2.5. Sean A, B y C tres números reales, con A y B no simultáneamente nulos. Probar que la gráfica de la ecuación

$$Ax + By + C = 0$$

es una recta. Es por esto por lo que a dicha ecuación se la denomina la *ecuación cartesiana de la recta*.

Demostración. Hay dos casos para B: o bien $B \neq 0$, o bien $B = 0$. Analicemos cada una de estas opciones.
Caso 1. $B \neq 0$. En este caso, podemos despejar y en la ecuación cartesiana.

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0. \\ By &= -Ax - C. \\ y &= \left(-\frac{A}{B}\right) x + \left(-\frac{C}{B}\right). \end{aligned}$$

Ésta es la ecuación de una recta con pendiente $\lambda = -A/B$ y ordenada al origen $b = -C/B$.
Caso 2. $B = 0$. Aquí, sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0. \\ Ax + 0y + C &= 0. \\ Ax + 0 + C &= 0. \\ Ax + C &= 0. \end{aligned}$$

Como $B = 0$ y A y B no pueden ser simultáneamente nulos, tenemos entonces que $A \neq 0$. Con esto, podemos despejar x de la ecuación anterior.

$$\begin{aligned} Ax &= -C. \\ x &= -\frac{C}{A}. \end{aligned}$$

Ésta es la ecuación de una recta vertical.

En conclusión, en cada uno de los casos hemos encontrado que la ecuación cartesiana representa a una recta. ■

Para los siguientes ejemplos referentes a límites de funciones reales de variable real, consúltense las definiciones respectivas dadas en el primer capítulo.

Determinación del límite por medio de los límites unilaterales

Ejemplo 4.2.6. Sean: A un intervalo abierto no vacío, $a \in A$, f una función real de variable real con dominio $\mathcal{D}_f$, $A \setminus \{a\} \subset \mathcal{D}_f$ y $L \in \mathbb{R}$. Probar que, si $lím_{x \longrightarrow a^+} f(x)$ y $lím_{x \longrightarrow a^-} f(x)$ existen y son iguales a L, entonces el $lím_{x \longrightarrow a} f(x)$ existe y es igual a L.

Demostración. Supongamos que $lím_{x \longrightarrow a^+} f(x) = lím_{x \longrightarrow a^-} f(x) = L$. Demos $\varepsilon > 0$ y $x \in A$. Por definición de límite por la derecha, existe $\delta_1 > 0$ tal que,

$$\text{si} \quad 0 < x - a < \delta_1, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon,$$

y por definición de límite por la izquierda, existe $\delta_2 > 0$ tal que,

$$\text{si} \quad 0 < a - x < \delta_2, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Sea $\delta = \text{Mín}(\delta_1, \delta_2)$. Supongamos ahora que $0 < |x - a| < \delta$. Hay dos casos para $x - a$: o bien $0 < x - a$, o bien $x - a < 0$.

Caso 1. $0 < x - a$. En este caso $x - a$ es positivo. Luego, $|x - a| = x - a$. De donde $0 < x - a = |x - a| < \delta \leq \delta_1$, lo cual por definición de límite por la derecha implica que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Caso 2. $x - a < 0$. Ahora, $x - a$ es negativo. Luego, $|x - a| = -(x - a) = a - x$. Así, si $0 < a - x = |x - a| < \delta \leq \delta_2$, entonces por definición de límite por la izquierda tenemos que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

En cualquier caso, obtenemos que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Por tanto, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces siempre $|f(x) - L| < \varepsilon$. Es decir, hemos probado que

$$\underset{x \longrightarrow a}{lím} f(x) = L.$$

■

Derivabilidad limitada de la función valor absoluto

Ejemplo 4.2.7. Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = |x|$. Probar que esta función es derivable en todo número distinto del cero.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$. Hay dos casos: o bien $x > 0$, o bien $x < 0$. Revisemos cada una de estas opciones con detalle.

Caso 1. $x > 0$. En este caso, $|x| = x$. Tomando h suficientemente pequeño (en situación de que sea negativo), sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x + h > 0$; por lo que también $|x + h| = x + h$. Así, aplicando la definición de derivada y sustituyendo el valor de la función obtenemos

$$F'(x) = \underset{h \longrightarrow 0}{lím} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \underset{h \longrightarrow 0}{lím} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \underset{h \longrightarrow 0}{lím} \frac{x + h - x}{h} = \underset{h \longrightarrow 0}{lím} \frac{h}{h} = \underset{h \longrightarrow 0}{lím} 1 = 1.$$

Caso 2. $x < 0$. En esta ocasión, $|x| = -x$. Nuevamente, haciendo h suficientemente pequeño (en caso de que sea positivo), sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x + h < 0$; por lo cual igualmente $|x + h| = -(x + h)$. Luego, utilizando la definición de derivada y sustituyendo el valor de la función conseguimos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \underset{h \longrightarrow 0}{lím} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \underset{h \longrightarrow 0}{lím} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \underset{h \longrightarrow 0}{lím} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \underset{h \longrightarrow 0}{lím} \frac{-x - h + x}{h} \\ &= \underset{h \longrightarrow 0}{lím} \frac{-h}{h} = \underset{h \longrightarrow 0}{lím} (-1) = -1. \end{aligned}$$

En conclusión, en cualquier caso $F'(x)$ existe. Por tanto, F es derivable en todo número distinto de cero. ■

Una antiderivada para la función valor absoluto

Ejemplo 4.2.8. Sea $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera,

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & \text{si } x \geq 0, \\ -\dfrac{x^2}{2}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Probar que G es derivable en todo $\mathbb{R}$ y que $G'(x) = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Para derivar esta función, hay que considerar tres casos para x: o bien $x > 0$, o bien $x < 0$, o bien $x = 0$.

Caso 1. $x > 0$. En este caso, por definición obtenemos $G(x) = x^2/2$. Dado que se trata de un polinomio, su derivada existe y se puede calcular usando fórmulas de derivación del siguiente modo,

$$G'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[G(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\right) = \frac{1}{2}(2x) = x.$$

Caso 2. $x < 0$. En esta ocasión, por definición tenemos que $G(x) = -x^2/2$. Vemos que es similar al caso anterior; por lo que le aplicamos el mismo trato.

$$G'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[G(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\right) = -\frac{1}{2}(2x) = -x.$$

Caso 3. $x = 0$. En esta situación, debido a la posición intermedia que tiene el cero en los dos pedazos en que se divide la definición de G, hay que utilizar la definición de derivada. Procedamos a efectuar este cálculo.

$$G'(0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{G(0+h) - G(0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{G(h) - \dfrac{0^2}{2}}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{G(h) - 0}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{G(h)}{h}.$$

En síntesis,

$$G'(0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{G(h)}{h}. \tag{4.1}$$

A continuación, para poder evaluar el límite restante, hay que considerar los dos subcasos dados por los límites unilaterales.

(Límite por la derecha) Al tomar el límite cuando h tiende a cero por la derecha, por definición en este caso $h > 0$. Pero entonces, $G(h) = h^2/2$. Luego, tomando este límite y sustituyendo el valor de la función obtenemos

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{G(h)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{\dfrac{h^2}{2}}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{h^2}{2h} = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{h}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

(Límite por la izquierda) En este caso de límite en el que h tiende a cero por la izquierda tenemos que $h < 0$. Así, $G(h) = -h^2/2$. Calculando este límite y sustituyendo el valor de la función conseguimos

$$\lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{G(h)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{-\dfrac{h^2}{2}}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \left(-\frac{h^2}{2h}\right) = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{0}{2} = 0.$$

Como

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{G(h)}{h} = 0 = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{G(h)}{h},$$

por el Ejemplo 4.2.6 tenemos que el límite existe y es igual a cero; es decir,

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{G(h)}{h} = 0.$$

Con esto, podemos continuar con (4.1).

$$G'(0) = \underset{h \longrightarrow 0}{lím} \frac{G(h)}{h} = 0.$$

En resumen, de los tres casos concluimos que G es derivable en todo $\mathbb{R}$. Además, podemos sintetizar su derivada considerando precisamente estos mismos casos de la siguiente forma,

$$G'(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ahora bien, la tabla anterior no es más que otra manera de definir la función valor absoluto. Por tanto, $G'(x) = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. En otras palabras, G es una *antiderivada* para la función valor absoluto. ■

Para el ejemplo siguiente referente al álgebra lineal de espacios euclidianos, consúltense las definiciones respectivas dadas en el primer capítulo.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz en espacios euclidianos

Ejemplo 4.2.9. Sean n un entero positivo y $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Probar que $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$.

Demostración. Hay dos casos para $\vec{v}$: o bien $\vec{v} = \vec{0}$, o bien $\vec{v} \neq \vec{0}$.
Caso 1. $\vec{v} = \vec{0}$. Este caso es trivial ya que

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| = \left|\vec{0} \cdot \vec{w}\right| = |0| = 0 = 0 \|\vec{w}\| = \left\|\vec{0}\right\| \|\vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| .$$

Caso 2. $\vec{v} \neq \vec{0}$. En esta ocasión, por la positividad y no degeneración del producto punto ocurre que $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} > 0$. Ahora, sea $x \in \mathbb{R}$ y consideremos la combinación lineal $x\vec{v} + \vec{w}$. Nuevamente, por la positividad del producto punto tenemos que

$$(x\vec{v} + \vec{w}) \cdot (x\vec{v} + \vec{w}) \geq 0.$$

A continuación, usaremos equivalencias. Desarrollando el lado izquierdo obtenemos

$\Longleftrightarrow$

$$(\vec{v} \cdot \vec{v})\, x^2 + 2\,(\vec{v} \cdot \vec{w})\, x + (\vec{w} \cdot \vec{w}) \geq 0,$$

o, mejor aún, sustituyendo normas conseguimos

$\Longleftrightarrow$

$$\|\vec{v}\|^2 x^2 + 2\,(\vec{v} \cdot \vec{w})\, x + \|\vec{w}\|^2 \geq 0.$$

Ahora bien, este polinomio cuadrático en x, por tener gráfica no negativa, no tiene raíces reales distintas; es decir, o bien sus raíces son reales y repetidas, o bien son complejas. Por lo que su discriminante es no positivo; o sea,

$\Longleftrightarrow$

$$[2\,(\vec{v} \cdot \vec{w})]^2 - 4 \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 \leq 0.$$

$\Longleftrightarrow$

$$4\,(\vec{v} \cdot \vec{w})^2 \leq 4 \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 .$$

$\Longleftrightarrow$

$$(\vec{v} \cdot \vec{w})^2 \leq \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 .$$

Extrayendo raíces cuadradas de ambos lados obtenemos

$\Longleftrightarrow$

$$\sqrt{(\vec{v} \cdot \vec{w})^2} \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| .$$

$\Longleftrightarrow$

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| .$$

En el Ejercicio IV de este capítulo se justifica el último paso.

En resumen, juntando las conclusiones de los dos casos, podemos sintetizar éstas en la desigualdad más general que es $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$. ■

Para el siguiente ejemplo que requiere del axioma del supremo, consúltese éste en el segundo capítulo; en general, para los siguientes ejemplos que usan continuidad de una función real de variable real, consúltese la definición respectiva proporcionada en el primer capítulo.

Sobre el Método Exhaustivo de Eudoxo

En los dos ejemplos siguientes se emplea en las pruebas respectivas el *Método Exhaustivo de Eudoxo* o *Método de Exhaustividad de Eudoxo*. Éste se trata de un caso particular de la Demostración por Reducción al Absurdo, la cual se transforma en una Demostración por Casos por efecto de una tricotomía. Por supuesto, en cada una de las opciones en que se bifurca dicha prueba se llega a una contradicción; por lo cual ninguna salida resulta efectiva; de aquí proviene su nombre (en el sentido de que se *agotan* las salidas). Conozcámoslo.

Teorema del Valor Intermedio

Ejemplo 4.2.10. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, y $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, con $f(a) \neq f(b)$. Si $t \in \mathbb{R}$ es tal que, o bien $f(a) < t < f(b)$, o bien $f(b) < t < f(a)$, entonces probar que existe $c \in (a; b)$ tal que $f(c) = t$.

Demostración. Sea $t \in \mathbb{R}$, y supongamos que, o bien $f(a) < t < f(b)$, o bien $f(b) < t < f(a)$. Analicemos cada uno de estos casos.

Caso 1. $f(a) < t < f(b)$. Definamos el subconjunto S de $[a; b]$ conformado por los elementos $x \in [a; b]$ tales que $f(x) < t$. Al respecto de S, tenemos los dos hechos siguientes:

1. (No vacuidad) Dado que $f(a) < t$, tenemos que $a \in S$; por lo que $S \neq \emptyset$.

2. (Acotación superior) Como $S \subset [a; b]$, tenemos que S es un conjunto acotado superiormente por b.

Luego, S es no vacío y está acotado superiormente. Por el axioma del supremo, existe $c = \operatorname{Sup} S$. En adición, dado que $a \in S$, que c es la mínima cota superior de S y que b es cota superior de S, tenemos que $a \leq c \leq b$; es decir, $c \in [a; b]$. Hay que probar que $f(c) = t$. Para esto supongamos, por contradicción, que $f(c) \neq t$. Luego, $|t - f(c)| > 0$. Como f es, en particular, continua en c, para $\varepsilon = |t - f(c)| > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad x \in [a; b] \quad \text{y} \quad \text{si} \quad |x - c| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Ahora bien, el que $x \in [a; b]$ y $|x - c| < \delta$, equivale a que $x \in [a; b] \cap (c - \delta; c + \delta)$. Además, sustituyendo ε obtenemos

$$\text{si} \quad x \in [a; b] \cap (c - \delta; c + \delta), \quad \text{entonces} \quad |f(x) - f(c)| < |t - f(c)|. \tag{4.2}$$

Para poder liberar de valores absolutos la desigualdad previa, necesitamos considerar los dos casos que surgen de que $f(c) \neq t$ los cuales son: o bien $f(c) < t$, o bien $t < f(c)$. Revisemos cada una de estas opciones.

Subcaso 1.1. $f(c) < t$. En este caso, $c \in [a; b)$. Por esto mismo, $|t - f(c)| = t - f(c)$, y, en adición, $f(x) - f(c) \leq |f(x) - f(c)|$. Sustituyendo en (4.2) conseguimos

$$\text{si} \quad x \in [a; b] \cap (c - \delta; c + \delta), \quad \text{entonces} \quad f(x) - f(c) < t - f(c).$$

Simplificando la desigualdad obtenemos

$$\text{si} \quad x \in [a; b] \cap (c - \delta; c + \delta), \quad \text{entonces} \quad f(x) < t.$$

En particular, como $c < b$, si exigimos que $\delta \leq b - c$, entonces ocurre que $(c; c + \delta) \subset [a; b] \cap (c - \delta; c + \delta)$. Así, si $x \in (c; c + \delta)$, esto es

$$\text{si} \quad c < x < c + \delta, \quad \text{entonces} \quad f(x) < t.$$

En resumen, existen números x en $[a; b]$ tales que $c < x$ y $f(x) < t$. Por esto, $x \in S$. Dado que c es el supremo de S, al respecto de x se debe cumplir que $x \leq c$. Contradicción, ya que $c < x$.

Subcaso 1.2. $t < f(c)$. En esta ocasión, $c \in (a; b]$. Por esto mismo, $|t - f(c)| = f(c) - t$, y, en adición, $f(c) - f(x) \leq |f(x) - f(c)|$. Sustituyendo en (4.2) conseguimos

$$\text{si} \quad x \in [a; b] \cap (c - \delta; c + \delta), \quad \text{entonces} \quad f(c) - f(x) < f(c) - t.$$

Simplificando la desigualdad obtenemos

$$\text{si} \quad x \in [a; b] \cap (c - \delta; c + \delta), \quad \text{entonces} \quad t < f(x).$$

En particular, como $a < c$, si exigimos que $\delta \leq c - a$, entonces ocurre que $(c - \delta; c) \subset [a; b] \cap (c - \delta; c + \delta)$. Así, si $x \in (c - \delta; c)$, esto es

$$\text{si} \quad c - \delta < x < c, \quad \text{entonces} \quad t < f(x).$$

En resumen, para todo $x \in [a; b]$, con $c - \delta < x < c$, se tiene que $t < f(x)$. Por esto, $x \notin S$; por lo que en el intervalo $(c - \delta; c)$ no hay elementos de S. Además, como $t < f(c)$, se tiene que $c \notin S$. Finalmente, dado que c es cota superior de S, ocurre que tampoco en el intervalo $(c; b]$ existen elementos de S. En síntesis, si $x \in (c - \delta; c) \cup \{c\} \cup (c; b] = (c - \delta; b]$, entonces $x \notin S$. Mejor aún, si $x \in S$, entonces $x \in [a; b] - (c - \delta; b] = [a; c - \delta]$; en otras palabras, $S \subset [a; c - \delta]$. Por lo que $c - \delta$ es una cota superior de S. Contradicción, ya que $c - \delta < c$ y se suponía que c era la *mínima* cota superior de S.

En cualquier caso, $f(c) \neq t$ lleva a contradicción. Luego, $f(c) = t$. Además, recuérdese que $c \in [a; b]$; sin embargo, dado que $f(a) < t < f(b)$, entonces ocurre que $c \neq a$ y $c \neq b$. De donde $c \in (a; b)$. En conclusión, existe $c \in (a; b)$ tal que $f(c) = t$.

Caso 2. $f(b) < t < f(a)$. En esta opción haremos uso del primer caso. Definamos $F(x) = -f(x)$, para todo $x \in [a; b]$; por lo que $f(x) = -F(x)$, para todo $x \in [a; b]$. Sustituyendo en la cadena de desigualdades $f(b) < t < f(a)$, obtenemos $-F(b) < t < -F(a)$. Mejor aún, $F(a) < -t < F(b)$. Dado que F es continua en $[a; b]$, por el primer caso tenemos que existe $c \in (a; b)$ tal que $F(c) = -t$. Reemplazando por f conseguimos $-f(c) = -t$; o sea, $f(c) = t$. ■

Función estrictamente decreciente

Definición 4.2.11. Sea f una función real definida en un intervalo A. Se dice que f es *estrictamente decreciente en* A si, para cualesquier x_1, $x_2 \in A$ tales que $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_2) < f(x_1)$.

Para el siguiente ejemplo que utiliza los conceptos de inyectividad y de función estrictamente creciente, consúltense las definiciones respectivas dadas en el primer capítulo.

Continuidad e inyectividad implican monotonía

Ejemplo 4.2.12. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, y $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ función continua, inyectiva y tal que $f(a) \neq f(b)$. Probar que, para todo $x \in [a; b]$, o bien $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, o bien $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$. Más aún, demostrar que f es, o bien estrictamente creciente, o bien estrictamente decreciente.

Demostración. Como por hipótesis $f(a) \neq f(b)$, hay que considerar dos casos: o bien $f(a) < f(b)$, o bien $f(b) < f(a)$.

Caso 1. $f(a) < f(b)$. En esta situación, el objetivo es probar que, para todo $x \in [a; b]$, ocurre que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Para esto supongamos, por contradicción, que existe $x \in [a; b]$ tal que, o bien $f(x) < f(a)$, o bien $f(b) < f(x)$. Claramente, $a < x < b$; o sea, $x \in (a; b)$. Para continuar revisemos cada uno de los subcasos originados por separado.

Subcaso 1.1. $f(x) < f(a)$. En esta ocasión, $x \in (a; b)$ y $f(x) < f(a) < f(b)$. Ahora, considérese el subintervalo $[x; b]$, en el cual la función f sigue siendo continua. Por el Teorema del Valor Intermedio (Ejemplo 4.2.10) existe $c \in (x; b)$ tal que $f(c) = f(a)$. Pero nótese que $a < x < c < b$, con lo cual $a < c$; es decir, simplemente $a \neq c$; sin embargo, por la inyectividad de la función f, si $f(c) = f(a)$, se debe cumplir entonces que $c = a$. Contradicción.

Subcaso 1.2. $f(b) < f(x)$. En este orden de cosas, $x \in (a; b)$ y $f(a) < f(b) < f(x)$. Procediendo de la misma manera que en el subcaso anterior, ahora en el subintervalo $[a; x]$, siempre por el Teorema del Valor Intermedio debe existir $c \in (a; x)$ tal que $f(c) = f(b)$. Otra vez la inyectividad de la función f aplicada a la igualdad previa implica que $c = b$, al tiempo que $c < b$. Contradicción.

En resumen, el suponer que existe $x \in [a; b]$ tal que, o bien $f(x) < f(a)$, o bien $f(b) < f(x)$, lleva a contradicción. Luego, para todo $x \in [a; b]$, se tiene que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

Caso 2. $f(b) < f(a)$. El resultado, que para este caso es que, para todo $x \in [a; b]$, se cumple que $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$, se obtiene en forma directa aplicando el caso 1 a la función $-f$.

En conclusión, de los dos casos se consigue probar que, para todo $x \in [a; b]$, o bien $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, o bien $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$.

(Monotonía) A continuación, probemos que f es, o bien estrictamente creciente, o bien estrictamente decreciente. Sean $c, d \in [a; b]$, con $c < d$. Por el resultado ya demostrado aplicado al intervalo $[c; d]$, tenemos que, para todo $x \in [c; d]$, o bien $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$, o bien $f(d) \leq f(x) \leq f(c)$; en particular, o bien $f(c) \leq f(d)$, o bien $f(d) \leq f(c)$. Sin embargo, como $c < d$ y f es inyectiva, se debe cumplir que $f(c) \neq f(d)$; con lo cual, o bien $f(c) < f(d)$, o bien $f(d) < f(c)$. Dado que esto ocurre para *cualesquier* $c, d \in [a; b]$, con $c < d$, en el primer caso concluimos que f es estrictamente creciente, en tanto que en el segundo que f es estrictamente decreciente. ■

Subconjunto denso en el conjunto de los números reales

Definición 4.2.13. Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}$. Se dice que D es *denso en* $\mathbb{R}$ si ocurre que, para cualesquier $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, existe $d \in D$ tal que $a < d < b$.

La idea es probar que los subconjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$. Para demostrar lo anterior, probaremos primeramente el siguiente resultado auxiliar.

Ejemplo 4.2.14. Sea $a \in \mathbb{R}$, con $1 < a$. Probar que existe un entero positivo n tal que $n - 1 \leq a < n$.

Demostración. Definamos

$$E = \{m : m \text{ es entero positivo y } a < m\}.$$

Aplicando la propiedad arquimediana de los números reales (ver Ejemplo 2.2.22 del Capítulo 2) entre 1 y a, tenemos que existe un entero positivo p tal que $a < p1$; es decir, $a < p$; por lo que $E \neq \emptyset$. Por el Principio de Buen Orden, el conjunto E debe tener un elemento mínimo. Sea n el elemento mínimo de E; por lo cual, en particular, $a < n$. Ahora bien, dado que $1 < a$, ocurre que $n > 1$; lo que hace que $n - 1$ sea también entero positivo. Pero entonces, aunado esto a que $n - 1 < n$, asimismo por la definición de n sucede que $n - 1 \notin E$. En resumen, $n - 1$ es entero positivo y $n - 1 \notin E$; con lo que $n - 1 \leq a$. Por tanto, $n - 1 \leq a < n$. ■

Densidad del conjunto de los números racionales en el conjunto de los números reales

Ejemplo 4.2.15. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Probar que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$.

Demostración. Se realizará la demostración considerando los siguientes cuatro casos: $0 < a$, $a = 0$, $a < 0 < b$, $a < b \leq 0$.
Caso 1. En este caso $0 < a$. Como $a < b$, tenemos que $0 < b - a$. Por el Ejemplo 2.2.22, existe un entero positivo n tal que $1 < n(b - a)$; mejor aún, $1 < nb - na$, o, equivalentemente, $1 + na < nb$. Aplicando el Ejemplo 4.2.14 a na, ocurre que existe un entero positivo m tal que $m - 1 \leq na < m$. Se sigue que $m \leq 1 + na$. De las desigualdades anteriores se concluye que $na < m < nb$; de donde $a < m/n < b$. Tomando $r = m/n$ se consigue el resultado para el caso en que $0 < a$.
Caso 2. En esta ocasión $a = 0$. Se tiene que $a = 0 < b$; por lo que $0 < b/2$ y, además, $0 < b/2 < b$. Aplicando a esta cadena de desigualdades el caso anterior, se tiene que existe un racional r que cumple $a = 0 < b/2 < r < b$; lo que prueba el caso $a = 0$.
Caso 3. En esta situación $a < 0 < b$. Tomando $r = 0$ se demuestra el resultado.
Caso 4. En esta etapa $a < b \leq 0$. Luego, $0 \leq -b < -a$. Por los casos 1 y 2 existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $0 \leq -b < r < -a$. Lo anterior implica que $a < -r < b \leq 0$, y ocurre que $-r \in \mathbb{Q}$.

En conclusión, en cualquier caso se ha logrado probar que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$. ■

Densidad del conjunto de los números irracionales en el conjunto de los números reales

Ejemplo 4.2.16. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Probar que existe $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $a < s < b$.

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Multiplicando por $\sqrt{2}$ ambos lados de la desigualdad anterior obtenemos $a\sqrt{2} < b\sqrt{2}$. Ahora, por el Ejemplo 4.2.15, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a\sqrt{2} < r < b\sqrt{2}$, o equivalentemente, $a < r/\sqrt{2} < b$. Al respecto de r surgen dos casos: o bien $r \neq 0$, o bien $r = 0$. Revisemos cada una de estas opciones con detalle.
Caso 1. $r \neq 0$. En este caso, por el Ejercicio V del Capítulo 2 tenemos que $r/\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; lo que demuestra el resultado al tomar $s = r/\sqrt{2}$.
Caso 2. $r = 0$. En esta ocasión, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $\sqrt{2}a < 0 < q < \sqrt{2}b$; por lo que $a < q/\sqrt{2} < b$. Luego, podemos hacer $s = q/\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

En conclusión, en cualquier caso se ha logrado probar que existe $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $a < s < b$. ■

4.3. Ejercicios

I. Utilizar Demostración por Casos para probar que las inecuaciones cuadráticas siguientes tienen los conjuntos solución indicados.

1. $0 < (x - 6)(x + 7)$; $(-\infty; -7) \cup (6; +\infty)$.
2. $(3x - 1)(6x - 5) < 0$; $(1/3; 5/6)$.

3. $(7-4x)(-2+5x)\leq 0$; $(-\infty;2/5]\cup[7/4;+\infty)$.
4. $(3x-2)(x-9)\geq 0$; $(-\infty;2/3]\cup[9;+\infty)$.
5. $0>(-5-7x)(4-11x)$; $(-5/7;4/11)$.
6. $x^2-4x-5>0$; $(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$.
7. $10x+x^2-1<-25-x$; $(-8;-3)$.
8. $-12x^2-11x+37\leq -13x^2-29x-43$; $[-10;-8]$.
9. $y^2-12>7y^2-17y$; $(4/3;3/2)$.
10. $-1+4x-3x^2\geq 4+7x-5x^2$; $(-\infty;-1]\cup[5/2;+\infty)$.

II. Sean $x, y\in\mathbb{R}$. Probar lo siguiente:

1. $\text{Máx}\,(x,y)=(x+y+|x-y|)/2$.
2. $\text{Mín}\,(x,y)=(x+y-|x-y|)/2$.

III. Sean $\mathbb{Z}$ el *conjunto de los números enteros* y $a,b\in\mathbb{Z}$. Probar que ab es impar si, y sólo si, ambos a y b son impares.
IV. Sea $x\in\mathbb{R}$. Probar que $|x|=\sqrt{x^2}$.

Capítulo 5

EXHIBICIÓN DE CONTRAEJEMPLO

5.1. Introducción

5.1.1. Presentación del método

En la Historia de las Matemáticas se han expuesto los logros que han estimulado el avance de la misma. Sin embargo, en esta búsqueda de conocimientos, no todo resultado ha sido completamente válido, pues algunas "conjeturas" no se cumplen satisfactoriamente y, por su incapacidad para ser aplicadas de forma general, han sido derribadas por contraejemplos que a su vez mejoran la conjetura y se convierten en ejemplos de la conjetura mejorada. Para ilustrar el método, nos referimos a un tipo de proposición compuesta por p y q; la proposición condicional "si p, entonces q", en la cual,

$$p \text{ es una condición suficiente para } q$$

y

$$q \text{ es una condición necesaria para } p.$$

En este caso, la condicional se cumple efectivamente porque p es una condición suficiente para q. Sin embargo, es importante recalcar que su recíproca, es decir la proposición dada por "si q, entonces p", no siempre resulta verdadera. No obstante, la sospecha no garantiza nada seguro. Es en este punto donde se origina la necesidad de un método para evaluar la validez de una conjetura y verificar si el valor de verdad verdadero de la condicional se da también en la recíproca. El método elegido es el conocido *Método de Exhibición de Contraejemplo*, el cual no sigue un patrón o algoritmo; se puede calificar como un método espontáneo, nacido de la genialidad o persistencia del matemático. La conjetura puede ignorar la sospecha; no así con el contraejemplo, el cual representa una crítica sustentable.

Como ya se explicó anteriormente, el proceso de encontrar un contraejemplo muchas veces requiere de ingenio. Aunque, en algunas ocasiones, la magia de las Matemáticas puede sorprender, pues al tratar de probar una conjetura en la cual no se percibe algún contraejemplo, pero, a pesar de ello, ocurre que la conjetura es, de plano, falsa, en vez de llegar a buen fin la prueba, ésta conduce de manera inesperada a un contraejemplo (ver [12]). Es en este contexto de investigación en donde podemos comparar al Método de Exhibición de Contraejemplo con el Método Analítico, ya que el segundo se limita a probar la conjetura sin mejorarla, en tanto que el Método de Exhibición de Contraejemplo ofrece la opción de *mejorar* la conjetura.

Cabe mencionar que en la Historia de las Matemáticas este método ha sido de gran utilidad. Como ejemplo tenemos una conjetura de Leonard Euler (1707-1783) (ver [18]). Éste afirmó que no había soluciones para la siguiente ecuación diofantina (esto es, una ecuación en la cual se requieren soluciones enteras positivas),

$$x^4 + y^4 + z^4 = w^4.$$

Pasaron doscientos años sin que alguien lograra probar la conjetura o proveyera algún contraejemplo; obviamente la falta de éste era una evidencia en favor de la conjetura. Sin embargo, en 1988, Noam Elkies, de la Universidad de Harvard, encontró la siguiente solución,

$$2682440^4 + 15365639^4 + 187960^4 = 20615673^4.$$

Además probó que existían infinidad de soluciones.

5.1.2. Estructura del método

Cuando falla la demostración de una proposición condicional por el Método Directo, puede surgir un contraejemplo; sobre todo, cuando este fracaso conduce al planteamiento de una determinada pregunta, cuya respuesta no es única. En esta situación, se puede elegir cualquier par de soluciones a ésta para conformar un contraejemplo.

5.1.3. Sugerencias para su uso

Este método tiene especialmente éxito cuando se trata de probar propiedades negativas. En este caso, la propiedad afirmativa correspondiente debe tener al inicio una cuantificación compuesta exclusivamente de cuantificadores universales afirmativos; es decir, debe ser de la forma "para todo ..., ..., para todo ..."

5.2. Ejemplos

Con el Método de Exhibición de Contraejemplo se puede demostrar la no inyectividad de una función.

Función no inyectiva

Definición 5.2.1. Sean A y B dos conjuntos. Una función $f : A \longrightarrow B$ se llama *no inyectiva*, si existen $x_1, x_2 \in A$, tales que $x_1 \neq x_2$, pero $f(x_1) = f(x_2)$.

En la práctica la demostración de no inyectividad es una clara aplicación del Método de Exhibición de Contraejemplo, ya que se tienen que encontrar dos valores concretos x_1 y x_2, distintos, pero para los cuales $f(x_1) = f(x_2)$.

A continuación, damos una manera efectiva de construir el par de valores.

Regla para obtener el contraejemplo en las demostraciones de no inyectividad

Regla 5.2.2. Sea f una función real de variable real.

1. Tómese, digamos al azar, un elemento x_1 del dominio de la función f.
2. Evalúese este elemento x_1 en f obteniendo $f(x_1) = b$.
3. Entáblese la ecuación $f(x) = b$ y "despéjese" x en términos de b.
4. Si este despeje provee, al menos, de dos valores para x, uno de ellos será la constante x_1 ya seleccionada, en tanto que el otro será el valor alternativo x_2 buscado; si al hacer el despeje de la ecuación $f(x) = b$ únicamente se consigue un valor, hay que seleccionar otro elemento x_1 y volver al paso 2.

Al terminar de aplicar la regla anterior no hay que olvidar que es necesaria después la comprobación rutinaria de que $f(x_1) = f(x_2)$.

Ejemplo 5.2.3. Probar que la función $f(x) = 2x^2 + 5x - 1$, tal que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, no es inyectiva.

Demostración. Tomemos, por ejemplo, $x_1 = 0$. Evaluando,

$$f(x_1) = f(0) = 2(0)^2 + 5(0) - 1 = -1.$$

Entablemos ahora la ecuación

$$f(x) = -1.$$

Sustituyendo $f(x)$ tenemos que

$$2x^2 + 5x - 1 = -1.$$

A continuación, procedamos a despejar x.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x - 1 + 1 &= 0. \\ 2x^2 + 5x &= 0. \\ x(2x + 5) &= 0. \end{aligned}$$

Aquí se tienen dos casos:

$$\text{o bien} \quad x = 0, \quad \text{o bien} \quad 2x + 5 = 0.$$

Luego,

$$\text{o bien} \quad x = 0, \quad \text{o bien} \quad x = -\frac{5}{2}.$$

Eliminamos el valor $x = 0$, ya que es el que corresponde a x_1; pero el otro número es el que necesitamos. Por tanto, hacemos $x_2 = -5/2$ y efectuamos la comprobación.

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f\left(-\frac{5}{2}\right) = 2\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 5\left(-\frac{5}{2}\right) - 1 = 2\left(\frac{25}{4}\right) + 5\left(-\frac{5}{2}\right) - 1 = \frac{50}{4} - \frac{25}{2} - 1 = \frac{50 - 50 - 4}{4} \\ &= -\frac{4}{4} = -1. \end{aligned}$$

De donde $x_1 = 0 \neq -5/2 = x_2$ y, sin embargo, $f(x_1) = -1 = f(x_2)$. Por tanto, f no es inyectiva. ■

Ejemplo 5.2.4. Probar que la función

$$g(x) = \frac{-5}{-2x^2 + 6x - 4},$$

tal que $g : \mathbb{R}\setminus\{1, 2\} \longrightarrow \mathbb{R}$, no es inyectiva.

Demostración. Elíjase, por ejemplo, $x_1 = 0$. Evaluando,

$$g(x_1) = g(0) = \frac{-5}{-2(0^2) + 6(0) - 4} = \frac{5}{4}.$$

Entablemos ahora la ecuación

$$g(x) = \frac{5}{4}.$$

Sustituyendo $g(x)$ tenemos que

$$\frac{-5}{-2x^2 + 6x - 4} = \frac{5}{4}.$$

A continuación, procedamos a despejar x.

$$\begin{aligned} \frac{-1}{-2x^2 + 6x - 4} &= \frac{1}{4}. \\ \left(\frac{-1}{-2x^2 + 6x - 4}\right)^{-1} &= \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}. \\ \frac{-2x^2 + 6x - 4}{-1} &= 4. \\ 2x^2 - 6x + 4 &= 4. \\ 2x^2 - 6x + 4 - 4 &= 0. \\ 2x^2 - 6x &= 0. \\ 2x(x - 3) &= 0. \end{aligned}$$

Aquí se tienen dos casos:

$$\text{o bien} \quad x = 0, \quad \text{o bien} \quad x - 3 = 0.$$

Luego,

$$\text{o bien} \quad x = 0, \quad \text{o bien} \quad x = 3.$$

Eliminamos $x_1 = 0$ y evaluamos g en $x_2 = 3$.

$$g(x_2) = g(3) = \frac{-5}{-2(3^2) + 6(3) - 4} = \frac{-5}{-2(9) + 18 - 4} = \frac{-5}{-18 + 14} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}.$$

De donde $x_1 = 0 \neq 3 = x_2$ y, no obstante, $g(x_1) = 5/4 = g(x_2)$. Por tanto, g no es inyectiva. ■

Para el siguiente ejemplo referente a la imagen de un conjunto bajo una función, favor de consultar la definición correspondiente proporcionada en el primer capítulo.

Acerca de la intersección y las imágenes de funciones

Observación 5.2.5. En el Ejemplo 1.2.8 del Capítulo 1 probamos que la imagen bajo una función de una intersección está contenida en la intersección de las imágenes. El recíproco de esta afirmación es, sin embargo, falso. En el siguiente ejemplo se provee de un contraejemplo.

No preservación de la intersección en imágenes

Ejemplo 5.2.6. Sean: $A = (-1;0)$, $B = (0;1)$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Usaremos este par de intervalos y esta función como un contraejemplo para probar que, en general, $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

Demostración. La intersección de los dos intervalos A y B es vacía; es decir,

$$A \cap B = (-1;0) \cap (0;1) = \emptyset.$$

Ahora, por el Ejemplo 2.2.7 del Capítulo 2, tenemos que

$$f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset.$$

Para continuar, hay que evaluar f en A. Para lograr esto, usaremos equivalencias. Sea

$$x \in A = (-1;0).$$

Por definición de intervalo abierto obtenemos

$\Longleftrightarrow$

$$-1 < x < 0.$$

Multiplicando por -1 todos los lados de la desigualdad tenemos que

$\Longleftrightarrow$

$$0 < -x < 1.$$

Elevando al cuadrado todos los miembros conseguimos

$\Longleftrightarrow$

$$0^2 < (-x)^2 < 1^2.$$

$\Longleftrightarrow$

$$0 < x^2 < 1.$$

Como $f(x) = x^2$, sustituyendo en la desigualdad previa tenemos que

$\Longleftrightarrow$

$$0 < f(x) < 1.$$

Por definición de intervalo abierto conseguimos

$\Longleftrightarrow$

$$f(x) \in (0;1).$$

En resumen,

$$x \in A \quad \text{si, y sólo si,} \quad f(x) \in (0;1).$$

Luego,

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} = (0;1).$$

Análogamente se prueba que

$$f(B) = (0;1).$$

De donde

$$f(A) \cap f(B) = (0;1) \cap (0;1) = (0;1).$$

Luego,

$$f(A \cap B) = \emptyset \neq (0;1) = f(A) \cap f(B).$$

Por tanto, en general,

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

∎

Para el siguiente ejemplo que emplea la operación de composición de funciones, favor de consultar la definición respectiva provista en el primer capítulo.

No conmutatividad de la composición

Ejemplo 5.2.7. Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2x - 5$ y $g(x) = 4x + 3$. Usaremos este par de funciones reales como un contraejemplo para probar que, en general, la composición de funciones no es conmutativa.

Demostración. Los esquemas generales de evaluación para estas funciones son

$$f(\square) = 2(\square) - 5 \quad \text{y} \quad g(\triangle) = 4(\triangle) + 3.$$

Procedamos a calcular las dos composiciones entre ellas.

$$\begin{array}{rcl} (f \circ g)(x) & = & f(g(x)) = f(4x+3) = 2(4x+3) - 5 = 8x + 1. \\ (g \circ f)(x) & = & g(f(x)) = g(2x-5) = 4(2x-5) + 3 = 8x - 17. \end{array}$$

Luego, para todo número real x ocurre que

$$(f \circ g)(x) = 8x + 1 \neq 8x - 17 = (g \circ f)(x).$$

Es decir, $f \circ g \neq g \circ f$. Por tanto, en general, la composición de funciones no es conmutativa. ■

En los tres ejemplos siguientes referentes a funciones reales de variable real se emplean los conceptos de límite, continuidad y derivada. Al respecto, favor de consultar las definiciones respectivas dadas en el primer capítulo.

Acerca de la continuidad y la continuidad uniforme

Observación 5.2.8. Al finalizar la Definición 2.2.12 del Capítulo 2 referente a la continuidad uniforme en funciones reales de variable real, hacíamos notar que toda función de este tipo es también continua en todo número del mismo conjunto. El reverso de esta aseveración es, no obstante, falso. En el siguiente ejemplo se proporciona un contraejemplo.

Continuidad pero no continuidad uniforme

Ejemplo 5.2.9. Sea $G(x) = 1/x$, tal que $G : (-1; 0) \cup (0; 1) \longrightarrow \mathbb{R}$. Usaremos esta función como contraejemplo para probar que existen funciones reales de variable real continuas en todo su dominio, pero que no son uniformemente continuas.

Demostración. En el Ejemplo 2.2.13 del Capítulo 2 probamos que esta función no es uniformemente continua. Veamos a continuación que es continua en cualquier número de su dominio. Para esto, vamos a echar mano del Ejemplo 1.2.18 del Capítulo 1 que establece que toda función real de variable real que sea diferenciable en un número es continua en ese mismo número. Sea $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$; por lo que, en particular, $x \neq 0$. Derivemos la función en x utilizando fórmulas de derivación.

$$G'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[G(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-1}\right) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Luego, G es diferenciable en todo $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$. De donde G es continua en todo su dominio.

En resumen, G es continua en todo su dominio y, no obstante, no es uniformemente continua. ■

Acerca de la continuidad y la derivabilidad

Observación 5.2.10. En el Ejemplo 1.2.18 del Capítulo 1 probamos, para el caso de funciones reales de variable real, que toda función diferenciable en un número es continua en dicho número. El recíproco de esta afirmación es, sin embargo, falso. En el siguiente ejemplo se provee del contraejemplo correspondiente.

Continuidad pero no derivabilidad en cero

Ejemplo 5.2.11. Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = |x|$. Utilizaremos esta función como un contraejemplo para probar que existe una función real de variable real que es continua en todos los números reales y que, sin embargo, no es derivable en cierto número real.

Demostración. En el Ejemplo 4.2.7 del Capítulo 4 probamos que esta función es derivable en todo número distinto de cero. Ahora, por el Ejemplo 1.2.18 del Capítulo 1, sabemos que toda función diferenciable en un número es continua en dicho número. Luego, esta función en cuestión es también continua en todo número diferente de cero. De lo anterior, dado que la función es tanto derivable como continua en todo número distinto de cero, únicamente falta aclarar la situación de ambas propiedades en el cero. Examinémoslas a continuación con detalle.
(Continuidad) En este caso, F sí está definida en 0, ya que $F(0) = |0| = 0$. Averigüemos ahora si existe el límite de, por ejemplo, $F(h)$ cuando h tiende hacia 0. Dado que la función valor absoluto está definida por trozos, usaremos los respectivos límites unilaterales.
(Límite por la derecha) Al tomar el límite cuando h tiende hacia 0 por la derecha, por definición en este caso $h > 0$. Pero entonces, $F(h) = |h| = h$. Luego, tomando este límite y sustituyendo el valor de la función obtenemos

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+} F(h) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} h = 0.$$

(Límite por la izquierda) En este caso de límite en el que h tiende hacia 0 por la izquierda tenemos que $h < 0$. Así, $F(h) = |h| = -h$. Calculando este límite y sustituyendo el valor de la función conseguimos

$$\lim_{h \longrightarrow 0^-} F(h) = \lim_{h \longrightarrow 0^-} (-h) = -0 = 0.$$

Como

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+} F(h) = 0 = \lim_{h \longrightarrow 0^-} F(h),$$

por el Ejemplo 4.2.6 del Capítulo 4, tenemos que $\lim_{h \longrightarrow 0} F(h) = 0$. En otras palabras, el límite también existe. Finalmente, dado que

$$\lim_{h \longrightarrow 0} F(h) = 0 = F(0),$$

concluimos que F es continua en cero. De donde F es continua en todos los números reales.
(Derivabilidad) Apliquemos la definición de derivada a F en el número cero.

$$F'(0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{|h|}{h}.$$

Desafortunadamente, en el Ejemplo 2.2.9 del Capítulo 2 probamos que este límite no existe. Luego, F no es diferenciable en cero.

En resumen, F es continua en todos los números reales y, no obstante, no es derivable en cero. ■

Derivabilidad con continuidad pero no doble derivabilidad en cero

Ejemplo 5.2.12. Probar que existe una función real de variable real la cual es derivable con continuidad en todos los números reales y que, sin embargo, no es dos veces diferenciable en cierto número real.

Demostración. En el Ejemplo 4.2.8 del Capítulo 4 probamos que la función real de variable real dada por

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & \text{si } x \geq 0, \\ -\dfrac{x^2}{2}, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

es derivable con continuidad en todos los números reales, ya que su derivada es precisamente la función valor absoluto; esto es, $G'(x) = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Ahora bien, en el Ejemplo 5.2.11 demostramos que la función valor absoluto no es diferenciable en cero. Así pues, tenemos que, respectivamente, la función G no es dos veces derivable en cero. ■

Para el siguiente ejemplo referente al álgebra lineal de espacios euclidianos, consúltense las definiciones respectivas provistas en el primer capítulo.

Acerca de la independencia lineal y la ortogonalidad

Observación 5.2.13. En el Ejemplo 1.2.29 del Capítulo 1 demostramos, para el caso de los espacios euclidianos, que todo conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente. El reverso de esta aseveración es, no obstante, falso. En el siguiente ejemplo se proporciona un contraejemplo.

Independencia lineal pero no ortogonalidad

Ejemplo 5.2.14. Considérese $\{(3,4),(5,-2)\}$. Usaremos este subconjunto de $\mathbb{R}^2$ como contraejemplo para probar que, en general en los espacios euclidianos, existen conjuntos linealmente independientes de vectores que no son conjuntos ortogonales.

Demostración. **(Independencia lineal)** Tomemos $x, y \in \mathbb{R}$ y entablemos la ecuación

$$x(3,4) + y(5,-2) = (0,0).$$

Efectuando las operaciones obtenemos

$$(3x+5y, 4x-2y) = (0,0).$$

Igualando coordenada a coordenada arribamos al sistema de ecuaciones lineales siguiente,

$$\begin{cases} 3x+5y=0, \\ 4x-2y=0. \end{cases}$$

La única solución de este sistema es $x=y=0$. Luego, el conjunto $\{(3,4),(5,-2)\}$ es linealmente independiente.
(No ortogonalidad) Efectuemos el producto punto de los dos vectores.

$$(3,4)\cdot(5,-2) = (3)(5) + (4)(-2) = 7 \neq 0.$$

De donde el conjunto $\{(3,4),(5,-2)\}$ no es ortogonal.

En síntesis, $\{(3,4),(5,-2)\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores de $\mathbb{R}^2$ que no es ortogonal. ■

Intervalo cerrado propio

Definición 5.2.15. Sea H un intervalo cerrado; por lo que existen $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$, tales que $H = [a; b]$. Se dice que H es *propio* si $a < b$.

Para los siguientes ejemplos topológicos, consúltense las definiciones dadas en el primer capítulo.

El ejemplo que viene a continuación se utilizará para lograr una simplificación importante en la prueba del que viene después de él. No obstante, en su demostración no se requiere del Método de Exhibición de Contraejemplo.

Los interiores de intervalos cerrados propios como intervalos abiertos

Ejemplo 5.2.16. Probar que todo intervalo cerrado propio tiene como interior el intervalo abierto correspondiente.

Demostración. Sea H un intervalo cerrado propio; por lo que existen $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, tales que $H = [a; b]$. Hay que probar que $H^\circ = [a;b]^\circ = (a;b)$. Para empezar, tenemos que

$$(a;b) \subset [a;b] = H.$$

Dado que $a < b$, ocurre que el intervalo abierto considerado no es vacío; por lo que por el Ejemplo 3.2.9 del Capítulo 3, sucede que $(a;b)$ es conjunto abierto. Luego, todos sus elementos son puntos interiores de él. Así, por transitividad sobre la contención anterior, concluimos que todos los elementos de $(a;b)$ son también puntos interiores de H. En símbolos,

$$(a;b) \subset H^\circ.$$

Con esto, únicamente falta probar que ni a ni b son puntos interiores de H. Atendamos el caso de b. Sea

$$E \quad \text{un intervalo abierto que contenga a} \quad b.$$

Por ello, existen $c, d \in \mathbb{R}$, con $c < b < d$, tales que

$$b \in (c;d) = E. \tag{5.1}$$

Tenemos que

$$b < \frac{b+d}{2}, \quad \text{que} \quad \frac{b+d}{2} \in (c;d) \quad \text{y que, sin embargo,} \quad \frac{b+d}{2} \notin [a;b] = H.$$

Luego,

$$(c;d) \not\subset [a;b] = H.$$

Pero entonces, por (5.1), ocurre también que

$$E \not\subset [a;b] = H.$$

Dado que esto sucede para *todo* intervalo abierto que contiene a b, concluimos que

$$b \quad \text{no es punto interior de} \quad [a;b] = H.$$

Análogamente, se prueba que

$$a \quad \text{no es punto interior de} \quad [a;b] = H.$$

De donde el conjunto de puntos interiores de H se encuentra exclusivamente contenido en el intervalo abierto $(a;b)$, respecto del cual ya hemos visto que no sobran puntos de él en el interior H; por lo que

$$H^{\circ} = [a;b]^{\circ} = (a;b)\,.$$

■

Acerca de la unión y el interior de un conjunto

Observación 5.2.17. En el Ejemplo 1.2.33 del Capítulo 1 probamos, para el caso de los espacios euclidianos, que la unión de interiores está contenida en el interior de la unión. El recíproco de esta afirmación es, sin embargo, falso. En el siguiente ejemplo se provee de un contraejemplo.

No preservación de la unión en interiores

Ejemplo 5.2.18. Sean $S = [-1;0]$ y $T = [0;1]$. Utilizaremos este par de intervalos como un contraejemplo para probar que, en general, $(S \cup T)^{\circ} \neq S^{\circ} \cup T^{\circ}$.

Demostración. Tenemos que

$$S \cup T = [-1;0] \cup [0;1] = [-1;1]\,.$$

Ahora, por el Ejemplo 5.2.16, ocurre que el interior de un intervalo cerrado propio es el intervalo abierto correspondiente. Esto, aplicado a los intervalos cerrados dados por S, T y $S \cup T$, nos lleva a que

$$S^{\circ} = [-1;0]^{\circ} = (-1;0)\,, \quad T^{\circ} = [0;1]^{\circ} = (0;1) \quad \text{y} \quad (S \cup T)^{\circ} = [-1;1]^{\circ} = (-1;1)\,.$$

Luego,

$$(S \cup T)^{\circ} = (-1;1) \neq (-1;0) \cup (0;1) = S^{\circ} \cup T^{\circ}.$$

Por tanto, en general,

$$(S \cup T)^{\circ} \neq S^{\circ} \cup T^{\circ}.$$

■

La Integral de Riemann y funciones Riemann-integrables

En los cursos de Cálculo Integral estudiamos la *Integral de Riemann* de una función f definida y acotada sobre un intervalo cerrado $[a;b]$, donde $a < b$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Los ejemplos que regularmente estudiamos corresponden a funciones continuas; aunque se nos indica que el conjunto de funciones Riemann-integrables sobre un intervalo cerrado contiene al de las funciones continuas sobre este intervalo. El siguiente resultado (ver [2], Teorema 7.3.12) caracteriza a las funciones Riemann-integrables definidas sobre un intervalo cerrado.

Criterio de Lebesgue para la Riemann-integrabilidad

Teorema 5.2.19. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, y $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, y que es continua sobre $[a;b]$ salvo, quizás, en un conjunto contable (finito o infinito numerable). Ocurre que f es Riemann-integrable sobre $[a;b]$.

Teniendo en consideración que los conjuntos finitos son contables y que el conjunto vacío es finito, se concluye inmediatamente el siguiente:

Corolario 5.2.20. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, y $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Ocurre que f es Riemann-integrable sobre $[a;b]$.

En [14] se demuestra el siguiente:

Teorema 5.2.21. Sean: $a, b, m, M \in \mathbb{R}$, con $a < b$ y $m \leq M$, $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Riemann-integrable, con $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a; b]$, $g : [m; M] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $h = g \circ f$. Ocurre que h es Riemann-integrable sobre $[a; b]$.

Si la función f del teorema anterior es continua el resultado es inmediato ya que la composición de dos funciones continuas es una función continua (ver Ejemplo 1.2.16 del Capítulo 1). Así, una pregunta interesante es

¿si f y g son Riemann-integrables, será $f \circ g$ Riemann-integrable también?

El siguiente ejemplo muestra el caso de dos funciones Riemann-integrables sobre $[0; 1]$ cuya composición no lo es.

No preservación de la Riemann-integrabilidad bajo la composición

Ejemplo 5.2.22. Sean $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones dadas por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ 1, & \text{si } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

y[1]

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{si } x = \dfrac{m}{n}, \text{ con } m \text{ y } n \text{ enteros, } \operatorname{mcd}(m, n) = 1 \text{ y } n > 0, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Usaremos este par de funciones como un contraejemplo para probar que, en general, la composición de funciones Riemann-integrables sobre un intervalo cerrado no necesariamente es Riemann-integrable sobre el mismo intervalo.

Demostración. Para empezar, hay que probar que las funciones f y g son Riemann-integrables sobre $[0; 1]$. Para lograr esto, la herramienta de que disponemos es el Teorema 5.2.19. A su vez, para saber si podemos utilizarlo, necesitamos determinar los dominios de discontinuidad de las funciones f y g. Procedamos a esto.
(Dominio de discontinuidad de f) Para el caso de f, tenemos que esta función es constante a trozos sobre el intervalo $[0; 1]$. De hecho, el único número en el cual no es la función constante 1 es en el cero, donde precisamente vale cero. Así, esta regla de correspondencia únicamente es discontinua en cero; es decir, en un único número. Por lo que su dominio de discontinuidad es finito, y por ende contable.
(Dominio de discontinuidad de g) En el caso de g, dado que también está definida por trozos, cabe considerar tres opciones para un número p en el intervalo: o bien $p = 0$, o bien p es racional en $[0; 1]$, o bien p es irracional en $[0; 1]$. Analicemos cada una de estas situaciones con detalle.
Caso 1. $p = 0$. En esta opción, dado que lo que nos interesa es la posibilidad de discontinuidad, lo que importa a fin de cuentas es que el cero es un número *racional*. Esto es digno de destacarse debido a la *densidad* de los números irracionales en $\mathbb{R}$ (ver Ejemplo 4.2.16 del Capítulo 4), y desde luego en el intervalo $[0; 1]$. Esto significa que, para el cero, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números irracionales en $[0; 1]$ que converge hacia él; esto es,

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0; 1] \quad \text{y} \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = 0.$$

Con esto, calculemos este mismo límite pero aplicado sobre la evaluación de la función g en estos elementos *irracionales* de la sucesión. Procediendo,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} 0 = 0 \neq 1 = g(0) = g\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n\right).$$

En resumen,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} g(x_n) \neq g\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n\right).$$

[1] Utilizaremos la notación $\operatorname{mcd}(m, n) = 1$ como abreviatura para la frase "m y n no tienen divisores primos en común." Por otra parte, por $\mathbb{Q}$ se representará al *conjunto de los números racionales*, en tanto que con $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se denotará al *conjunto de los números irracionales*, tal y como se los define en el Ejercicio V del Capítulo 2.

Desafortunadamente, aplicando el Ejemplo 1.2.21 del Capítulo 1, tenemos que la regla de correspondencia dada por g es discontinua en cero.
Caso 2. $p \in \mathbb{Q} \cap (0;1]$. Similarmente a la situación previa, en éste lo relevante es que p es un número *racional*; de hecho, existen enteros positivos r y s tales que

$$p = \frac{r}{s}, \quad \text{con} \quad \operatorname{mcd}(r,s) = 1, \quad \text{y} \quad s \geq r > 0;$$

por lo que

$$g(p) = g\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{1}{s}.$$

De nueva cuenta, por el Ejemplo 4.2.16 del Capítulo 4, existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números irracionales en $[0;1]$ que converge hacia p; es decir,

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0;1] \quad \text{y} \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} y_n = p.$$

Evaluemos g repitiendo la pauta del caso anterior.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} g(y_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} 0 = 0 \neq \frac{1}{s} = g(p) = g\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} y_n\right).$$

En síntesis,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} g(y_n) \neq g\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} y_n\right).$$

Como era de esperar, nuevamente el Ejemplo 1.2.21 del Capítulo 1 nos asevera que la función g es discontinua en p. Debido a que p representa a *cualquier* número racional en el intervalo $(0;1]$, concluimos que g es discontinua en el conjunto numerable, y por ende contable, dado por $\mathbb{Q} \cap (0;1]$.
Caso 3. $p \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0;1]$. En esta situación, p es *irracional*; por lo cual

$$g(p) = 0.$$

En cuanto al objetivo, se trata de demostrar que la regla de correspondencia dada por g es continua en p. Es decir, que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in [0;1]$,

$$\text{si} \quad |x - p| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |g(x) - g(p)| = |g(x) - 0| = |g(x)| = g(x) < \varepsilon. \tag{5.2}$$

Supongamos, pues, que $x \in [0;1]$ y que $|x - a| < \delta$; esto es, que $x \in (p - \delta; p + \delta) \cap [0;1]$. Mejor aún, debido a que p es irracional (dentro de este caso), sin pérdida de generalidad podemos suponer que δ es lo suficientemente pequeño para que

$$(q - \delta; q + \delta) \subset [0;1];$$

con lo cual

$$(q - \delta; q + \delta) \cap [0;1] = (q - \delta; q + \delta),$$

y así, será suficiente con pedir que $x \in (p - \delta; p + \delta)$. Tomando en cuenta esta delimitación, resulta ahora crucial considerar dos casos para x: o bien x es irracional, o bien x es racional.
Subcaso 3.1. x es irracional. En esta ocasión,

$$g(x) = 0 < \varepsilon.$$

Con lo que se cumple el consecuente de la condicional en (5.2).
Subcaso 3.2. x es racional. En esta situación, existen enteros positivos t y u tales que

$$x = \frac{t}{u}, \quad \text{con} \quad \operatorname{mcd}(t,u) = 1 \quad \text{y} \quad u > t > 0.$$

Además,

$$g(x) = g\left(\frac{t}{u}\right) = \frac{1}{u}.$$

Ahora, por la propiedad arquimediana de los números reales (ver Ejemplo 2.2.22 del Capítulo 2), existe un entero positivo N tal que

$$1 < N\varepsilon.$$

Mejor aún,

$$\frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Así, si $v \geq N$, se tendrá que

$$\frac{1}{v} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Se concluye que existe solamente un número finito de enteros positivos cuyos recíprocos cumplen ser mayores o iguales que ε. Además, dado que $x = t/u$, con $u > t > 0$, sucede que hay también solamente una cantidad *finita* de números racionales $x \in [0;1]$ para los que $g(x) = 1/u \geq \varepsilon$. Tomando δ de tal manera que el intervalo dado por $(p-\delta; p+\delta)$ no contenga a ninguno de estos x, se tendrá que, si $x \in (p-\delta; p+\delta)$, entonces

$$g(x) = \frac{1}{u} < \varepsilon.$$

Luego, eligiendo el $\delta > 0$ adecuado, se vuelve a cumplir el consecuente de la condicional en (5.2).

En resumen de los dos subcasos anteriores, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$\text{si} \quad x \in [0;1] \quad \text{y} \quad \text{si} \quad |x-p| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |g(x) - g(p)| < \varepsilon.$$

De donde la función g es continua en p, para $p \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0;1]$.

En síntesis de los tres casos para p, resulta que la regla de correspondencia dada por g únicamente es discontinua en los casos 1 y 2; es decir, en el conjunto

$$\{0\} \cup (\mathbb{Q} \cap (0;1]) = \mathbb{Q} \cap [0;1].$$

Pero este conjunto es infinito numerable, o sea contable; por lo que g es discontinua en un conjunto contable. En otras palabras, el dominio de discontinuidad de g es un conjunto contable.

En suma de todo lo previo, sucede que ambas funciones f y g únicamente son discontinuas en subconjuntos contables de su dominio dado por $[0;1]$. Teniendo en consideración el Teorema 5.2.19, se concluye que ambas reglas de correspondencia f y g son Riemann-integrables sobre el intervalo $[0;1]$.

Finalmente, efectuando la composición entre f y g conseguimos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0;1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in [0;1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Se sabe que esta función no es Riemann-integrable sobre $[0;1]$ (ver [14]). Por tanto, en general, la composición de dos funciones Riemann-integrables en un intervalo cerrado no necesariamente es Riemann-integrable sobre el mismo intervalo. ■

5.3. Ejercicios

I. Utilizar Exhibición de Contraejemplo para demostrar que las funciones siguientes no son inyectivas:

1. $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$; $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
2. $g(x) = |4x - 3|$; $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
3. $h(x) = 2$; $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
4. $j(x) = \sqrt{5x^2 - 2x + 1}$; $j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
5. $k(x) = \dfrac{1}{9 - x^2}$; $k : \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\} \longrightarrow \mathbb{R}$.
6. $F(x) = 4 - \sqrt[3]{\dfrac{-7}{9|2-x|^5 + 8}}$; $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

7. $G(x) = \left(\dfrac{2 + \sqrt[5]{\dfrac{4}{3 - (x+7)^2}}}{9} \right)^3 - 6$; $G : \mathbb{R} \setminus \{-7\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

8. $H(x) = 2x^4 + 7x^2 - 5$; $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

9. $J(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 5} + 7$; $J : (-\infty; 1] \cup [5; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

10. $K(x) = \dfrac{-11}{2x^2 - x + 3}$; $K : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

II. Se sabe que si a y b son números racionales, entonces $a + b$, ab y a/b, si $b \neq 0$, también lo son. Ahora, si a y b son números irracionales, ¿ocurrirá también que $a + b$, ab y a/b serán números irracionales? En caso contrario, dar un contraejemplo para cada operación.

III. Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones reales dadas por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ -1, & \text{si } x < 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x^2 = 1, \\ 0, & \text{si } x^2 \neq 1. \end{cases}$$

Probar que f es discontinua en 0, que g es discontinua en $f(0)$ y que, sin embargo, $g \circ f$ sí es continua en 0.

Capítulo 6

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

6.1. Introducción

6.1.1. Presentación del método

En este capítulo examinamos el método elemental de demostración titulado *Inducción Matemática*. Es importante aclarar, para empezar, que de las seis técnicas elementales de prueba, ésta es la única de ellas que fue *completamente desconocida* por los matemáticos de la antigüedad y sus sucesores medievales; en otras palabras, fue lo único que en cuanto a argumentaciones matemáticas elementales demostrativas se dignaron dejar éstos para la posteridad. Así las cosas, se considera que su "inventor" fue el matemático siciliano Franciscus Maurolicus (1494-1575) (ver [7]), quien la utilizó en su libro "Aritmética", publicado en 1575, para demostrar, entre otras cosas, que para todo entero positivo n,

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2. \tag{6.1}$$

Sin embargo, respecto a este hecho, hay que hacer nuevamente algunas precisiones pertinentes. Para iniciar, la cuestión relativa a la notación. A pesar de la falsa impresión que puede dar la formulación de la relación (6.1) provista para ejemplificar lo que Maurolicus consiguió, pero expresada en términos de nuestra sofisticadísima notación actual –esto último orientado a facilitar su comprensión al lector moderno–, hay que tener en cuenta que, en la época de este autor, las cuestiones matemáticas eran dadas casi exclusivamente empleando *palabras*. Es decir, que en el libro de Maurolicus, esta relación debía formularse aproximadamente en los siguientes términos: "la suma de una cierta cantidad de números (enteros positivos) impares (iniciales) equivale a su cantidad (esto es, a su número) multiplicada por sí misma." Esperamos que esta aclaración permita apreciar mejor los demás considerandos que a continuación se dan. Prosiguiendo, la segunda precisión que es necesario hacer tiene que ver con el mismo método de la Inducción Matemática al apreciarlo en tres aspectos: estructura, denominación y uso. En cuanto al primer aspecto, la estructura –nos referimos a su "formato" considerándolo íntegramente como una técnica de prueba–, es claro que una herramienta tan elaborada como lo puede ser todo un método de demostración, difícilmente puede lograr la perfección al "nacer"; esto fue efectivamente lo que les ocurrió a las pruebas por inducción de Maurolicus, las cuales únicamente estaban delineadas en términos generales. Esto, aunado a la formulación meramente *hablada* de las matemáticas de su época, tenía, por fuerza, que dificultar el seguimiento de las argumentaciones. Haciendo un paréntesis, a la distancia bastaría con agradecerle a este autor tan siquiera que se le haya ocurrido la idea de la prueba por inducción, y lamentar el hecho de que nadie antes de él la haya vislumbrado. Continuando, uno de los seguidores de Maurolicus que contribuyó a hacer más clara la estructura del método fue el matemático francés Blaise Pascal (1623-1662), quien lo empleó para construir el, así llamado, *Triángulo de Tartaglia* o *de Pascal* (ver [7]). No obstante, fueron necesarios siglos enteros de difusión, aplicación y sobre todo, refinamiento en la notación matemática los que permitieron que, a finales del siglo XIX, se lograra la formulación que utilizamos actualmente para la Inducción Matemática (ver, más adelante, el Principio 6.1.2).

El segundo aspecto a considerar en este método corresponde a su denominación; es decir, a la frase "Inducción Matemática" propiamente dicha. A estas alturas, no es de extrañar el hecho de que ni Maurolicus ni los que le siguieron se refirieran a esta técnica de prueba de aquella manera; y es que, efectivamente, las pocas veces que se tomaban la molestia de nombrarla lo hacían utilizando simplemente el vocablo "inducción" (ver [13]). Nuevamente, es de considerarse que el paso aparentemente simple del vocablo anterior a la frase actualmente en uso lleva implícita una intención deliberada de *distanciamiento*, que intenta advertirnos que, con ellas, se está haciendo referencia a procesos *enteramente distintos*. A fin de poder apreciar la diferencia entre los dos conceptos involucrados, es conveniente rememorar el uso tradicional de la palabra "inducción" como opuesto al vocablo "deducción." Así, se decía que se estaba haciendo una *deducción* o *procedimiento deductivo*, cuando a partir de una proposición universal se conseguía una particular. Por ejemplo, del enunciado general "todos los seres humanos son mortales", se podía obtener por deducción el enunciado particular "Aristóteles es mortal." La inducción, por el contrario, requiere que se haya comprobado una cierta proposición para absolutamente *todos* sus casos particulares, para poder concluir la proposición universal respectiva correspondiente. No obstante, el novedoso método de demostración que Maurolicus había ideado no requería, de ninguna manera, el recuento pormenorizado de todos los casos particulares, sino que utilizaba una manera ingeniosa de trasladar la verificación de una propiedad, de un cierto elemento, a su consecutivo; lo cual puede apreciarse claramente en el paso **(b)** de su presentación moderna (ver, más adelante, el Principio 6.1.2). Como se ve, bajo ninguna circunstancia el proceso anteriormente descrito se puede identificar con una inducción, en el sentido tradicional de la palabra; por lo que estaba suficientemente justificado el empleo de una nueva terminología para aquél. Una vez aclarado esto, arribamos finalmente al autor de la designación actual. Así, tenemos que el acuñador de la frase "Inducción Matemática" para esta técnica de prueba fue el matemático Augustus de Morgan (1806-1871), el cual empleó ésta al final de un artículo homónimo (ver [7]). Sin embargo, la inercia de seguirla llamando llanamente "inducción" continuó a todo lo largo del siglo XIX, para concluir obteniendo aceptación amplia la denominación actualmente en uso únicamente hasta el siglo XX.

Llegamos ahora al tercer aspecto que nos hemos propuesto considerar en la Inducción Matemática, y que se refiere a su *uso*. Al terminar de revisar el aspecto de la estructura de este método de demostración, indicábamos que fue hasta finales del siglo XIX cuando esta técnica de prueba obtuvo su formato contemporáneo. En efecto, esto fue obra del matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932). Abundando en el trabajo de este autor, Peano consiguió, en aquella época, estructurar algebraicamente al conjunto de los números enteros positivos, empleando para esto lo que actualmente se conoce como los *Postulados de Peano* (ver [1]). En este grupo de cinco enunciados, sobresale el último de ellos, el cual es más conocido desde entonces con el nombre de *Principio de Inducción Plena*, y que es un caso particular, pero eminente, del Método de Inducción Matemática. Dicho postulado reza como sigue.

Principio de Inducción Plena

Postulado 6.1.1. Una proposición $p(n)$ es válida para todo número entero positivo n, si se cumplen las condiciones siguientes:

(a) $p(1)$ es válida.

(b) Si $p(k)$ es válida, entonces $p(k+1)$ es válida.

Al antecedente de la condicional anterior, que dice que $p(k)$ es válida, se lo llama la *hipótesis de inducción*. Así, se sabe que para el 1 la proposición es válida y, además, se demostró que, cuando es válida para un número k, entonces es válida también para $k+1$; por tanto, se infiere que la proposición es válida para el número 2; y si es válida para el número 2, entonces es válida para el número 3, etc.; y así sucesivamente, se comprueba su validez para todo número entero positivo. Para continuar con el aspecto del uso, el acierto de Peano consistió precisamente en *delimitar cuidadosamente* el dominio de la aplicación de la Inducción Matemática al conjunto de los números enteros positivos. Por supuesto, esto significa que los matemáticos que precedieron a Peano en el empleo de este tipo de argumento, se preocuparon muy poco por el ámbito en que lo utilizaban, sin percatarse que, entre otras condiciones, se requiere que todo aquel objeto en que se aplique sea susceptible de tener bien definido un *siguiente* en su entorno. Aunque sería ocioso hacer una lista exhaustiva de los contextos en que llegaron a emplearlo (números racionales, reales, complejos, etc.) y que no cumplían con el requisito antes mencionado, en honor a Peano más bien habría que mencionar que, en la actualidad, las diversas Teorías Axiomáticas de Conjuntos que existen han delimitado el total de estructuras en las que es dable implementar la Inducción Matemática (ojo; no *transfinita*), restringiendo éstas a los *conjuntos bien ordenados isomorfos al conjunto ordenado de los enteros positivos* (ver [20]), otorgándoles de esta manera la razón a aquel genial matemático.

Una aclaración antes de concluir. Al *Método de Inducción Matemática* también se lo denomina en la literatura como *Principio de Inducción Matemática*. Ambas terminologías serán empleadas indistintamente en este trabajo.

6.1.2. Estructura del método

En resumen, la estructura del Método de Inducción Matemática, tal y como lo usaremos en los ejemplos de este capítulo, se expone a continuación.

Principio de Inducción Matemática

Principio 6.1.2. Sea a un número entero. A fin de probar que una proposición $P(n)$ es válida en el conjunto $\{a, a+1, a+2, \ldots\}$, síganse los pasos que se dan a continuación:

(a) Se comprueba que $P(a)$ es válida.

(b) Se supone, por hipótesis de inducción, que $P(k)$ es verdadera y, usando esta misma hipótesis, se comprueba que $P(k+1)$ también es verdadera.

Se concluye que la proposición es válida en el conjunto $\{a, a+1, a+2, \ldots\}$.

En ocasiones, en algunas pruebas, es necesario aplicar una modificación del principio anterior conocido como el *Principio de Inducción Matemática Alternativo*, el cual detallamos a continuación.

Principio de Inducción Matemática Alternativo

Principio 6.1.3. Sea a un número entero. A fin de probar que una proposición $P(n)$ es válida en el conjunto $\{a, a+1, a+2, \ldots\}$, síganse los pasos que se dan a continuación:

(a) Se comprueba que $P(a)$ es válida.

(b) Se supone, por hipótesis de inducción, que $P(k)$ es verdadera, para $k < n$ y, usando esta misma hipótesis, se comprueba que $P(n)$ también es verdadera.

Se concluye que la proposición es válida en el conjunto $\{a, a+1, a+2, \ldots\}$.

6.1.3. Sugerencias para su uso

Es importante aclarar que el Método de Inducción Matemática únicamente se puede aplicar a conjuntos que posean buen orden. No obstante, por cuestiones de simplicidad, en los ejemplos que veremos a continuación trabajaremos exclusivamente en *subconjuntos propios de elementos consecutivos de los números enteros*; en concreto, partiremos de un número entero a, y la intención es probar la proposición en el conjunto $\{a, a+1, a+2, \ldots\}$. Para el caso más general de conjuntos bien ordenados, remitimos al lector a tratados más especializados (como, por ejemplo, [8] o [20]).

En los ejemplos que siguen, debido a que el paso **(b)** de la Inducción Matemática será de uso reiterativo en las pruebas de éstos, denotaremos por **HI** a la expresión "hipótesis de inducción."

6.2. Ejemplos

Número de subconjuntos de un conjunto finito

Ejemplo 6.2.1. Sea n un entero positivo. Probar que un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos.

Demostración. Daremos la prueba por Inducción Matemática sobre n. Denotemos por C_n al número de subconjuntos de un conjunto con n elementos.

(a) Veamos que la afirmación es válida para $n = 1$. Sea A un conjunto con un elemento. Este conjunto tiene exactamente dos subconjuntos que son el conjunto mismo y el conjunto vacío; es decir, se cumple que

$$C_1 = 2 = 2^1.$$

Luego, vale para $n = 1$.

(b) Supongamos, por **HI**, que la igualdad se *cumple* para $n = k$; esto es, que existen exactamente 2^k subconjuntos de un conjunto con k elementos; o sea que, para este caso,

$$C_k = 2^k. \tag{6.2}$$

Usando esta **HI** *demostraremos* que la proposición es válida para un conjunto A con $k+1$ elementos; digamos para $A = \{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$.

Si eliminamos el elemento a_{k+1}, conseguimos el conjunto siguiente

$$A_1 = \{a_1, \ldots, a_k\}.$$

Por la **HI** (6.2), este conjunto A_1 tiene 2^k subconjuntos. A continuación, agreguemos a_{k+1} a cada uno de estos 2^k subconjuntos. De lo cual resulta que A tiene 2^k subconjuntos que contienen a_{k+1} y 2^k que no lo contienen. De donde

$$C_{k+1} = 2^k + 2^k = 2^{k+1}.$$

Luego, la proposición es válida para $n = k+1$.

Por tanto, la proposición es válida para todo entero positivo n. ■

Ejemplo 6.2.2. Sea n un entero positivo. Probar que

$$(1)(2)(3) + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Demostración. Daremos la prueba por Inducción Matemática sobre n.
(a) Para $n = 1$ la igualdad es válida, ya que en el lado izquierdo se obtiene

$$(1)(2)(3) = 6,$$

en tanto que del lado derecho se consigue

$$\frac{(1)(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = \frac{(1)(2)(3)(4)}{4} = 6.$$

Luego, la igualdad se cumple para $n = 1$.
(b) Supongamos, por **HI**, que la igualdad se *cumple* para $n = k$; esto es, que es *válido* que

$$(1)(2)(3) + \ldots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}. \tag{6.3}$$

Con esto, vamos a *demostrar* que vale también para $n = k+1$; esto es, hay que *probar* que

$$(1)(2)(3) + \ldots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+1+1)(k+1+2)(k+1+3)}{4}.$$

Para lograr este objetivo, vamos a partir del lado izquierdo de esta igualdad que queremos demostrar y, usando la **HI** (6.3), intentaremos llegar al lado derecho. Procediendo,

$$\begin{aligned}
(1)(2)(3) + \ldots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) &= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)}{4} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} \\
&= \frac{(k+1)(k+1+1)(k+1+2)(k+1+3)}{4}.
\end{aligned}$$

De donde vale para $n = k+1$.

Por tanto, la igualdad es válida para todo entero positivo n. ■

Ejemplo 6.2.3. Sea n un entero positivo. Probar que

$$\frac{1}{(1)(4)} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

Demostración. Daremos la prueba por Inducción Matemática sobre n.
(a) Para $n = 1$ la igualdad es válida, ya que en el lado izquierdo se obtiene

$$\frac{1}{(1)(4)} = \frac{1}{4},$$

en tanto que del lado derecho se consigue

$$\frac{1}{3(1)+1} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}.$$

Luego, la igualdad se cumple para $n = 1$.
(b) Supongamos, por **HI**, que la igualdad se *cumple* para $n = k$; esto es, que es *válido* que

$$\frac{1}{(1)(4)} + \ldots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1}. \tag{6.4}$$

Con esto, vamos a *demostrar* que vale también para $n = k+1$; esto es, hay que *probar* que

$$\frac{1}{(1)(4)} + \ldots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)} = \frac{k+1}{3(k+1)+1}.$$

Para lograr este objetivo, vamos a partir del lado izquierdo de esta igualdad que queremos demostrar y, usando la **HI** (6.4), intentaremos llegar al lado derecho. Procediendo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1)(4)} + \ldots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)} &= \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+3-2)(3k+3+1)} \\
&= \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} \\
&= \frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)}.
\end{aligned}$$

Hagamos un paréntesis para factorizar el numerador dividiéndolo entre $3k+1$.

$$\begin{array}{r|rrr}
 & k & +1 & \\ \hline
3k+1 & 3k^2 & +4k & +1 \\
 & -3k^2 & -k & \\ \hline
 & & 3k & +1 \\
 & & -3k & -1 \\ \hline
 & & & 0
\end{array}$$

Luego, $3k^2 + 4k + 1 = (3k+1)(k+1)$. Sustituyendo, podemos continuar.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1)(4)} + \ldots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)} &= \frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{(3k+1)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)} \\
&= \frac{k+1}{3k+4} = \frac{k+1}{3(k+1)+1}.
\end{aligned}$$

De donde vale para $n = k+1$.
Por tanto, la igualdad es válida para todo entero positivo n. ∎

Ejemplo 6.2.4. Sean n un entero positivo y a un número real positivo. Probar que la siguiente desigualdad inestricta[1]

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

se cumple a partir de $n = 1$ y que la correspondiente desigualdad estricta

$$(1+a)^n > 1 + na$$

se da para $n \geq 2$.

Demostración. Daremos la prueba por Inducción Matemática sobre n.
(a) La desigualdad inestricta se cumple para $n = 1$ ya que, en este caso,

$$(1+a)^1 = 1 + a = 1 + 1a.$$

Por otro lado, la desigualdad estricta es válida para $n = 2$, debido a que, en esta ocasión,

$$(1+a)^2 > 1 + 2a$$

[1] Utilizamos la palabra "inestricta" como abreviatura para la frase "no estricta."

es equivalente a

$$a^2 > 0,$$

y esta desigualdad fue demostrada para a positivo en el Ejemplo 4.2.3 del Capítulo 4. Una vez verificados estos casos, continuaremos la prueba para la situación dada por la desigualdad estricta, ya que ésta implica la inestricta correspondiente.
(b) Supongamos, por **HI**, que la desigualdad estricta se *cumple* para $n = k$; esto es, que es *válido* que

$$(1+a)^k > 1 + ka. \tag{6.5}$$

A continuación, *probemos* que vale para $n = k+1$; esto es, hay que *demostrar* que acontece que

$$(1+a)^{k+1} > 1 + (k+1)\,a.$$

Para verificar esto, partimos del lado izquierdo de la desigualdad anterior para intentar llegar al lado derecho usando la **HI** (6.5). Procediendo,

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k\,(1+a) > (1+ka)\,(1+a) = 1 + a + ka + ka^2 > 1 + (k+1)\,a.$$

Luego, la desigualdad vale para $n = k+1$.
Por tanto, la desigualdad estricta es válida para todo entero positivo n, con $n \geq 2$. ∎

Ejemplo 6.2.5. Sea n un entero positivo, con $n \geq 3$. Probar que $(1+1/n)^n < n$.

Demostración. Daremos la prueba por Inducción Matemática sobre n.
(a) Demostremos que la desigualdad es válida para $n = 3$. Por cálculo directo,

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} < 3.$$

Luego, vale para $n = 3$.
(b) Supongamos, por **HI**, que la desigualdad se *cumple* para $n = k$; esto es, que es *válido* que

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < k. \tag{6.6}$$

A continuación, *probemos* que vale para $n = k+1$; esto es, hay que *demostrar* que acontece que

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} < k+1. \tag{6.7}$$

Para empezar, dado que k es, en particular, un entero positivo, ocurre que

$$k < k+1.$$

Tomando recíprocos obtenemos

$$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}.$$

Sumando 1 en ambos lados de esta desigualdad conseguimos

$$1 + \frac{1}{k+1} < 1 + \frac{1}{k}.$$

Tomando la potencia k en ambos miembros tenemos que

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^k < \left(1+\frac{1}{k}\right)^k.$$

Con esto, podemos abordar la desigualdad que queremos demostrar y que es (6.7), partiendo de su lado izquierdo para intentar llegar a su lado derecho utilizando para esto la **HI** (6.6). Procediendo,

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^k \left(1+\frac{1}{k+1}\right) < \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \left(1+\frac{1}{k+1}\right) < k\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = k + \frac{k}{k+1} < k+1.$$

Luego, la desigualdad se cumple para $n = k+1$.
Por tanto, la desigualdad es válida para todo entero positivo n, con $n \geq 3$. ∎

Ejemplo 6.2.6. Denotemos por $\mathbb{N}$ al *conjunto de los enteros positivos*, y sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función que cumple la condición $f(n+1) > f(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $f(n) \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Daremos la prueba por Inducción Matemática sobre n.
(a) Veamos que la desigualdad a demostrar es válida para $n = 1$. Dado que $f(n)$ es un entero positivo, se cumple que $f(n) \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular $f(1) \geq 1$. Luego, vale para $n = 1$.
(b) Supongamos, por **HI**, que la desigualdad se *cumple* para $n = k$; esto es, que es *válido* que

$$f(k) \geq k. \tag{6.8}$$

A continuación, *probemos* que vale para $n = k+1$; esto es, hay que *demostrar* que acontece que

$$f(k+1) \geq k+1.$$

Para lograr este objetivo, vamos a partir del lado izquierdo de esta desigualdad que queremos probar y, usando la **HI** (6.8), intentaremos llegar al lado derecho. Procediendo,

$$f(k+1) > f(k) \geq k.$$

En resumen,

$$f(k+1) > k.$$

Como ambos miembros de la desigualdad anterior son enteros positivos, ocurre entonces que

$$f(k+1) \geq k+1.$$

Luego, la desigualdad se cumple para $n = k+1$.
Por tanto, la desigualdad es válida para todo entero positivo n. ■

Desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética

Ejemplo 6.2.7. Sean n un entero positivo, con $n \geq 2$, y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+ = (0; +\infty)$. Definamos

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \quad \text{y} \quad A_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Probar que $G_n \leq A_n$.

Demostración. Daremos la prueba por Inducción Matemática sobre n.[2]
(a) La afirmación es válida para $n = 2$ ya que en el Ejemplo 3.2.4 del Capítulo 3 se demostró la desigualdad

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

(b) Supongamos, por **HI**, que la desigualdad se *cumple* para $n = k$; esto es, que es *válido* que

$$G_k \leq A_k. \tag{6.9}$$

Comprobemos que vale para $n = k+1$; es decir, tenemos que *probar* lo siguiente

$$G_{k+1} \leq A_{k+1}.$$

Para esto, será suficiente con demostrar que

$$G_{k+1}^{k+1} \leq A_{k+1}^{k+1},$$

o, mejor aún, estableciendo la desigualdad en la forma

$$G_{k+1}^{k+1} A_{k+1}^{k-1} \leq A_{k+1}^{2k},$$

[2]Esta prueba por inducción matemática directa fue publicada por primera vez en [4].

en la cual, ambos lados han sido multiplicados por A_{k+1}^{k-1}. A su vez, para conseguir esto, vamos a partir, como de costumbre, del lado izquierdo de esta desigualdad que queremos probar para intentar llegar a su lado derecho aplicando la **HI** (6.9) dos veces en forma distinta, seguida del caso $n = 2$. Procediendo,

$$
\begin{aligned}
G_{k+1}^{k+1}A_{k+1}^{k-1} &= \left(\sqrt[k+1]{a_1\ldots a_k a_{k+1}}\right)^{k+1} A_{k+1}^{k-1} = a_1\ldots a_k a_{k+1}A_{k+1}^{k-1} = \left(\sqrt[k]{a_1\ldots a_k}\right)^k a_{k+1}A_{k+1}^{k-1} = G_k^k a_{k+1}A_{k+1}^{k-1}\\
&\leq A_k^k a_{k+1}A_{k+1}^{k-1} = A_k^k\left(a_{k+1}A_{k+1}\ldots A_{k+1}\right) = A_k^k\left(\sqrt[k]{a_{k+1}A_{k+1}\ldots A_{k+1}}\right)^k\\
&\leq A_k^k\left(\frac{a_{k+1}+A_{k+1}+\ldots+A_{k+1}}{k}\right)^k = A_k^k\left(\frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}\right)^k\\
&= \left(A_k\frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}\right)^k = \left[\left(\sqrt{A_k\frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}}\right)^2\right]^k\\
&\leq \left(\frac{A_k+\dfrac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{A_k}{2}+\frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{2k}\right)^{2k}\\
&= \left(\frac{kA_k+a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{2k}\right)^{2k} = \left[\frac{k\left(\dfrac{a_1+\ldots+a_k}{k}\right)+a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{2k}\right]^{2k}\\
&= \left[\frac{a_1+\ldots+a_k+a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{2k}\right]^{2k}\\
&= \left[\frac{(k+1)\left(\dfrac{a_1+\ldots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\right)+(k-1)A_{k+1}}{2k}\right]^{2k} = \left[\frac{(k+1)A_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{2k}\right]^{2k}\\
&= \left(\frac{2kA_{k+1}}{2k}\right)^{2k} = A_{k+1}^{2k}.
\end{aligned}
$$

En resumen, $G_{k+1}^{k+1}A_{k+1}^{k-1} \leq A_{k+1}^{2k}$; por lo que $G_{k+1} \leq A_{k+1}$. Luego, la desigualdad se cumple para $n = k+1$.

Por tanto, la desigualdad es válida para todo entero positivo n, con $n \geq 2$. ■

Ejemplo 6.2.8. Sean n un entero positivo y $a_1,\ldots,a_n \in [0;+\infty)$. Probar que

$$\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2} \leq a_1+\ldots+a_n.$$

Demostración. Supongamos que n un entero positivo y que $a_1,\ldots,a_n \in [0;+\infty)$. Con el propósito de facilitar la prueba, es conveniente considerar dos casos para n; a saber: o bien $n = 1$, o bien $n \geq 2$.

Caso 1. $n = 1$. En este caso, la desigualdad es trivial, ya que se reduce a la igualdad $\sqrt{a_1^2} = a_1$.

Caso 2. $n \geq 2$. En esta opción, daremos la prueba por Inducción Matemática sobre n.

(a) Para $n = 2$ el resultado fue establecido en el Ejercicio III del Capítulo 3, en donde, utilizando el Método Analítico, fue posible demostrar que

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2} \leq a_1+a_2.$$

Luego, la relación se cumple para $n = 2$.

(b) Supongamos, por **HI**, que la desigualdad se *cumple* para $n = k$; esto es, que es *válido* que

$$\sqrt{a_1^2+\ldots+a_k^2} \leq a_1+\ldots+a_k. \tag{6.10}$$

Ahora, *probemos* que vale para $n = k+1$; esto es, tenemos que *demostrar* que

$$\sqrt{a_1^2+\ldots+a_k^2+a_{k+1}^2} \leq a_1+\ldots+a_k+a_{k+1}.$$

A este fin, vamos a partir del lado izquierdo de esta desigualdad con el objetivo de llegar a su miembro derecho, empleando para ello el caso $n = 2$, seguido de la **HI** (6.10). Procediendo,

$$\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_k^2 + a_{k+1}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_k^2}\right)^2 + a_{k+1}^2} \leq \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_k^2} + a_{k+1} \leq a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1}.$$

De donde la relación se cumple para $n = k + 1$.

Por tanto, la desigualdad es válida para todo entero positivo n. ■

Ortogonal a un vector plano real

Definición 6.2.9. Un *vector plano real* es cualquier elemento del espacio euclidiano $\mathbb{R}^2$. Ahora, sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$; por lo que existen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{v} = (a_1, a_2)$. Definimos el *ortogonal a* $\vec{v}$, denotado por $\vec{v}^{\perp}$, de la siguiente manera,

$$\vec{v}^{\perp} = (a_2, -a_1).$$

Aditividad del operador de ortogonalidad

Ejemplo 6.2.10. Sean n un entero positivo, con $n \geq 2$, y $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^2$. Probar que

$$(\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_n)^{\perp} = \vec{v}_1^{\perp} + \ldots + \vec{v}_n^{\perp}.$$

Demostración. Daremos la prueba por Inducción Matemática sobre n.

(a) Demostremos que la igualdad es válida para $n = 2$. Dado que $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, existen $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{v}_1 = (a_1, a_2)$ y $\vec{v}_2 = (b_1, b_2)$.

$$\begin{aligned}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)^{\perp} &= [(a_1, a_2) + (b_1, b_2)]^{\perp} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)^{\perp} = (a_2 + b_2, -(a_1 + b_1)) = (a_2 + b_2, -a_1 - b_1) \\ &= (a_2, -a_1) + (b_2, -b_1) = (a_1, a_2)^{\perp} + (b_1, b_2)^{\perp} = \vec{v}_1^{\perp} + \vec{v}_2^{\perp}.\end{aligned}$$

Luego, la propiedad es válida para $n = 2$.

(b) Supongamos, por **HI**, que la igualdad se *cumple* para $n = k$; esto es, que es *válido* que

$$(\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_k)^{\perp} = \vec{v}_1^{\perp} + \ldots + \vec{v}_k^{\perp}. \tag{6.11}$$

Con esto, vamos a *demostrar* que vale también para $n = k + 1$; esto es, hay que *probar* que

$$(\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_k + \vec{v}_{k+1})^{\perp} = \vec{v}_1^{\perp} + \ldots + \vec{v}_k^{\perp} + \vec{v}_{k+1}^{\perp}.$$

Para lograr este objetivo, vamos a partir del lado izquierdo de esta igualdad que queremos demostrar y, usando el caso $n = 2$ y la **HI** (6.11), intentaremos llegar al lado derecho. Procediendo,

$$(\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_k + \vec{v}_{k+1})^{\perp} = [(\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_k) + \vec{v}_{k+1}]^{\perp} = (\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_k)^{\perp} + \vec{v}_{k+1}^{\perp} = \vec{v}_1^{\perp} + \ldots + \vec{v}_k^{\perp} + \vec{v}_{k+1}^{\perp}.$$

Luego, la igualdad vale para $n = k + 1$.

Por tanto, la igualdad es válida para todo entero positivo n, con $n \geq 2$. ■

Primos y compuestos

Definición 6.2.11. Sea a un entero positivo, con $a \neq 1$. Se dice que a es un *número primo* si a sólo se puede dar como múltiplo de un entero positivo de manera trivial; es decir, si a únicamente puede ser múltiplo del uno y de sí mismo. Por el contrario, se dice que a es un *número compuesto* si existen enteros positivos b y c, con $1 < b < a$ y $1 < c < a$, tales que $a = bc$.

Existencia de la descomposición prima

Ejemplo 6.2.12. Probar que dado cualquier entero positivo podemos afirmar que, o bien es el uno, o bien que se puede descomponer como un producto finito de números primos.

Demostración. Sea a un entero positivo. Daremos la prueba usando el Principio de Inducción Matemática Alternativo sobre a (ver el Principio 6.1.3).
(a) Para $a = 1$ es obviamente válido.
(b) Sea $a > 1$. Supongamos, por **HI**, que la proposición es *válida* para todo entero positivo x que cumpla con que $x < a$; es decir, que en este caso, o bien $x = 1$, o bien x se puede descomponer como un producto finito de números primos. *Demostraremos* ahora que también vale para a.

Si a es primo, la proposición se cumple. Ahora, si a es compuesto, entonces existen enteros positivos b y c, con $1 < b < a$ y $1 < c < a$, tales que $a = bc$. Debido a las desigualdades, por **HI** tenemos que b y c se pueden descomponer como productos finitos de números primos. Dado que $a = bc$, concluimos que a también se puede descomponer como un producto finito de números primos. De donde la proposición es válida para a. Por tanto, se cumple para todo entero positivo que, o bien es el uno, o bien que se puede descomponer como un producto finito de números primos. ■

Teorema de De Moivre

Ejemplo 6.2.13. Probar que para todo entero positivo n se cumple que

$$(\operatorname{Cos}\phi + i\operatorname{Sen}\phi)^n = \operatorname{Cos} n\phi + i\operatorname{Sen} n\phi.$$

Demostración. Daremos la prueba por Inducción Matemática sobre n.
(a) Veamos que vale para $n = 1$.

$$(\operatorname{Cos}\phi + i\operatorname{Sen}\phi)^1 = \operatorname{Cos}\phi + i\operatorname{Sen}\phi = \operatorname{Cos} 1\phi + i\operatorname{Sen} 1\phi.$$

Luego, la igualdad es válida para $n = 1$.
(b) Supongamos, por **HI**, que la igualdad se *cumple* para $n = k$; esto es, que es *válido* que

$$(\operatorname{Cos}\phi + i\operatorname{Sen}\phi)^k = \operatorname{Cos} k\phi + i\operatorname{Sen} k\phi. \tag{6.12}$$

Con esto, vamos a *demostrar* que vale también para $n = k + 1$; esto es, hay que *probar* que

$$(\operatorname{Cos}\phi + i\operatorname{Sen}\phi)^{k+1} = \operatorname{Cos}(k+1)\phi + i\operatorname{Sen}(k+1)\phi.$$

Para lograr este objetivo, vamos a partir del lado izquierdo de esta igualdad que queremos demostrar y, usando la **HI** (6.12), intentaremos llegar al lado derecho. Procediendo,

$$\begin{aligned}(\operatorname{Cos}\phi + i\operatorname{Sen}\phi)^{k+1} &= (\operatorname{Cos}\phi + i\operatorname{Sen}\phi)^k(\operatorname{Cos}\phi + i\operatorname{Sen}\phi) = (\operatorname{Cos} k\phi + i\operatorname{Sen} k\phi)(\operatorname{Cos}\phi + i\operatorname{Sen}\phi)\\ &= (\operatorname{Cos} k\phi\operatorname{Cos}\phi - \operatorname{Sen} k\phi\operatorname{Sen}\phi) + i\ (\operatorname{Sen} k\phi\operatorname{Cos}\phi + \operatorname{Cos} k\phi\operatorname{Sen}\phi)\\ &= \operatorname{Cos}(k\phi + \phi) + i\operatorname{Sen}(k\phi + \phi) = \operatorname{Cos}(k+1)\phi + i\operatorname{Sen}(k+1)\phi.\end{aligned}$$

Luego, la igualdad se cumple para $n = k + 1$.

Por tanto, la igualdad es válida para todo entero positivo n. ■

6.3. Ejercicios

I. Sea n un entero positivo. Utilizar Inducción Matemática para demostrar las igualdades siguientes:

1. $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$.
2. $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
3. $1 + 2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
4. $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$.
5. $1^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

6. $1 + x + \ldots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$, con $x \neq 1$.

7. $(1)(2) + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

8. $\dfrac{1}{(1)(3)} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$.

9. $\dfrac{1}{(1)(5)} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$.

10. $\dfrac{1^2}{(1)(3)} + \ldots + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

II. Sea n un entero positivo. Probar que $2^{2n-1} + 4^{2n-1}$ es divisible por 6.

III. Sea n un entero positivo. Probar que $3^n - 1$ es divisible por 2.

IV. Sea n un entero positivo. Probar que $1 + 2^n \leq 3^n$.

V. Sean n un entero positivo y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Probar que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

VI. Sea n un entero positivo. Probar que

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{4n}.$$

VII. Sea n un entero positivo, con $n \geq 2$. Probar que

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Bibliografía

[1] Ayres Jr., Frank (1992). Álgebra Moderna. McGraw-Hill.

[2] Bartle, Robert G. & Sherbert, Donald R. (2000). Introduction to Real Analysis (tercera edición). John Wiley and Sons Inc.

[3] Copi, Irving M. (2001). Lógica Simbólica (vigésima reimpresión de la segunda edición). Compañía Editorial Continental.

[4] Cruz Sampedro, J. & Tetlamatzi Montiel, M. (1999). Una demostración inductiva directa de la desigualdad media geométrica-media aritmética (No. 28, págs. 11-15). Miscelánea Matemática.

[5] Freiberger, Marianne & Thomas, Rachel (2015). The Future of proof. Recuperado de https://plus.maths.org/content/future-proof

[6] Galilei, Galileo (2002). Diálogo de los Dos Máximos Sistemas. Biblioteca de los Grandes Pensadores RBA.

[7] Grossman, Stanley I. (1996). Álgebra Lineal (quinta edición). McGraw-Hill.

[8] Hernández Hernández, Fernando (1998). Teoría de Conjuntos. Sociedad Matemática Mexicana.

[9] Horgan, John (1981). The Death Of Proof. Scientific American (Octubre).

[10] Jaeger, Werner (2019). Paideia: los ideales de la cultura griega (segunda edición). Fondo de Cultura Económica.

[11] Korfhage, Robert (1982). Lógica y Algoritmos (segunda reimpresión). Limusa.

[12] Lakatos, Imre (1982). Pruebas y Refutaciones (segunda edición). Alianza Universidad.

[13] Lakatos, Imre (1981). Matemáticas, Ciencia y Epistemología. Alianza Universidad.

[14] Rudin, Walter (1980). Principios de Análisis Matemático (tercera edición). McGraw-Hill.

[15] Sarton, George (1960). Ciencia Antigua y Civilización Moderna. Breviarios del Fondo de Cultura Económica.

[16] Schildt, Herbert (1988). Turbo PROLOG Programación Avanzada. McGraw-Hill.

[17] Sestier, Andrés (2001). Historia de Las Matemáticas (cuarta reimpresión de la segunda edición). Limusa.

[18] Singh, Simon (1997). El Enigma de Fermat. Planeta.

[19] Sominskii, I. S. (2002). El Método de Inducción Matemática (quinta edición). Limusa.

[20] Suppes, Patrick (1968). Teoría Axiomática de Conjuntos. Norma.

[21] Suppes, Patrick & Hill, Shirley (1981). Introducción a la Lógica Matemática (tercera reimpresión). Reverté.

ÍNDICE ALFABÉTICO

Wilfrido Miguel Contreras Sánchez
Secretario de Investigación, Posgrado y Vinculación

Pablo Marín Olán
Director de Difusión y Divulgación Científica y Tecnológica

Analuisa Kú Ortíz
Jefa del Departamento Editorial de Publicaciones No Periódicas

Aprendiendo a demostrar: un libro para adquirir habilidad al utilizar seis métodos elementales de prueba en matemáticas, es un texto que invita al lector a adentrarse en la exuberante belleza de las argumentaciones propias de esta ciencia. Cada capítulo de este libro está dedicado a detallar el funcionamiento de las seis técnicas básicas de demostración denominadas: método directo, reducción al absurdo, método analítico, demostración por casos, exhibición de contraejemplo e inducción matemática. Un tesoro de conocimientos indispensable para el estudiante, el profesor y el investigador en matemáticas y en disciplinas científicas que en su desarrollo teórico empleen las matemáticas.

José Leonardo Sáenz Cetina nació en Mérida, Yucatán, México. Estudió la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Autónoma de Yucatán, la Maestría en Matemáticas y el Doctorado en Ciencias en la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. Fue Profesor investigador de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. Ha publicado artículos en *Miscelánea Matemática, Journal of Mathematical Physics, Systems and Control Letters, Journal of Basic Sciences* y en el *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana.*

Adriana Soberano Morales nació en Cárdenas, Tabasco, México. Estudió la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. Actualmente es profesora con categoría Profesor EMSAD II adscrita al EMSAD No. 02 del Colegio de Bachilleres de Tabasco.

José Edilberto Rodríguez Cervera nació en Mérida, Yucatán, México. Estudió la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Autónoma de Yucatán. Ha sido profesor en la Escuela de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, así como en la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, y de 1988 a 2023 en la División Académica de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, institución donde además colaboró como Coordinador de docencia y Coordinador del Centro de Investigación de la División Académica de Ciencias Básicas. Ha dirigido tesis de licenciatura en las áreas de topología general y álgebra topológica.

ISBN 978-607-2628-55-7

9 786072 628557