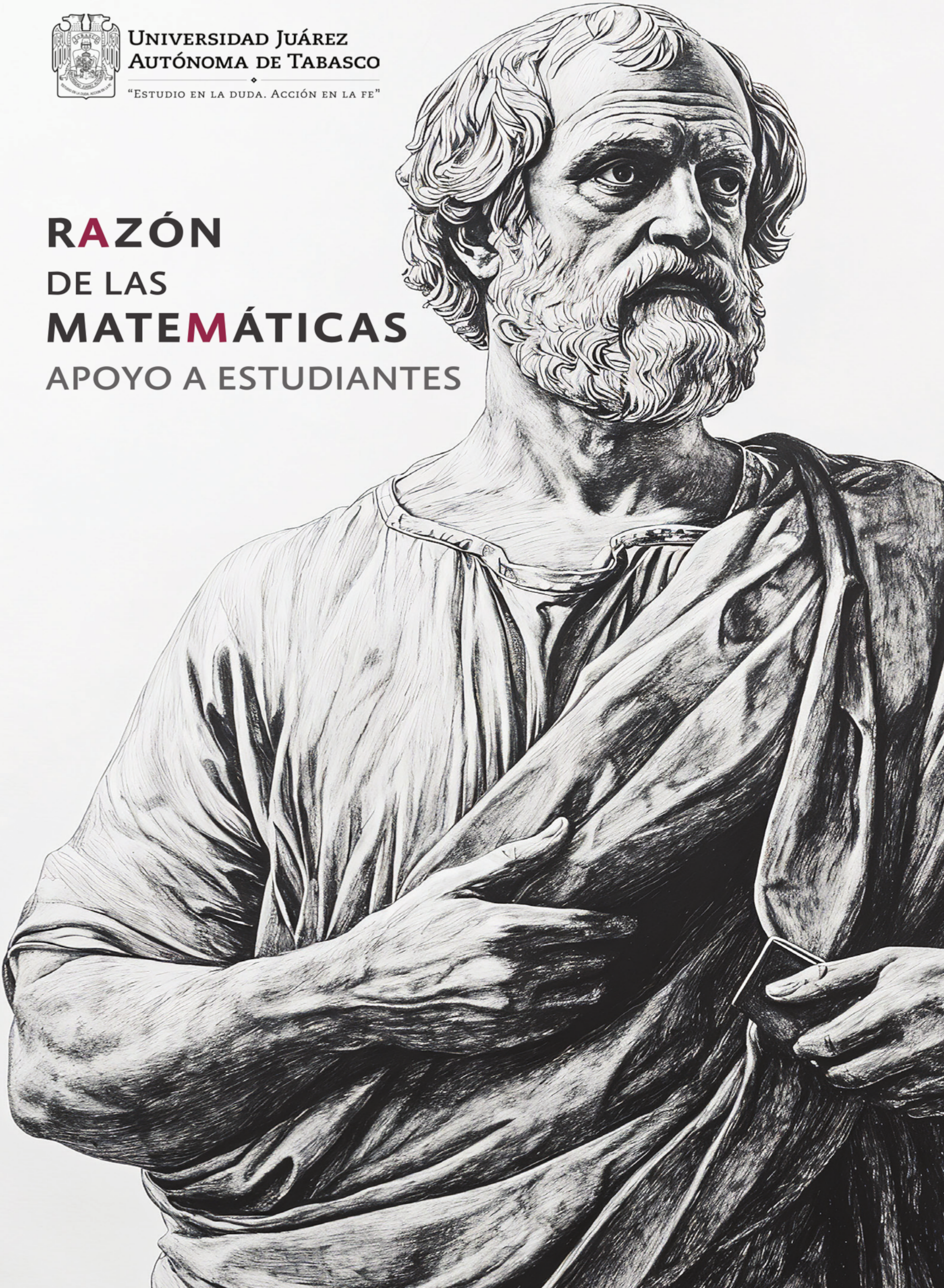
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

"Estudio en la duda. Acción en la fe"

RAZÓN DE LAS MATEMÁTICAS

APOYO A ESTUDIANTES



Razón de las matemáticas

Apoyo a estudiantes

Jorge Tetumo García

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

"Estudio en la duda. Acción en la fe"

Razón de las matemáticas

Apoyo a estudiantes

Jorge Tetumo García
Profesor investigador
de la División Académica
de Ciencias Agropecuarias

COLECCIÓN
HÉCTOR OCHOA BACELIS
Textos de enseñanza de Ciencias Básicas

Guillermo Narváez Osorio
Rector

Jorge Alfredo Thomas Téllez
Director de la División Académica de Ciencias Agropecuarias

Primera edición, 2025

www.ujat.mx

ISBN: 978-607-2628-54-0

DOI: https://doi.org/10.52501/ujat.001

Diseño de portada: Francisco Zeledón

Edición: Julio Gallardo

Correción: Patricia Mirós

Hecho en Villahermosa, Tabasco, México

A usted, apreciable lector

La inquietud de escribir algunas páginas que ayudarán a los estudiantes de las ingenierías de la División Académica de Ciencias Agropecuarias (DACA) de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco (UJAT), surgió cuando inicié mi labor como docente en la mencionada división académica, allá por 1999. Al impartir aquellas asignaturas que exigían nociones matemáticas pude percatarme de que la mayoría de los estudiantes necesitaba apoyo. Así fue como comencé impartiendo cursos cortos de forma voluntaria con el fin de disipar algunos rezagos de mis alumnos. Por cuestiones de tiempo no pude continuar con esos y dirigí mi atención a escribir sobre el tema, pero entonces no logré mi objetivo, que era elaborar un "texto de apoyo". Con el presente documento que ahora está en sus manos, espero haberlo logrado y que les sirva a ustedes, apreciables estudiantes.

A este pequeño texto lo conforman tres unidades en las que se realiza un esbozo de los números, necesario en el manejo de las operaciones aritméticas y algebraicas; se desglosan y se ejemplifican algunas propiedades de la aritmética, aunadas a sus leyes y a sus criterios, y se hace énfasis en la aplicación de herramientas aritméticas útiles para la solución de problemas reales; no puede dejarse de lado el tratamiento de las técnicas y los métodos útiles en el manejo de la geometría elemental y la razón de ser de las expresiones algebraicas en los cálculos. De acuerdo con lo anterior, es necesario que el estudiante que se inicia en el estudio del álgebra se ubique en los conceptos, los términos y el lenguaje que dan cimiento al álgebra; por ejemplo, en lo que concierne al *lenguaje algebraico* y al *despeje*.

Espero que este libro les sirva de apoyo. ¡Éxitos!

Jorge Tetumo García

Índice

Introducción

Para contribuir a la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, es necesario que en este caminar abordemos el pensamiento lógico-matemático y razonemos cada cuestionamiento para que del lenguaje cotidiano pasemos al lenguaje de los símbolos, al "lenguaje matemático", y éste aterrice en ejemplos aplicados a la vida real y, sobre todo, podamos comprender su aplicación, con el fin evitar aquellas preguntas comunes en las aulas de clases cuando se imparte matemáticas: "¿Cómo lo aplico?", "¿dónde lo aplico?", "¿para qué me va a servir?"

Un consejo particular es que tratemos de entender el aprendizaje de las matemáticas de manera análoga al aprendizaje de un niño que comienza a caminar o a hablar: aprende a pronunciar la palabra *si-lla*, al mismo tiempo que relaciona lo que oye decir sobre el objeto a lo que refiere esa palabra. De esta manera llamará *silla* a todo lo que se parezca a ese objeto, dondequiera que vuelva a verlo. Más tarde aprenderá que hay muchos tipos de sillas y en su cerebro tendrá que hacer otra codificación, pero antes ya ha comprendido la idea básica. Así aprendió a caminar; sus primeros pasos fueron apoyados y guiados; cuando se sintió seguro, pudo caminar más rápido y luego correr. Como podemos darnos cuenta, necesitamos cimientos firmes para prosperar en la estructura del conocimiento, pues lo que el cerebro va codificando a través del tiempo, va quedando guardado de manera cognitiva.

Invito a los lectores a que razonemos juntos cada detalle de las matemáticas que aquí abordamos. Comprobaremos que es muy sencillo entenderlos, cosa que quizá en otros tiempos, en los diferentes niveles de estudio que cursamos, nos resultaron oscuros y quizá hasta nos causaron dolor de cabeza.

En este breve texto, titulado *Razón de las matemáticas*, dedicamos todo nuestro empeño para darnos a entender en cada tema para que los lectores, que deseamos sean estudiantes en su mayoría, pierdan esa aversión hacia las matemáticas. En este sentido, me apropio de aquel aforismo de Malba Tahan, en su magna obra *El hombre que calculaba*, según el cual "es preciso instruir deleitando". Pero en este caso no sólo se trata del deleite del instructor, sino también del estudiante; ya que él es quien se está formando. Lo anterior será posible si ese estudiante es el principal protagonista en el aula de clases. Con esto no pretendemos convertir a nuestros lectores en matemáticos iluminados, sino, por lo menos, ayudarlos comprender las nociones básicas de la materia. Así, los profesores podemos darnos el lujo de demostrar que nuestros alumnos dominan al menos lo esencial de las matemáticas. Cabe aclarar que en este pequeño texto tan sólo se han abordado las principales herramientas que hemos considerado necesarias, con el propósito de que tenga dominio de éstas todo aquel que se inicia en el estudio de las matemáticas.

Esta obra está conformada por tres unidades. La primera, "Y… surgieron los números", trata de una pequeña semblanza de los números y de algunas operaciones con éstos, principalmente con el cero. En la segunda, "Fundamentos algebraicos", se realiza la descripción de algunas propiedades, criterios y operaciones fundamentales del álgebra y de la aritmética, cuyo aprendizaje es indispensable. Y en la tercera, "Herramientas valiosas", hace referencia a las técnicas matemáticas ya establecidas por reglas predeterminadas, cuyo dominio es fundamental cuando las matemáticas se aplican en la resolución de aquellos problemas que aparentemente son muy elementales, pero que en realidad requieren el apoyo de técnicas matemáticas especiales.

Unidad 1
Y... surgieron los números

El estudio profundo de la naturaleza es la fuente
más fértil de descubrimientos matemáticos.
FOURIER

1.1. ¿Qué de los números?

Este caminar se inicia tratando de entender qué son esos símbolos a los que se les llama *números*, qué tan útiles resultan en la vida cotidiana, cómo se emplean en el día a día; ya que dondequiera que vayamos, en todo lo que hagamos, en todo cuanto pongamos en órbita del quehacer diario se necesita calcular y estimar, y representarlo con números, con una cantidad. De ahí que cuando tomamos el transporte calculamos el tiempo que tardaremos en llegar a nuestro destino y cuánto gastaremos de pasaje, así como cuánto dinero necesitamos para unas vacaciones; cuándo terminaremos un trabajo, cuántas fincas hay en la región en la que vivimos, cuál es el número de cabezas de ganado en un estado, a qué velocidad nos desplazamos, cuál es el rendimiento de un vehículo, cuál es la altura de un árbol, cuál es el rendimiento de una cosecha, cuántas toneladas de carga soporta un tráiler, etcétera. Si todas estas situaciones se representan con números, entonces surge la imperiosa necesidad de preguntarnos...

1.2. ¿Qué es un número?

Cuando nos planteamos preguntas como éstas, surge la idea de una *cantidad*, pero, en realidad, ¿qué es esa idea que suele llamarse *número*?, ¿qué nos dice?, ¿con qué lenguaje nos habla?, ¿qué nos comunica?

Por lo anterior, podemos afirmar que, desde el punto de vista *teórico*, un número es "un concepto matemático", una idea que sólo existe en nuestra mente pero que nos indica algo. Desde el punto de vista *práctico*, es la "representación simbólica de una cantidad", que a su vez representa algo singular o plural que nos sirve para contar y establecer un orden de sucesión de las cosas, y su sistema de referencia es la recta numérica (*Diccionario enciclopédico*, 2003; Paredes y Ramírez, 2008).

1.3. Los números reales (R)

Existe otra representación numérica muy popular, que a todos invita a pasar a su redil y que concuerda con muchas actividades cotidianas, muy reales: los *números reales*: "todos los números de la recta numérica sin dejar vacíos". Aquí se incluyen todos los números, excepto los complejos, como $2+3i$ (Aguilar et al., 2009). A continuación abordemos el tema de los *números racionales*, para demostrar qué tan útiles son en la vida real; sin embargo, antes ofreceremos la definición de los *números naturales* ($\mathbb{N}$) y de los números enteros ($\mathbb{Z}$) para tener claros estos conceptos y explicar aquéllos.

1.3.1. Los números naturales ($\mathbb{N}$)

Los números naturales los usamos en la vida cotidiana para contar. La práctica del conteo se ha realizado de diferentes maneras: los mesopotámicos lo hacían con marcas cuneiformes; aunque no desarrollaron un sistema de escritura de numeración formal, los *incas* realizaron el conteo y el registro de información empleando *quipus*, un instrumento que consistía en un conjunto de cuerdas con nudos; los mayas lo representaban con rayas, óvalos y puntos; los aztecas lo llevaban a cabo con el Códice Mendoza, en el que empleaban cuatro símbolos diferentes referidos al cultivo del maíz: para el 1 un punto, para el 20 una bandera, para el 400 una planta de maíz y para el 8 000 una muñeca de maíz; los indios *yukis* de California lo hacían empleando los huecos que hay entre los dedos de la mano (Fedriani y Tenorio, 2004). Los *números naturales* se les llaman así porque son los que la inteligencia humana encuentra al observar o manejar conjuntos de cosas, elementos, objetos, etcétera, en la vida real. Se les representa con la letra $\mathbb{N}$ (Sánchez, 2012).

Los números naturales se utilizan en la vida cotidiana, por ejemplo, cuando contamos los días de la semana, los meses del año, los jugadores de un equipo, los habitantes de un pueblo, entre otros. Del mismo modo, se usan para ordenar: decimos que el mes de enero es el primer mes del año, que Jesús lleva el primer lugar en la escuela, que María es la primera de la lista, etcétera.

Existe controversia acerca de si dentro de estos números se incluye al cero. Algunos autores, como Eason et al. (1980), afirman que no, pero publicaciones como la *Enciclopedia Aula Siglo XXI*, tomo *Matemáticas y economía* (2002), sostienen que sí; sólo que este efecto no se da muy a menudo, es decir, únicamente en ciertos casos. Por su parte, Baldor sí lo incluye (2019).

Aunque se dice muy fácilmente que los *números naturales* sirven para contar, en realidad ese concepto es abstracto; tanto así que de las cuatro operaciones básicas de la aritmética: adición (suma), sustracción (resta), producto (multiplicación) y cociente (división), sólo son posibles la *adición* y el producto de números naturales, mientras que la *sustracción* y la *división* no siempre lo son. En primer lugar, la *adición* y el *producto*, cumplen con las siguientes propiedades:

Para la adición:

Asociativa: a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c, donde *a*, *b* y *c* son tres números naturales de cualquier valor.

Conmutativa: a + b = b + a

Para el producto:

Asociativa: a * b * c = a * (b * c) = (a * b) * c, donde a, b y c son números naturales cualesquiera.

Conmutativa: a * b = b * a

Elemento neutro: 1, ya que a * 1 = a

Sin embargo, en la *sustracción* y en la *división* no sucede lo mismo; por ejemplo: 13 – 9 = 4, porque 4 es el número que hay que sumar a 9 para que dé 13; pero 9 – 13 no está considerado entre los números naturales, pues ¿qué número natural le podemos sumar a 13 para que resulte 9? No existe, no se halla en este conjunto de números.

Por otro lado, en una *división* de dos números naturales está el *dividendo*, el *divisor* y el *cociente*, o resultado, pero se da el caso de que no todas las divisiones son exactas; es decir, cuando no es posible repartir todos los elementos disponibles, entonces el reparto no es exacto y hay un residuo, lo cual implica que en ese reparto haya fracciones, las cuales no forman parte de los *números naturales*. Por lo tanto, la división de dos números naturales puede dar como resultado un número que no sea natural.

En conclusión, un *número natural* es un concepto abstracto que simboliza una determinada propiedad común a todos los conjuntos de cosas, cuyos elementos son coordinables entre sí (Aguilar *et al.*, 2009).

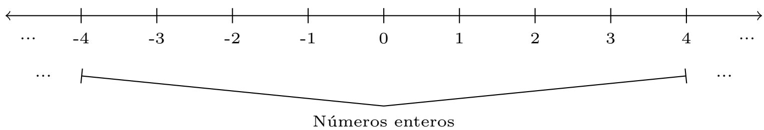
A la par de estos números existen otros de los que cotidianamente hacemos uso para representar cantidades exactas, como la naturaleza exige que sea; por ejemplo, el número de hijos de una familia, el número de estudiantes de un salón, el número de llantas de un auto, etcétera. A éstos se les llama *números enteros* y a continuación se ofrece su definición.

1.3.2. Los números enteros ($\mathbb{Z}$)

Al remontarnos a nuestros primeros años de aprendizajes podremos recordar que durante nuestra educación básica aprendimos que las *cantidades* que cotidianamente manejamos, por muy grandes que sean, se representan sólo con 10 dígitos (también llamados guarismos): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Como estos números representan las diversas cantidades que utilizamos diariamente se clasifican en varios grupos. Por ejemplo, cuando hablamos del número de personas que hay en un estadio, en una cancha, en una casa, en una escuela, en el teatro, etcétera, o del número de jugadores de un equipo, el número de autobuses de pasajeros que transitan por una carretera, el número de sillas que tiene un comedor, etcétera. Como se podrá constatar, siempre será un número entero, es decir, 20, 10, 17, 1, 3, 13, 109, 1230, 1254, 100, etcétera, y nunca un número fraccionario: 20.5 jugadores, 35.4 personas, lo cual no es posible. De la misma forma, cuando hablamos del número de sillas que hay en una sala, en una casa; del número de animales de un rebaño; del número de libros que contiene un librero o que se apilan en un escritorio; del número de plumas en una bolsa; del número de satélites en el cielo, etcétera. Cualquier representación numérica que implique una cantidad entera es *un número entero*; pero como podemos constatar, en esta representación figura el cero (0). Una de las razones por las que entre los números enteros está incluido el 0 es por el valor posicional que adquiere al unirse con otros números.

La representación de los números enteros en la recta numérica (véase la figura 1), que es su sistema de referencia, es la siguiente:

FIGURA 1. *Representación gráfica de los números enteros*



FUENTE: Elaboración propia.

Como se puede observar, entre los números enteros hay negativos y positivos, por lo que se puede hablar de que una cantidad sea "mayor que" otra o que una cantidad sea "menor que" otra; por ejemplo: $-3 < 1$ (-3 es menor que 1) o $-2 > -5$ (-2 es mayor que -5) o que $31 > 25$ (31 es mayor que 25), etcétera. Se habla de números enteros negativos cuando se hace referencia a que un equipo ha perdido a un hombre por expulsión en un encuentro (–1 hombre), cuando en la industria transformadora han cesado su funcionamiento cinco fábricas (–5 fábricas), cuando del rebaño de ovejas se han extraviado o dado de baja a 2 animales (–2 ovejas), o cuando la temperatura en Durango está a 15° C bajo cero (–15° C); no considerando valores absolutos.

Por su parte, el número cero no posee valor por sí mismo. Su valor numérico depende de la posición que ocupe en una cifra, por lo cual se le denomina *cifra no significativa*. Cabe señalar que este símbolo (0) sólo existe en la numeración arábica y para hablar del valor significativo del cero basta con distinguir la diferencia entre las siguientes cantidades, utilizando los mismos números e introduciendo el cero entre ellos:

11, once
101, ciento uno. Con el cero se llega al valor de cien.
1 001, mil uno. Con dos ceros se llega al valor de mil.
10 001, diez mil uno. Con tres ceros se llega al valor de diez mil.

Y así sucesivamente.

Sin embargo, si se tiene una cantidad 0, se necesita echar mano del concepto matemático y filosófico para poder asegurar que sí representa una cantidad. De lo contrario, fríamente diríamos que no representa nada.

Pero hay otras representaciones numéricas que sólo aceptan números enteros positivos; por ejemplo, cuando se hace referencia a cantidades que son observables por la inteligencia humana en las actividades de la vida real, como los días de un mes, la cantidad de eslabones de una cadena, el número de habitantes de una ciudad, los integrantes de una familia, etcétera. A ese grupo de números se les llama, como ya vimos, números naturales.

Entre los *números reales* ya hemos descrito los naturales y los enteros; pero hay otros, incluidos en éstos, como los *números racionales* y los *números irracionales*, que son muy especiales y útiles en la ingeniería.

1.3.3. Números racionales (Q)

¿Por qué se les llaman *números racionales*? Porque constituyen la *razón* o la *ración* de la *relación entre dos números enteros*, es decir, son números fraccionarios que resultan de aquellos cocientes en que el denominador es $\neq 0$, no tienen simplicidad o no tienen un factor común. Un *número racional* puede ser finito (una expresión decimal exacta, por ejemplo 1.8, 1.5, etcétera) o infinito periódico (una expresión decimal en la que constantemente se repite un mismo número, un par de números, etcétera, por ejemplo (0.333333, 0.35353535), es decir, en que la ubicación de un mismo número en la cifra es secuencial, como se ve en el primer ejemplo: el 3 aparece con periodicidad de uno, de ahí que la barra en el último tres ($\overline{3}$) significa que siempre continuará un 3. En el segundo ejemplo el 3 aparece con periodicidad de dos saltos, lo mismo que el 5. Cada dos números se repiten; por lo tanto, en este ejemplo la periodicidad es de un par de números ($\overline{35}$), donde la barra indica que siempre se repetirá el 35).

Un número se puede clasificar en *periódico puro* y *periódico mixto*. En los siguientes ejemplos, la periodicidad comienza inmediatamente después del punto decimal; por lo tanto, son números periódicos puros:

1. $\frac{11}{9} = 1.222\overline{2}$. *Número infinito periódico puro*, ya que inmediatamente después del punto decimal inicia la parte periódica; es decir, siempre se repetirá un 2.

2. $\frac{40}{11} = 3.636\overline{363}$. *Número infinito periódico puro*, ya que después del punto decimal siempre habrá un 63.

No sucede lo mismo en los siguientes ejemplos, en los que después del punto decimal el cociente posee una parte *no periódica*; es decir, la periodicidad no inicia inmediatamente después del punto decimal, pues hay números que no tienen periodicidad:

1. $\frac{25}{12} = 2.0833\overline{33}$. *Número infinito periódico mixto*, ya que la periodicidad no inicia inmediatamente después del punto decimal, sino que en la secuencia hay un par de números que no son periódicos (08).

2. $\frac{53}{54} = 0.981481148\overline{148}$. *Número infinito periódico mixto*, ya que el 98 no tiene periodicidad.

Por lo tanto, *todo número finito* o *infinito periódico* es un *número racional.*

En los siguientes ejemplos, el cociente de la división de dos números enteros resulta un número racional, que bien puede ser *finito* o *infinito*, pero *periódico puro* o *periódico mixtos*:

a) $\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5$, finito.

b) $\frac{4}{5} = 0.8$, finito.

c) $\frac{1}{3} = 0.333333\ldots$, infinito periódico puro.

d) $\frac{5}{3} = 1.66666\ldots$, infinito periódico puro.

e) $\frac{10}{33} = 0.303030\ldots$, infinito periódico puro.

f) $\frac{8}{11} = 0.72727272\ldots$, infinito periódico puro.

g) $\frac{13}{11} = 1.18181818\ldots$, infinito periódico puro.

h) $\frac{46}{14} = 3.285714285714285714285714\ldots$, infinito periódico puro.

i) $\frac{17}{13} = 1.307692307692307692\ldots$, infinito periódico puro.

j) $\frac{11}{12} = 0.91666666\ldots$, infinito periódico mixto.

k) $\frac{34}{36} = 0.9444444444\ldots$, infinito periódico mixto.

Como se observa, si el cociente tiene fin, como el de los resultados de los incisos a) y b), se trata de un *número racional*; si resulta infinito, como en los resultados de los incisos c) a i), será racional *sólo si es periódico*, es decir, si la ubicación de un mismo número tiene un orden de salto: cada dos como los de los incisos e), f) y g) y cada seis como los de los incisos h) e i); finalmente, serán infinitos periódicos mixtos como los dos de los últimos ejemplos (j, k).

Por lo tanto, un *número racional* se puede expresar como el cociente de dos números enteros, cuyo resultado sea finito, o, si es infinito, que éste sea periódico; pero si el resultado es un número como el siguiente:

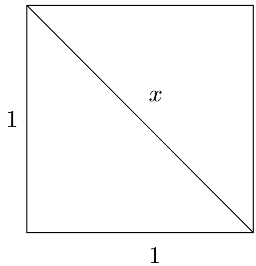
$$0.1234567891011121314151617181920...$$

donde las veces que se muestra un número x (cualesquiera después del punto decimal), no es de carácter periódico, entonces estamos hablando de un *número irracional.*

1.3.4. Números irracionales (I)

¿Por qué se llaman *números irracionales*? Pareciera que le hacen honor a su nombre, pues surgieron cuando, allá por el siglo v a. C., en Grecia los pitagóricos buscaban la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado uno (figura 2).

Figura 2. *Longitud de la diagonal*



Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con Pitágoras, lo anterior equivalía a:

$x^2 = 1^2 + 1^2$
$x^2 = 1 + 1$
$x^2 = 2$
$x = \sqrt{2}$

$$x = 1.414213562373095048801688724209$$

En ese tiempo Hipaso (un alumno de Pitágoras) descubrió un nuevo número, totalmente distinto a los números naturales y a los números racionales, al que intentó escribir en forma de fracción pero fue imposible hacerlo. De ahí su nombre, pues no se puede escribir en forma de razón (fracción), por lo cual lo llamó irracional. Así surgieron los números irracionales, aquellos números cuyos decimales no se pueden representar con una fracción. Pero Pitágoras no podía aceptar que existieran números irracionales, porque creía que todos los números tenían valores perfectos. Cuenta la historia que, como no pudo demostrar que los *números irracionales* de Hipaso no existían, ¡arrojó a Hipaso por la borda de un barco y se ahogó! Este hallazgo lo llevó a razonar acerca de las relaciones que estos números guardan con los demás números. (Langdon y Snap, 2007; véase https://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/numeros-irracionales.html y bit.ly/3Fx4RGr.)

De manera concreta se puede afirmar que un número irracional es "la expresión decimal infinita, no periódica; un número que no puede expresarse como el cociente de dos números enteros; un número que no tiene una representación real numérica; un número decimal infinito que no es ni exacto ni periódico" (Langdon y Snap, 2007; *Enciclopedia Aula Siglo XXI*, 2002; véase https://www.disfruta lasmatematicas.com/numeros/numerosirracionales.html). Algunos ejemplos de números irracionales son los siguientes:

$\pi = 3.14159265358979323846264338327 95\ldots$
infinito no periódico.

$e = 2.71828182845904523536028747135 27\ldots$
infinito no periódico.

$\phi = 1.6180339887498948482 0...$
infinito no periódico.

$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872420 9\ldots$
infinito no periódico.

$\pi^2 = 9.86960440108935861883449099987 62\ldots$
infinito no periódico.

$\sqrt{3} = 1.7320508075688772935274463415059\ldots$
infinito no periódico.

$\sqrt{99} = 9.9498743710661995473447982100\,1\ldots$
infinito no periódico.

Los números irracionales más conocidos son identificados mediante símbolos especiales. Los tres principales son los siguientes:

1. El π (número pi, de valor 3.141592653589...), que geométricamente se interpreta como la razón entre la *longitud* de una *circunferencia* y su *diámetro*, es decir, las veces que el diámetro de una circunferencia cabe en su periferia (alrededor de la circunferencia): $\pi = \frac{C}{D}$.

2. El e (número e, de valor 2.718281828459...):

$$\text{lím}_{n\to\infty} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

3. El ϕ (número áureo, la "razón de oro" de valor 1.618033988...): $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. Así como las soluciones reales:

a) $x^2 - 3 = 0$

b) $x^5 - 7 = 0$

c) $x^3 = 11$

d) $3^x = 5$

e) $sen 7^\circ \ldots$

Además, los *números irracionales* se clasifican en dos tipos:

1. Números irracionales algebraicos. Representan la solución de alguna ecuación algebraica que es ese número. Al eliminar radicales del segundo elemento, se puede representar por un número finito de radicales libres o anidados; si x representa operaciones inversas, queda una ecuación algebraica de determinado grado (Gentile, 1996). Por ejemplo, las raíces no exactas de cualquier orden: la raíz que resulta de la ecuación algebraica $x^2 - x - 1 = 0$.

2. Número irracional trascendente. Son los que no pueden representarse mediante un número finito de raíces libres o anidadas; provienen de las llamadas funciones trascendentes (trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, etc.). Por ejemplo, los números π y e, que no pueden expresarse mediante radicales.

1.3.5. El número cero (0)

La historia del número cero se remonta a un paso agigantado hacia la Antigüedad. Los antiguos griegos y romanos no lograron dar un nombre a "la nada". Ellos no contaban la "nada". Los griegos que desarrollaron la lógica y la geometría nunca introdujeron el número cero (https://soymatematicas.com/la-historia-del-cero/).

Podemos hablar acerca de cómo fue la primera idea del cero, la cual se remonta a tiempos apenas memoriales en los que el astrónomo Ptolomeo, influenciado por los babilonios, utilizó un símbolo parecido a nuestro moderno cero como marcador de posición en su sistema numérico, logrando distinguir entre el 75 y el 705, entre el 200 y el 2001, entre el 10 y el 101.

Los mayas y los babilonios utilizaban el cero para marcar un numeral ausente. Los calculistas indios lo definieron como el resultado de sustraer cualquier número de sí mismo [5– (+

5) = 0]. Podemos afirmar que el cero nació en la India. La palabra *cero* proviene de la traducción de su nombre en sánscrito (una lengua clásica de la India) "shunya", que significa vacío (Fernández, 2005) (figura 3).

FIGURA 3. *La invención del cero*

FUENTE: Fernández, 2005.
Véase https://soymatematicas.com/la historia del cero/.

La historia indú atribuye a Brahmagupta la utilización del cero como un "número", no como un simple marcador de posición.

Por su parte, los árabes introdujeron el cero a Europa. El sistema de numeración hindú-arábigo, que incluyó el cero, fue promulgado en Occidente por Fibonacci, en su *Liber abaci* (*Libro del ábaco*), publicado en 1202, obra histórica sobre aritmética, escrita por Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci. Su título tiene dos traducciones comunes: *El libro* *del ábaco* y *El libro del cálculo*. Según los críticos, la traducción correcta es la del segundo libro, ya que la intención de la obra fue describir métodos de hacer cálculos sin el uso del ábaco (Fedriani y Tenorio, 2004).

La importancia del cero radica en que es usado en la vida cotidiana, de manera común y espontánea. Es notable su uso en las siguientes situaciones:

- La hora cero
- 0° C
- Pendiente cero
- Cero gravedad
- Cero grados latitud
- Cero grados de longitud
- Cero altura
- Cuenta en cero

Ahora podemos verificar su importancia en las operaciones de la aritmética, en las que su uso encierra todo un razonamiento complejo.

1.3.5.1. Operaciones con el número cero

A) Elemento neutro de la suma y la resta (0)

Toda cantidad, símbolo o elemento numérico al que se le suma o resta otra cantidad igual a CERO *o "tendiente a* CERO*" resulta la misma cantidad.*

Ejemplos:

a) $a + 0 = a$ Se ha sumado una cantidad cero

b) $b - 0 = b$ Se ha restado una cantidad cero c $)x + 0.000008 = x + 0 = x$ En este caso se ha sumado una cantidad *tendiente a* cero; es decir, en la práctica de la vida cotidiana, sumar una cantidad demasiado pequeña a una cantidad entera es como no sumar "nada". Por ejemplo, suponiendo que x equivale a 2 m, si a esta cantidad le sumamos 0.000008 m, el resultado será 2.000008 m, ya que se le está adicionando 8 millonésimas partes del m, que en realidad es como no haberle adicionado "nada".

d) $5 - 0.000002 = 4.999998 \cong 5$ En este otro ejemplo, restar una cantidad demasiado pequeña de una cantidad entera es como no disminuir nada; se está restando una cantidad *tendiente a cero*, por lo que la cantidad entera (5) no sufre alteración, ya que a 5 kg se le están disminuyendo 2 millonésimas partes del kg. En las actividades de la vida real resulta impráctico manejar cantidades muy pequeñas. Incluso, muchas veces se dificulta realizar esas mediciones, aunque se cuente con los instrumentos avanzados para esta tarea; más aún si la cantidad que sumamos o restamos tiene unidades de medida pequeñas (como los submúltiplos: cm, ml, mm, mg, micras, nano, pico, etc.), la suma o la resta de una cantidad entera pierde sentido.

> NOTA: sobre los incisos c y d se aclara que matemáticamente 2 y 2.000008 son totalmente diferentes, así como también 5 y 4.999998, pues se puede demostrar posicionalmente en la recta numérica; sin embargo, lo que se explica en estos incisos es lo que se aplica en las actividades cotidianas.

Finalmente, ¿para qué nos servirá en la vida real este tipo de conceptos? Si en apariencia no se ve operación alguna, parece un simple juego de suma o resta de nada.

Ciertamente, cuando a una cantidad de alto valor le sumamos otra muy pequeña no causa ningún efecto en ella; por ejemplo, si a 100 kg de arroz le agregamos 0.5 g, pues no le hemos agregado prácticamente nada; pero si la cantidad sumando y sumada son muy pequeñas, entonces lo más seguro es que sí cause efecto; por ejemplo, si a un quilate (0.205 g) le agregamos medio quilate (0.1025 g), éste sí causa un efecto, porque ahora tengo 0.3075 g, que en una alhaja seguramente significa un valor económico considerable. Hemos de darnos cuenta de que sí tiene su importancia, dependiendo del contexto en que lo estemos aplicando.

El elemento neutro de la suma y la resta en la matemática básica se considera como cero; sin embargo, en la matemática aplicada toma un giro significativo, pues dependerá del contexto en el que se aplique.

B) Propiedad multiplicativa del cero (0)

Cualquier número o cantidad multiplicada por cero siempre será CERO *(0).*

¿Cómo se produce este resultado? Para algunos es fácil comprender este efecto al razonar que si se multiplica una “x” cantidad por el factor “0”, pues el resultado será cero, sin embargo, para otros es difícil entenderlo. Partiendo del razonamiento de que si se tiene una cantidad significativa y se multiplica por “nada” (0), hablando cotidianamente, pues lo lógico es que se conserve la misma cantidad; pero ese no es un razonamiento matemático. Como ya se ha mencionado en los conceptos anteriores, cuando se habla del CERO (0) en matemáticas no se habla del conjunto vacío, de la “nada”, sino de una cantidad demasiado pequeña, tendiente a CERO. Ésta sería la manera correcta de razonar.

Los siguientes ejemplos numéricos ayudan a esclarecer este concepto:

a) $a \times 0 = 0$

b) $2x \times 0 = 0$

c) $a(0 + 0) = 0$

d) $\left(2x^2 + 1\right)(0) = 0$

e) $(2\mathrm{xy})(\frac{0}{x}) = 0$

f) $\left(3x^2\right)^4 (0) = 0$

La tendencia del resultado es clara cuando el segundo factor multiplicativo tiende a cero. En el siguiente desglose se refleja mejor esta situación:

$1000 \times 1 = 1000$

$1000 \times 0.1 = 100$

$1000 \times 0.01 = 10$

$1000 \times 0.001 = 1$

$1000 \times 0.0001 = 0.1$

$1000 \times 0.00001 = 0.01$

$1000 \times 0.000001 = 0.001$

$1000 \times 0.0000001 = 0.0001$

$\vdots$

$1000 \times 0 = 0$

Así se demuestra que todo factor multiplicativo diferente de cero, multiplicado por otro, tendiente a cero, resulta otra cantidad tendiente a cero, es decir, cero (0).

C) Propiedad divisiva del cero (0)

I. Cuando el numerador o dividendo es cero. *Cuando una cantidad cero* o, mejor expresado, *tendiente a cero, es dividida por otra cantidad "x" diferente de cero, siempre resultará un cociente cero o tendiente a cero (cantidad demasiado pequeña).*

Pues es lógico pensar que si estoy dividiendo "casi nada" entre un conjunto "x" de personas, a éstas les corresponda "casi nada".

Ejemplos:

a) $\frac{0}{x} = 0$, donde $x \neq 0$

b) $\frac{0}{5} = 0$

c) $\frac{0}{x^2 y} = 0$

d) $\frac{\frac{0}{2b}}{3x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}}} = \frac{0}{3x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}}} = 0$

e) $\frac{0}{1} = 0$

f) $\frac{0}{1000} = 0$

Sin embargo, un ejemplo con mayor detalle, puede aclarar mejor esta idea. *Supongamos que sufrimos una de esas carestías que muchas veces nos sorprenden en este mundo, cuando necesitamos apoyar a 20 familias y para lo cual sólo disponemos de 20 kg de arroz, y que el reparto se va a realizar varias ocasiones pero cada vez con menos disposición del producto.* La primera dotación arrancaría de la siguiente forma y sucesivamente iría disminuyendo:

$$\frac{20\, kilos\, de\, arroz}{20 familias} = 1kg/familia$$

$$\frac{10\, kilos\, de\, arroz}{20 familias} = 0.5 kg/familia$$

$$\frac{5\, kilos\, de\, arroz}{20 familias} = 0.25 kg/familia$$

$$\frac{1\, kilos\, de\, arroz}{20 familias} = 0.05 kg/familia$$

$$\frac{0.5\, kilos\, de\, arroz}{20 familias} = 0.025 kg/familia$$

$$\frac{0.1\, kilos\, de\, arroz}{20 familias} = 0.005 kg/familia$$

$$\frac{0.01\, kilos\, de\, arroz}{20 familias} = 0.0005 kg/familia$$

$$\frac{0.001\, kilos\, de\, arroz}{20 familias} = 0.00005 kg/familia$$

$$\frac{0}{20} = 0$$

Es fácil constatar que cuando el DIVIDENDO o numerador tiende a cero, el cociente (resultado) igualmente tiende a cero. Por lo tanto:

$$\frac{\text{cero}}{\text{diferente de cero}} = 0 \Longrightarrow \left(\frac{0}{x} = 0\right)$$

II. Cuando el denominador o divisor es cero. *Cuando una cantidad x, diferente de cero, es dividida por otra cantidad igual a cero o tendiente a cero, siempre resultará un cociente* INDETERMINADO *(∞),* es decir, *una cantidad demasiado grande ("tendiente a la idea de infinito").*

Ejemplos:

a) $\frac{x}{0} = \infty, x \neq 0$

b) $\frac{5x^2}{0} = \infty$

c) $\frac{\frac{x}{y^2xz}}{\frac{0}{x^2}} = \frac{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}y^2z}}{0} = \frac{\frac{1}{y^2z}}{0/1} = \frac{1}{0} = \infty$

¿Por qué resulta una cantidad infinita?, observemos los ejemplos d), e) y f). ¿Cómo surge la idea de ENTRE CERO? No se trata del cero absoluto, sino de una cantidad tendiente a 0 o su equivalente (Alfeld, 2009).

d) $\frac{5}{0.0001} = 50,000$

e) $\frac{5}{0.00000008} = 62'500,000$

f) $\frac{2}{0.0000000000001} = 20000000000000 = 2 \times 10^{13}$

Como se observa, mientras más se acerque al cero el denominador, el cociente será mayor, tendiente a una cantidad indeterminada.

De ahí que: $\frac{x}{0} = \infty$ (indeterminada)

Muchas veces cuesta trabajo entender que dividir una cantidad "x" diferente de cero, entre otra que es demasiado pequeña, que tiende a cero, resulte un **cociente** demasiado grande, al grado de denominarlo **infinito**; tanto, que al comparar el denominador con el resultado (cociente), es notable la discrepancia.

Un ejemplo que puede esclarecer mejor este efecto matemático, es el siguiente. *Suponiendo que hay una peregrinación y se necesita preparar habitaciones para el descanso de los peregrinos. Suponiendo que son 100 personas en la primera avanzada y que en un principio se dispone de 50 habitaciones. No obstante, sucederá algo en el momento en que las habitaciones comiencen a disminuir por la llegada de más peregrinos.* Veamos:

$\frac{100 \quad personas}{50 \quad habitación}$

$\frac{100}{50} = 2$ personas por habitación

$\frac{100}{25} = 4$ personas por habitación

$\frac{100}{10} = 10$ personas por habitación

$\frac{100}{0.5} = 200$ personas por habitación

$\frac{100}{0.2} = 500$ personas por habitación

$\frac{100}{0.1} = 1000$ personas por habitación

$\frac{100}{0.01} = 10\,000$ personas por habitación

$\frac{100}{0.001} = 100\,000$ personas por habitación

$\frac{100}{0.0001} = 1\,000\,000$ personas por habitación

En un principio correspondió dos personas por habitación; luego, cuando el espacio disminuyó a la mitad, la cantidad de personas por habitación fue del doble (cuatro), y así sucesivamente. Cuando sólo se disponía de media habitación (divisor 0.5), el resultado: *200 persona por habitación* significa que la capacidad de esa habitación debe ser, ya no aquella en la que cabían 2, sino 200; el resultado: *1 000 000 de personas por habitación* significa que esa habitación sea de un tamaño colosal y que tenga la capacidad para albergar a un millón de personas —¡imagine el efecto de esta relación!—, y así sucesivamente hasta llegar a un resultado cuyo cociente tienda a infinito (∞). Lo que creció fue el tamaño de la habitación requerida, comparado con lo que tenía cada habitación en un principio.

Otro ejemplo que también puede ayudar es el siguiente. *Cinco hormigas caminan en busca de supervivencia y después de mucho andar se encuentran con una vaca muerta. Si la vaca pesa 400 kg y las cinco hormigas 0.0001 kg; ¿qué sucederá en el reparto de la comida ricamente hallada por estas cinco comadres diminutas?*

$$\frac{400\, kg\, la\, vaca}{0.0001 kg\, las\, hormigas} = 4,000,000$$

Esto es que a cada hormiga le corresponderá
proporcionalmente, 4 millones de veces su peso

Pensando un poco de manera fantasiosa, las hormigas podrían decir: "Tenemos una cantidad infinita de comida para cada una: ¡tenemos el futuro asegurado!"

En realidad, esta cantidad exagerada surge porque se está comparando el peso de cada hormiga con el peso de la cantidad de comida que le correspondería a cada una.

Espero, estimado lector, que con estos ejemplos, aunque un poco burdos, quede más clara la idea de que al dividir cantidades diferentes de cero entre cantidades demasiados pequeñas (*tendientes a cero*), siempre resulten cantidades demasiados grandes, como para denominarlas infinitas o indeterminadas (∞).

En conclusión:

$\frac{0}{x} = 0$. Dividir una cantidad cero entre otra cantidad diferente de cero ($\neq 0$), siempre resultará cero.

$\frac{x}{0} = \infty$ (Indeterminación). Cualquier cantidad diferente de cero dividida entre cero propiciará una indeterminación (cantidad infinita, ∞).

$\frac{0}{0} = \infty$ (Indeterminación).

Esta es una de las *curiosidades* que surgen al operar con el 0. Seguramente mantenga la inquietud sobre la indeterminación que resulta de esta operación; sin embargo, se le invita a razonar de nuevo acerca de los ejemplos, el de las habitaciones y el de las hormigas, que seguramente esclarecerán mejor nuestras ideas.

D) El cero como exponente. *Todo número, símbolo o expresión matemática a la potencia 0 es igual a la unidad (1).*

Ejemplos:

a) $a^0 = 1$

b) $1000^0 = 1$

c) $(24x^2y^3)^0 = 1$

d) $(\frac{b^6y^4}{45})^0 = 1$

e) $\left[\left(\frac{485a^3b^4y^{\frac{1}{5}}}{112a^2x^2y^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^0 = 1$

Un estudiante, por poco observador que sea, tendrá la inquietud acerca de cómo surge este resultado, porque aparentemente no hay una razón rigurosa de operación con el 0 y, sobre todo, que el efecto de este exponente reduzca a la unidad (1) a todo un número o expresión, por grande que sea. Son esas curiosidades que tiene el manejo de los números.

En este tipo de casos de potencias, la importancia radica en el concepto del exponente 0, pues no se trata de un cero "absoluto", sino de un exponente demasiado pequeño, tendiente a cero *(Exp.→ 0)*.

Ejemplos:

$5^5 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3125$

$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

$5^2 = 5 \times 5 = 25$

$5^1 = 5 = 5$

$5^0 = 1$

$5^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{5} = 5^{0.1} = 1.1746189\ldots$

$5^{\frac{1}{100}} = 5^{0.01} = 1.01622459\ldots$

$5^{\frac{1}{1000}} = 5^{0.001} = 1.001622459\ldots$

$5^{\frac{1}{10000}} = 5^{0.0001} = 1.0001909567\ldots$

$5^{\frac{1}{100000}} = 5^{0.00001} = 1.0000160945086\ldots$

$5^{\frac{1}{1000000}} = 5^{0.000001} = 1.00001609450\ldots$

El 1 entero nunca cambiará y los ceros después del punto decimal seguirán aumentando. De ahí la conclusión:

$$\therefore 5^0 = 1$$

Esto es, cuando el exponente *tiende a cero*, el resultado de la potencia siempre será igual a la unidad; sin embargo, hay otra forma más sencilla de explicar el efecto del exponente 0:

a) $\frac{t\times t\times t}{t\times t\times t} = \frac{t^3}{t^3} = t^{3-3} = t^0 = 1$, o

b) $\frac{m\times m\times m\times m\times m}{m\times m\times m\times m\times m} = \frac{m^5}{m^5} = m^{5-5} = m^0 = 1$, que también se puede como:

c) $\frac{m\times m\times m\times m\times m}{m\times m\times m\times m\times m} = \frac{\cancel{m^5}}{\cancel{m^5}} = 1$

d) $\frac{2\times 2\times 2\times 2}{2\times 2\times 2\times 2} = \frac{2^4}{2^4} = 2^{4-4} = 2^0 = 1$

Esto es, aplicando una de las leyes de los exponentes: *cuando se dividen potencias de la misma base, la base permanece y los exponentes se restan.* Lo que se ha hecho en los ejemplos anteriores.

El caso particular 0^0 no está definido. Se considera una indeterminación (∞).

1.3.6. Los números primos. Un breviario histórico

Entre los números naturales se encuentran los números primos. Éstos y sus propiedades fueron estudiados de manera exhaustiva por los matemáticos de la antigua Grecia. Los matemáticos de la Escuela Pitagórica (500 a 300 a. C.) estaban interesados en los números por su misticismo y sus propiedades numerológicas. Comprendían la idea de primalidad y estaban interesados en los números perfectos y amigables. En el momento en que el matemático griego Euclides publicara los *Elementos* que aparecieron por el año 300 a. C., ya habían sido probadas varias tesis importantes acerca de los números primos. En el libro IX de los *Elementos* Euclides demuestra que hay infinidad de números primos (Alba, 2019a). Esta es una de las primeras demostraciones conocidas en la que se utiliza el método del absurdo para establecer el resultado. En el mismo libro también demostró el *teorema fundamental de la aritmética,* el cual establece que "todo entero puede ser escrito como un producto único de números primos" (*La Biblia de las matemáticas*, 2005). Asimismo, lo hizo demostrando que si el número $2n - 1$ es primo, entonces el número $2n - 1(2n - 1)$ es un número perfecto (Tan, 2007).

Un número perfecto es aquel en el que *la suma de sus divisores menores que el mismo número coinciden con el número.* Por ejemplo, el 6 es un número perfecto porque sus divisores menores son: 1, 2 y 3. Sumando éstos da: $1 + 2 + 3 = 6$. Por lo tanto, el 6 es un número perfecto.

Cerca del año 200 a. C., el griego Eratóstenes ideó un algoritmo para calcular números primos, llamado criba de Eratóstenes (figura 4). Después de todo este proceso y a lo largo de muchos años, hubo un gran vacío en la historia de los números primos que comúnmente es conocido como la Edad Oscura de los Números Primos.

Y... ¿qué es un número primo?

Es el *número que únicamente puede dividirse entre 1 y él mismo* (Paredes y Ramírez, 2008). Por ejemplo, el número 2 sólo se divide entre 1 y 2, el número 3 sólo se divide entre 1 y 3, el número 5 sólo se divide entre 1 y 5. Por lo tanto, estos números que sólo tienen dos divisores son *números primos.* Lo contrario sucede con el número 6, que es divisible entre 1, 2, 3 y 6. A los números que tienen más de dos divisores se les llama *números compuestos*; por lo tanto, el número 6 es un número compuesto.

El conjunto de números primos es muy amplio, como lo sostuvo Eratóstenes: *constituyen una serie infinita de números* y su estudio ha dado lugar a numerosas investigaciones en el campo de las matemáticas. Para conocer con más detalle los números primos que se encuentran entre los primeros 150 números naturales, a continuación se presenta la criba de Eratóstenes (figura 4).

El *número 1* sólo tiene un divisor, por lo que *no es primo ni compuesto*; por tal razón aparece cancelado en la criba.

Los números que aparecen encerrados en un óvalo conforman la serie de *números primos* que se registran en los primeros 150 números naturales, pues cumplen con el criterio de ser divisibles únicamente entre la unidad (1) y ellos mismos.

Con el arreglo que presenta esta criba es fácil determinar que en los números que terminan en 3 aparecen más números primos, seguidos de los terminados en 7 y 9, así como los terminados en 1.

FIGURA 4. *Criba de Eratóstenes de los primeros 150 números*

Criba de Eratóstenes

~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
92	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150

Números primos

FUENTE: Aula/Siglo XXI, 2002.

Lo contrario sucede con los pares, el 5 y el 0; excepto el 2 y el 5 que, dentro de éstos, son los únicos primos (Bonet, 2006).

1.4. Los números imaginarios

En matemáticas un *número imaginario* es un *número complejo* (Aguilar et al., 2009) cuya parte real es igual a cero. Un ejemplo de este tipo de números es $5i$, así como i o $-i$.

Nuestra definición quizá podría quedar más clara si afirmamos que un número complejo es un número de la forma:

$$z = x + yi$$

donde yi se expresa como el producto de un número real por la *unidad imaginaria* i, y la letra i denota la raíz cuadrada de -1: $i = \sqrt{-1}$, y como se da el caso de que x se suma a la parte imaginaria, en ese momento x pierde su valor real y en esta ecuación pasa a ser igual a cero ($x = 0$).

En 1777 Leonhard Euler le dio a $\sqrt{-1}$ el nombre de i, por imaginario, de manera despectiva, dando entender que no tenía una existencia real. En el siglo XVII Gottfried Leibniz aseguraba que $\sqrt{-1}$ era una especie de anfibio entre el *ser* y la *nada*.

En ingeniería electrónica y sus campos relacionados, la unidad imaginaria a menudo se escribe como j para evitar confusión con la la intensidad de la corriente eléctrica, tradicionalmente denotada por i (Joaquim y Ortega, 1993).

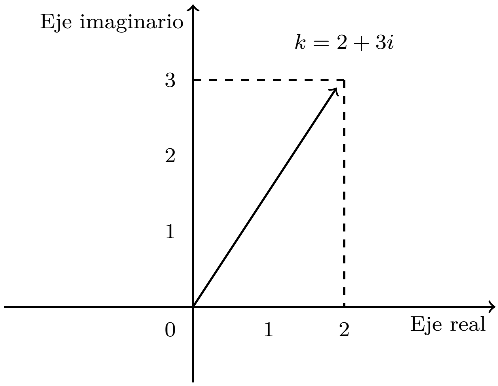
1.4.1. Interpretación geométrica de los números imaginarios

Los números imaginarios se pueden representar en el plano cartesiano, considerando al eje horizontal (eje x, eje de las abscisas) como eje real y, al vertical (eje y, eje de las ordenadas) como eje imaginario.

Consideremos a un número complejo como $k = a + bi$, siendo a la parte real y b la parte imaginaria. Por lo tanto, una representación cartesiana de este número, estará formado por el par coordenado, dado por: $k(a, b)$, tal y como se representa en la Figura 3 (Aguilar et al., 2015).

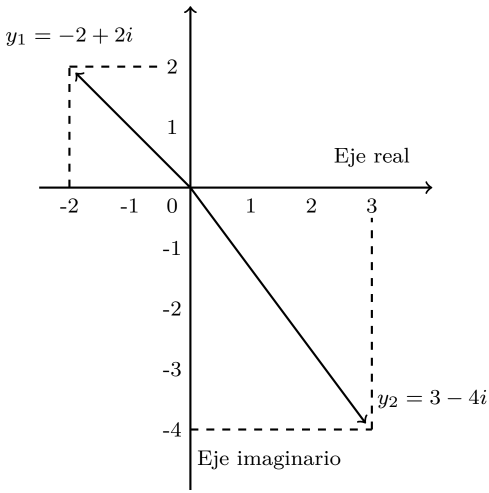
Como ejemplo trabajamos el número complejo $k = (2+3i)$, cuyo punto coordenado de la representación gráfica es: $k(2,3)$.

FIGURA 3. *Geometría de los números imaginarios*



Otro ejemplo de representación gráfica de número complejo es como éste: $y = 3-4i$, cuyo punto coordenado, será: $y(3,-4)$ (Figura 4).

FIGURA 4. *Representación geométrica de un número imaginario.*



La expresión algebraica que denota a un número imaginario, es:

$$x^2 = -1$$

De donde resulta:

$$x = \sqrt{-1}$$

lo cual es imposible obtener un resultado real de esta expresión, dentro de las matemáticas elementales; sin embargo, por una de las propiedades de los números imaginarios, resulta que: $\sqrt{-1} = i$, de donde se puede deducir que:

$$x = \sqrt{(i)(1)}$$
$$x = \sqrt{1}i$$
$$x = 1i$$
$$x = i$$

Siendo así, el valor de x resulta ser un número imaginario.

1.4.2. Propiedades de los números imaginarios

De acuerdo con lo expuesto antes (interpretación geométrica), las propiedades más comunes de los números imaginarios podrían esquematizarse de la siguiente forma:

$i^{-3} = i$

$i^{-2} = -1$

$i^{-1} = -i$

$i^{0} = 1$

$i^{1} = i$

$i^{2} = -1$

$i^{3} = -i$

$i^{4} = 1$

$i^{5} = i$

$i^{6} = -1$

De acuerdo con estas propiedades se puede afirmar que todo número imaginario puede ser escrito como ib, donde b es un número real e i es la unidad imaginaria, con la propiedad $i^2 = -1$; entonces: $(bi)^2 = -b^2$, que es un número real.

Cada número complejo puede ser escrito unívocamente como una suma de un número real y un número imaginario: $a + bi$. Al número imaginario i también se le denomina *constante imaginaria.*

Del mismo modo, partiendo de $\sqrt{-1} = i$, la raíz cuadrada o —más explícitamente— la *raíz par* de cualquier número real negativo da por resultado un número imaginario. Así, por ejemplo:

$$\sqrt{36} = \sqrt{(36)(-1)} = \sqrt{36}\sqrt{-1} = 6i$$

O también:

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{(81)(-1)} = \sqrt[4]{81}\sqrt[4]{-1} = 3i$$

Estos números extienden el conjunto de los números reales R al conjunto de los números complejos C.

Por otro lado, los números imaginarios no tienen la propiedad, al igual que los números reales, de poder ser *ordenados* de acuerdo con su *valor*; es decir, es correcto afirmar que $1 > 0$ y que $-1 < 0$. Esta regla no aplica para los números imaginarios, debido a una simple razón: en los números reales, por ejemplo a y b, donde ambos son mayores que cero, el producto de éstos es igual a un número mayor que cero.

Esto se puede explicar mediante el siguiente ejemplo: es justo decir que $a = 2 > 0$ y $b = 3 > 0$. Por lo tanto, $(a)(b) = c > 0$, entonces tenemos que $(2)(3) = 6$, y obviamente $6 > 0$.

Sin embargo, suponiendo que $i > 0$, entonces se tiene que $-1 = (i)(i) > 0$, lo cual evidentemente es falso.

Otro ejemplo. Existe la errónea suposición de que $i < 0$, pero si multiplicamos por -1 resulta que $-i > 0$. Por lo tanto, tenemos que $-1 = (-i)(-i) > 0$, lo cual es igualmente falso.

En conclusión, esta suposición, y cualquier otro intento de asignar un valor ordinal a los números imaginarios, son completamente falsos.

1.4.3. Casos especiales de números complejos

Los casos especiales de números complejos son como algunos de los siguientes:

a+bi es llamado número complejo si $b \neq 0$

a+bi es llamado número puramente imaginario si $a = 0$ y $b \neq 0$

a+bi es llamado número imaginario si $b \neq 0$, pero si $b = 0$ se convierte en un número real.

Ejemplos de estos casos son los que se listan a continuación:

$4i =$ número puramente imaginario.

$-6i =$ número puramente imaginario.

$i\sqrt{3} =$ número puramente imaginario.

$2 + 3i =$ número complejo.

$-4 + 2i =$ número complejo.

$-5 + 2 =$ número real.

Por otro lado, las operaciones aritméticas adición, sustracción, producto y cociente de dos números complejos están definidas por las siguientes ecuaciones:

Adición: $(a + bi) + (c + d)i = (a + c) + (b + d)i$

Sustracción: $(a + bi) - (c + d)i = (a - c) + (b - d)i$

Producto: $(a + bi)(c + d)i = (ac + bd) + (bc + ad)i$

Cociente: $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$, donde c y d son distintos de cero.

Por definición se sabe que $i^2 = -1$

$\therefore \boldsymbol{i}^3 = \boldsymbol{i}^2 \times \boldsymbol{i} = (-1)(\boldsymbol{i}) = -\boldsymbol{i}$

$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1)(-1) = 1$

$\boldsymbol{i}^5 = \boldsymbol{i}^2 \times \boldsymbol{i}^2 \times \boldsymbol{i} = (-1)(-1)(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{i}^6 = \boldsymbol{i}^2 \times \boldsymbol{i}^2 \times \boldsymbol{i}^2 = (-1)(-1)(-1) = -1$

$\boldsymbol{i}^7 = \boldsymbol{i}^2 \times \boldsymbol{i}^2 \times \boldsymbol{i}^2 \times \boldsymbol{i} = (-1)(-1)(-1)(\boldsymbol{i}) = -\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{i}^8 = \boldsymbol{i}^2 \times \boldsymbol{i}^2 \times \boldsymbol{i}^2 \times \boldsymbol{i}^2 = (-1)(-1)(-1)(-1) = 1$

Por lo cual se puede concluir que i con exponente múltiplo de 4 siempre será 1; así se deduce que las potencias enteras de i son iguales a: i, -1, $-i$ y 1.

Algunos ejemplos de este efecto son los siguientes:

$i^{17} = i^{16} \times i = (1)(i) = i$

$i^{-6} \times i^8 = i^2 = -1$

1.4.4. Usos de los números imaginarios

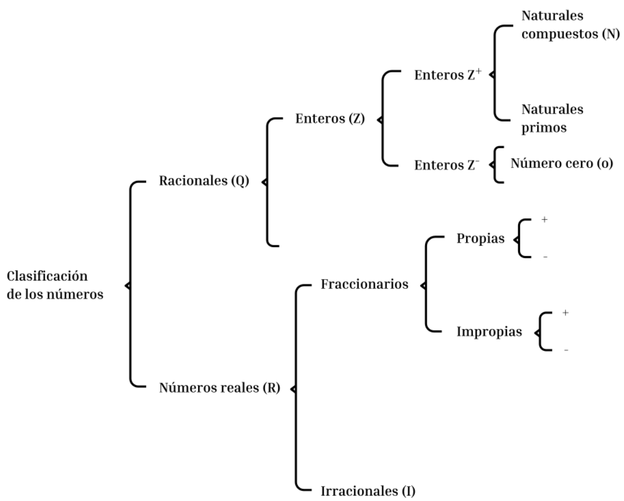
- La unidad imaginaria puede ser utilizada para *extender formalmente la raíz cuadrada de números negativos,* confirmando el teorema fundamental del álgebra que establece que “todo polinomio de una variable no constante con coeficientes complejos tiene una raíz compleja”, es decir, *existe un número complejo que, evaluado en el polinomio, da cero.*
- En física cuántica, la unidad imaginaria permite simplificar la descripción matemática de los estados cuánticos (Var. en el tiempo).
- En teoría de circuitos y corriente alterna, la unidad imaginaria se emplea para representar ciertas magnitudes como

fasores, lo cual permite un tratamiento algebraico más ágil de esas magnitudes (véase https://proyectmatematicas.wordpress.com/2019/09/09/numeroscomplejos-en-la-vida-cotidiana/).

Resumen

Después del breve recorrido por el andamiaje de los números, es necesario hacer un bosquejo final sobre la clasificación de los números (figura 6).

FIGURA 6. *Esquema-resumen de los números*



FUENTE: Elaboración propia.

A continuación, seguiremos nuestro recorrido por algunas propiedades de la aritmética que muchas veces han distraído nuestra atención con sus operaciones. Las abordaremos en la unidad 2.

Unidad 2
Fundamentos algebraicos

La enseñanza y la educación tienen que recibirse como un regalo de gran valor, no como una obligación desagradable.
ALBERT EINSTEIN

2.1. Introducción

Existen tantas sorpresas en el vasto campo de los números y sus operaciones, que deja sorprendido a todo aquel que trabaja con cálculos para analizar fenómenos sorprendentes, como lo hace la ingeniería cuando materializa esos cálculos y nos deja deslumbrados cuando contemplamos su obra. Desde su base, la aritmética ofrece curiosidades dignas de admirar cuando la matemática elemental no puede explicarlas. Es el caso de algunos fenómenos que abordaremos al descifrar algunos conceptos.

Estudiar la aritmética implica estudiar los números y sus propiedades. Éstos, a su vez, resultan de las diferentes operaciones que se realizan como parte de las actividades cotidianas de las personas. En esta unidad abordaremos algunas propiedades de la aritmética que es preciso dominar para llevar a cabo operaciones de manera exitosa. No se debe perder de vista que cometer un error en una operación, por muy elemental que sea ésta, nos puede costar muy caro.

Invita muy atentamente al lector a que estudie, medite y razone con mucha atención las propiedades que se exponen en seguida. Primero trataremos aquellas que son de dominio común, luego las menos explícitas, hasta llegar a aquellas que requieren mayor rigor para su dominio.

2.2. Algunas propiedades del álgebra

2.2.1. Elemento neutro de la multiplicación y la división (1)

Toda cantidad multiplicada o dividida por la unidad (1), *resulta la misma cantidad* (Sánchez, 2007).

Ejemplos:

1. $a \times 1 = a$

2. $b^2 \times 1 = b^2$

3. $(2x^2 + 1)1 = 2x^2 + 1$

4. $-3x^{\frac{1}{2}}(1) = -3x^{\frac{1}{2}}$

5. $\frac{a}{1} = a$

6. $\frac{2(x^2+1)}{1} = 2(x^2 + 1)$

7. $\frac{0/b}{1} = \frac{0}{1} = 0$ y, por la llamada "ley de la torta", $\frac{0}{b} = 0$, igualmente cero, donde b es diferente de cero.

8. $\frac{x/2b}{1} = \frac{x}{2b}$, donde b es diferente de cero.

2.2.2. Inverso aditivo

El inverso aditivo de cualquier cantidad es la misma cantidad con signo contrario.

Ejemplos:

1. $a - a = 0$. *El inverso aditivo de* a *es* $-a$.

2. $-5 + 5 = 0$. *El inverso aditivo de* -5 *es* 5.

3. $2 + 2(-1) = 0$. *El inverso aditivo de* 2 *es* $2(-1) = -2$

4. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1) = 0$. *El inverso aditivo de* $-\frac{1}{2}$ *es* $-\frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2}$

5. $-\frac{3xy^2}{2wz} + \frac{3xy^2}{2wz} = 0$. *El inverso aditivo de* $-\frac{3xy^2}{2wz}$ *es* $\frac{2xy^2}{2wz}$, donde w y z son diferentes de cero.

> NOTA: todo número sumado con su *inverso aditivo* siempre será igual a cero.

2.2.3. Inverso multiplicativo

El inverso multiplicativo de una cantidad es la misma cantidad dividiendo a la unidad, o en entero, o simplemente su recíproco (inverso) (Santiago y Rodríguez, 2018).

Ejemplos:

1. $a(\frac{1}{a}) = \frac{a}{a} = 1$. *El inverso multiplicativo de* "a" *es* $\frac{1}{a}$, donde a es diferente de cero.

2. $2b(\frac{1}{2b}) = \frac{2b}{2b} = 1$. *El inverso multiplicativo de* "2b" *es* $\frac{1}{2b}$, donde b es diferente de cero.

3. $\frac{2x}{y}(\frac{1}{\frac{2x}{y}}) = \frac{2x}{\frac{2xy}{y}} = \frac{2x}{2x} = 1$. El inverso multiplicativo de $\frac{2x}{y}$ es $\frac{1}{\frac{2x}{y}}$, donde x y y son diferentes de cero.

4. $\frac{1}{b}(\frac{1}{\frac{1}{b}}) = \frac{1}{b}(\frac{b}{1}) = \frac{b}{b} = 1$. *El inverso multiplicativo de* "$\frac{1}{b}$" *es* $\frac{1}{\frac{1}{b}}$ donde b es diferente de cero.

5. $y(\frac{1}{y}) = \frac{y}{y} = 1$. *El inverso multiplicativo de* "y" *es* $\frac{1}{y}$, donde y es diferente de cero.

> NOTA: todo número multiplicado por su inverso es igual a la unidad (1).

2.2.4. Ley de la cancelación de la suma y la resta

Cualquier elemento, símbolo o cantidad ubicada en ambos miembros de una igualdad con el mismo signo son cancelables (Sánchez, 2007).

Ejemplos:

1. $2x\cancel{+3} = 7\cancel{+3}$
   $2x = 7$
   $x = \frac{7}{2}$

2. $3x\cancel{-1^2} = x\cancel{-1^2}$
   $3x = x$
   $3x - x = 0$
   $2x = 0$
   $x = \frac{0}{2}$
   $x = 0$

3. $\cancel{x^2} - 1 + x = \cancel{x^2} + 1$
   $x = 1 + 1$
   $x = 2$

4. $\cancel{3x^3} + 3\cancel{-x} + 2x = \cancel{3x^3} - 3\cancel{-x}$
   $2x = -3 - 3$

$x = -\frac{6}{2}$
$x = -3$

5. $\frac{3}{4}w^3 - \cancel{\sqrt[3]{32}} + m^5 + \cancel{2z} = -\cancel{\sqrt[3]{32}} + \frac{4}{3}w^2 + \cancel{2z}$

$m^5 = \frac{4}{3}w^2 - \frac{3}{4}w^3$

$m = \sqrt[5]{\frac{4}{3}w^2 - \frac{3}{4}w^3}$

Ejercicios. En los siguientes ejercicios, aplique la ley de la cancelación de la suma y la resta, para simplificar o resolver las expresiones:

1. $-5x^2 + 3 = -3 - 5x^2$
2. $-3x + 1 = -x + 1 - 2$
3. $2x^3 - 1 + x^5 - m = 2x^3 + 1 + x^5$
4. $x^-3 + 3 + x + 2x = x^-3 - 3 + x$
5. $w^3 + \frac{1}{2} - \sqrt[3]{m^3} + m^5 + 2z = \frac{1}{2} - \sqrt[3]{m^3} + 243 + w^3 + 2z$
6. $\sqrt{\frac{mw}{4}} - 1 + \frac{3}{7}m = 1 + \sqrt{\frac{mw}{4} - 1}$
7. $2x^3 - 1 + x^5 - m = 2x^3 + 1 - x^5 - m$
8. $\frac{34}{\sqrt[4]{hk}} + 1 - \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{m} + \frac{34}{\sqrt[4]{hk}}$, donde m, h y k son diferentes de cero.
9. $9w^5 + \frac{2}{3}m = 9w^5 - 5m^2 + 1$
10. $-\frac{5}{4}x^2 + 1 = -3 - \frac{5}{3}x^2 + 2 + 3w^3 + 1$

2.2.5. Ley de la cancelación de la multiplicación y la división

Cualquier elemento que se esté multiplicando o dividiendo en ambos miembros de una igualdad, resulta cancelable.

Ejemplos:

1. $\cancel{a}b = \cancel{a}c$
   $b = c$

2. $\cancel{\frac{1+3h}{2m}} = \cancel{\frac{3w+1}{2m}}$
   $h = w$, donde m es diferente de cero.

3. $(\cancel{x} + y) \cdot \cancel{a\left(\frac{1}{b}\right)} = (1 + \cancel{x}) \cdot \cancel{a\left(\frac{1}{b}\right)}$
   $y = 1$, donde b es diferente de cero.

4. $\frac{1+3h}{\cancel{\frac{-}{2}3w^2}} = \frac{2w-1}{\cancel{\frac{-}{2}3w^2}}$
   $3h = 2w - 2$
   $h = \frac{2}{3}(w-1)$, donde w es diferente de cero.

5. $\cancel{\frac{1}{2}}\left[\frac{2y}{-\sqrt{wz}}\right] \cdot \cancel{5m^2} = \cancel{\frac{1}{2}}(-\sqrt{wz}) \cdot \cancel{5m^2}$
   $2y = (-\sqrt{wz}) \cdot (-\sqrt{wz})$
   $y = \frac{1}{2}wz$

Ejercicios. En los siguientes ejercicios, aplique la ley de la cancelación de la multiplicación y la división, para simplificar o resolver las expresiones:

1. $\frac{mz}{4} = \frac{z}{4}$

2. $3m + \frac{1+3w}{2m} = \frac{3w+1}{2m} + 3y$, donde m es diferente de cero.

3. $(1+x) \cdot a\left(\frac{1}{a}\right) = (1+x) \cdot b\left(\frac{1}{b}\right) + y$, donde a y b son diferentes de cero.

4. $\frac{1+3w}{3+2m} = \frac{2w-1}{3+2m}$, donde m es diferente de cero.

5. $1 + \frac{1}{2}\left[\frac{2y}{-\sqrt{wz}}\right] \cdot m^2 = -\frac{1}{2}(-\sqrt{wz}) \cdot m^2 + 1$, donde w y z son diferentes de cero.

6. $\frac{1+3h}{\frac{2}{3}w^2} = \frac{2w+1}{\frac{2}{3}w^2}$, donde w es diferente de cero.

7. $abc = 2bc$

8. $3m - 1 + \frac{1+3w}{2m} = \frac{3w+1}{2m} + 3y + m$, donde m es diferente de cero.

9. $abck + 2a = 2bck - 1$

10. $\frac{1+3w}{3+2m} - x^3 = \frac{2w-1}{3+2m} - x^3$, donde m es diferente de cero.

2.3. Leyes de los exponentes

Primera ley. Multiplicación de potencias de la misma base

Cuando dos o más potencias de la misma base se multiplican, la base permanece y los exponentes se suman (Baldor, 2007).

Ejemplos:

1. $a^n \times a^m = a^{n+m}$

2. $a^n \times a^n \times a^n \times a^n = a^{n+n+n+n} = a^{4n}$

3. $9^3 \times 9^2 = 9^{3+2} = 9^5 = 59,049$

4. $3^2 \times 3^3 \times 3^5 = 3^{10} = 59,049$

5. $7^4 \times 7^{-3} = 7^{4+(-3)} = 7^{4-3} = 7^1 = 7$

6. $12^{-3} \times 12^5 = 12^{-3+5} = 12^2 = 144$

7. $(2x^2)(-3x^3) = (2)(-3)x^{2+3} = -6x^5$

8. $x \cdot x \cdot x^2 \cdot x \cdot x^3 = x^{1+1+2+1+3} = x^8$

9. $xy^2 \cdot 2xy^3 \cdot xy = 2x^3y^6$

10. $m \cdot m \cdot m^3 \cdot m^{-1} \cdot m^{-4} = m^{1+1+3-1-4} = m^0 = 1$, donde m es diferente de cero.

Ejercicios. Aplicando la *Ley de la multiplicación de potencias de la misma base*, deduzca las expresiones que se plantean a continuación:

1. $(2x^2)(-3x^3) =$

2. $\left(\frac{3mw^3}{kh^3}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{3mw^3}{kh^3}\right)^{\frac{5}{3}} =$, donde k y h son diferentes de cero.

3. $\frac{2}{3}x^3y^2 \cdot 2xy^{-1} \cdot \frac{5}{6}x^{-1}y =$, donde x y y son diferentes de cero.

4. $by^2 \cdot by^{-3} \cdot by =$, donde y es diferente de cero.

5. $3w \cdot w^{-2} \cdot \frac{1}{3}w^3 \cdot w^{-1} \cdot w^4 =$, donde w es diferente de cero.

6. $x^5 \cdot m^2 \cdot x \cdot x^{-5} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot m^{-4} \cdot m =$, donde m y x son diferentes de cero.

7. $(mxy)^{-2}(xym)^3(mxy) =$, donde m, x y y son diferentes de cero.

8. $\sqrt{wx} \cdot (wx)^{\frac{1}{2}} \cdot wx =$

9. $\sqrt[5]{a+by} \cdot \sqrt[3]{a+by} \cdot \sqrt{a+by} =$

10. $y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y^{-5} =$, donde y es diferente de cero.

Segunda ley. División de potencias de la misma base

Cuando dos potencias de la misma base se dividen, la base permanece y los exponentes se restan.

Una expresión general de esta ley es la siguiente:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ donde } a \text{ es diferente de cero.}$$

Ejemplos numéricos:

1. $\frac{5^4}{5^3} = 5^{4-3} = 5^1 = 5$

2. $\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3 = 27$

3. $\frac{7^3}{7^5} = 7^{3-5} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2}$

4. $\frac{4^3}{4^3} = 4^{3-3} = 4^0 = 1$

5. $\frac{25^{-3}}{25^{-8}} = 25^{-3-(-8)} = 25^{-3+8} = 25^5 = 9'765,625$

Ejemplos algebraícos:

1. $\frac{x^{-2}}{x} = x^{-2-1} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, donde x es diferente de cero.

2. $\frac{2xy^2}{xy} = 2x^{1-1}y^{2-l} = 2x^0y^1 = 2(1)y = 2y$; de manera resumida:

$2'$. $\frac{2\cancel{x}\cancel{y^2}}{\cancel{x}\cancel{y}} = 2y$, donde x y y son diferentes de cero.

3. $\frac{9z^{-2}r^{-1}}{3z^{-3}r^{-2}} = 3z^{-2-(-3)}r^{-1-(-2)} = 3zr$, donde z y r son diferentes de cero.

4. $\frac{b^{-2}z^{-1}}{z^{-2}b^{-2}} = b^{-2-(-2)}z^{-1-(-2)} = b^0z = 1z = z$, donde b y z son diferentes de cero.

5. $\left(\frac{8x^2h^4}{4x^3h^3}\right)^3 = \left(2x^{2-3}h^{4-3}\right)^3 = \left(2x^{-1}h\right)^3 = 8\frac{h^3}{x^3}$, donde h y x son diferentes de cero.

6. $\frac{3m^3wx}{mw^{-2}x} = 3m^2w^3$, donde m, w y x son diferentes de cero.

Ejercicios. Aplicando la *Ley de la división de potencias de la misma base*, deduzca las siguientes expresiones:

1. $frac2xy^23x^2y =$, donde m y y son diferentes de cero.

2. $frac5 \times 2^72^4 \times 8 =$

3. $\frac{w^{-4}t^{-1}}{3w^{-3}t^{2}} =$, donde w y t son diferentes de cero.

4. $\frac{3z^5r^2}{2z^3r^2} \times \frac{mk^3}{m^4k} =$, donde m, k, r y z son diferentes de cero.

5. $\left(\frac{32x^{-2}h^4m}{4x^3h^{-3}m^{-3}}\right)^2 =$, donde h, m y x son diferentes de cero.

6. $\left[\left(\frac{3wxy}{wx}\right)^3\right]^2 =$, donde w y x son diferentes de cero.

7. $\frac{b^{-2}z^1}{z^2b^{-2}} =$, donde b y z son diferentes de cero.

8. $\frac{5^3}{5^8} =$

9. $\left[\left(\frac{3wxy}{wx}\right)^2\left(\frac{0}{x}\right)\right]^2 =$, donde w y x son diferentes de cero.

10. $\frac{5^3 \cdot 4}{5^8 \cdot 4^{-3}} =$

11. $\frac{x^3 \cdot x \cdot x^{-2} \cdot x}{x^{-3} \cdot x \cdot x^4} =$, donde x es diferente de cero.

12. $\left(\frac{65x^{-2}h^4}{5x^3h^{-3}}\right)^{\frac{1}{3}} =$, donde h y x son diferentes de cero.

Tercera ley. Potencia de una potencia

Cuando una potencia se eleva a otra potencia, la base permanece y los exponentes se multiplican.

Ejemplos:

1. $(a^n)^m = a^{n\times m} = a^{nm}$

2. $(2x^2)^3 = 2^3x^6 = 8x^6$

3. $(ab)^r = a^rb^r$

4. $(x^2y^3)^2 = x^4y^6$

5. $\left(y^{3/2}\right)^{1/x} = y^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}} = y^{\frac{3}{2x}}$

6. $\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$

7. $\left(\frac{l}{3}\right)^3 = \frac{1^3}{3^3} = \frac{1}{27}$

8. $\left(\frac{2a^3x^2}{by}\right)^{2t} = \frac{2^{2t}a^{6t}x^{4t}}{b^{2t}y^{2t}}$, donde b y y son diferentes de cero.

9. $\left[\left(x^2\right)^w\right]^y = x^{2wy}$

10. $\left\{\left[(xy)^4\right]^{\frac{l}{n}}\right\}^{\frac{m}{2}} = (xy)^{\frac{4m}{2n}} = (xy)^{\frac{2m}{n}}$, donde n es diferente de cero.

Con base en este concepto, la notación $\left\{\left[\left(a^b\right)^c\right]^d\right\}^e$ se puede escribir sencillamente como a^{bcde}.

> NOTA. En todo proceso de aplicaciones de leyes matemáticas es necesario tener presente la aplicación de muchas otras reglas del álgebra.

Ejercicios. Aplicando la *Ley de potencia a potencia*, deduzca las expresiones que se proporcionan a continuación:

1. $\left[\left(5xy^3\right)^2\right]^{\frac{3}{4}} =$

2. $\left[\left(4x^2\right)^3\right]^{\frac{2}{3}} =$

3. $x^{2(3h)^4} =$

4. $\left(\frac{2b^3m^2}{bm}\right)^2 =$, donde b y m son diferentes de cero.

5. $\frac{w^{3^{2(2m)}}}{w^{2^5}} =$, donde w es diferente de cero.

6. $\left(\frac{w}{3}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^3} =$

7. $\left(\frac{2}{2m}\right)^2 =$, donde m es diferente de cero.

8. $\left(\frac{5}{25w^{-1}}\right)^3 =$, donde w es diferente de cero.

9. $\left(x^2y^3z^{-1}\right)^{3^2} =$, donde z es diferente de cero.

10. $\left\{\left[\left(b^3c^{-2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}} =$, donde c es diferente de cero.

Cuarta ley. Potencias con exponente cero (0) (potencia 0)

Todo número, símbolo o expresión algebraica diferente de cero elevada a la potencia 0, es igual a la unidad.

Ejemplos:

1. $a^0 = 1$, donde a es diferente de cero.

2. $(2a)^0 = 1$, donde a es diferente de cero.

3. $(-5)^0 = 1$

4. $1000^0 = 1$

5. $(24x^2y^3)^0 = 1$, donde x y y son diferentes de cero.

6. $\left(\frac{b^6y^4}{45}\right)^0 = 1$, donde b y y son diferentes de cero.

7. $\left[4xy\left(\frac{6mw^3}{7m^2h}\right)\right]^0 = 1$, donde m y h son diferentes de cero.

8. $\left[\left(\frac{485a^3b^4y^{\frac{l}{5}}}{112a^2x^2y^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^0 = 1$, donde a, x y y son diferentes de cero.

Demostración
Para una mejor demostración de este tema, remítase al apartado "1.3.5.1 Operaciones con el número cero", inciso D, de la unidad 1, donde se establece que aplicando la ley de los exponentes "cuando se dividen potencias de la misma base, la base permanece y los exponentes se restan".

Quinta ley. Potencia negativa
Cuando una potencia está elevada a un exponente negativo, equivale a su recíproco o inverso.

El exponente negativo surge del inverso multiplicativo que se denota como a^{-n}. La eliminación del exponente negativo de un término o expresión se realiza con la intención de no hacer operaciones con exponentes negativos.

De ahí la aplicación del *inverso multiplicativo.*
El desarrollo de la expresión del inverso se muestra en seguida:

$$a^{-n} = (a^{-1}) = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a^n} \times \frac{1}{n{-}esima\, a} = \frac{1}{a \times a \times a \times a^n} = \frac{1}{a^n}$$

donde a es diferente de cero.

Ejemplos:

1. $x^{-b} = \frac{1}{x^b}$, donde x es diferente de cero.
2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, donde a es diferente de cero.
3. $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, donde a es diferente de cero.
4. $ab^{-2} = \frac{a}{b^5}$, donde b es diferente de cero.
5. $abc^{-2} = \frac{ab}{c^2}$, donde c es diferente de cero.
6. $a^{-3}bc^{-1}d = \frac{bd}{a^3c}$, donde a y c son diferentes de cero.
7. $\frac{4m^{-2}k}{5wz^{-5}} = \frac{4kz^5}{5wm^2}$, donde m, w y z son diferentes de cero.

8. $\frac{2^{-1}+1^{-1}}{2^{-1}-1^{-1}} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{1}} = \frac{\frac{1+2}{2}}{\frac{1-2}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} = \frac{6}{-2} = -3$

Un ejemplo específico es el que sigue:

$\left(\frac{x}{y}\right)^{-3} = \frac{x^{-3}}{y^{-3}} = \frac{y^3}{x^3}$, donde x y y son diferentes de cero.

lo cual equivale a *invertir los elementos del cociente* y, como es de observarse, automáticamente se convierte en positivo el exponente, quedando de esta manera: $\left(\frac{x}{y}\right)^{-3}$=$(\frac{y}{x})^3$, es la aplicación de forma rápida la ley del exponente negativo.

Ejercicios. Aplicando la *Ley de potencias negativas*, deduzca las siguientes expresiones.

1. $(5^2)^{-2} =$
2. $(-4^{-2})^{-2} =$
3. $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1} =$
4. $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1} =$
5. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} =$
6. $(3 \times 8^0)^{-3} =$
7. $\left(\frac{7x^3}{3yz^4}\right)^{-2}$ =, donde y, z son diferentes de cero.
8. $\left(\frac{p^{-3}m^{-2}}{2^0 r^{-1}}\right)^2$ =, donde p, m, r son diferentes de cero.
9. $\frac{2^{-1}+3^{-1}}{2^{-1}} =$
10. $\frac{x^{-2}y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$ =, donde x, y son diferentes de cero.
11. $(x^2y^{-2})^{-1}$ =, donde y es diferente de cero.

12. $(ab^{-3})(a^{-1}b^{-1})^{-1} =$, donde a, b son diferentes de cero.

Sexta ley. Potencia con exponente fraccionario

Toda potencia con exponente fraccionario, también conocido como racional, equivale a un radical n-ésimo.

Esta ley se explica mejor con la idea del *exponente racional*, que implica resolver una ecuación del tipo $x^n = a$, de manera que $x = \sqrt[n]{a}$, que es: *la raíz n-ésima de* a, donde a es un número real. De aquí se deduce que *todo radical* equivale a un *exponente fraccionario.*

Ejemplos:

1. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

2. $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

3. $243^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{243} = 3$

4. $2^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{2^3} = 1.34590$

5. $a^{\frac{4}{9}} = \sqrt[9]{a^4}$

6. $\left(\frac{wx^5}{3yz}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{wx^5}{3yz}}$, donde y, z son diferentes de cero.

7. $\left(\frac{4w^{-3}x^5}{3y^{-2}z}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{4x^5y^2}{3w^3z}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{3w^3z}{4x^5y^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3w^3z}{4x^5y^2}\right)^2}$, donde w, y y z son diferentes de cero.

8. $\frac{w^{-\frac{2}{3}}}{z^{-\frac{1}{2}}} = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{w^{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt[3]{w^2}}$, donde w y z son diferentes de cero.

Hay que notar que el denominador del exponente fraccionario es el índice del radical (tamaño de la raíz), y el numerador, el exponente entero del radicando $\left(2^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{2^3}\right)$. Observe los siguientes ejemplos:

1. $10^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{10^2}$ 2. $8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}$ 3. $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$

4. $7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7}$ 5. $10^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{10}$ 6. $145^{\frac{25}{50}} = \sqrt[50]{145^{25}}$

Existe un caso especial: cuando la potencia fraccionaria está elevada a otra potencia del mismo tamaño que el denominador de la potencia fraccionaria.

$$\left(a^{\frac{l}{n}}\right)^n = a^{\frac{l}{n}(n)} = a^{\frac{n}{n}} = a^l = a$$

Con números reales nuestro ejemplo quedaría de la siguiente manera:

1. $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^5 = 3^{\frac{1}{5}(5)} = 3^{\frac{5}{5}} = 3^1 = 3$

2. $\left(8^{\frac{2}{15}}\right)^{15} = 8^{\frac{2}{15}(15)} = 8^{\frac{2\times\cancel{15}}{\cancel{15}}} = 8^2$

3. $\left(25^{\frac{5}{100}}\right)^{100} = 25^{\frac{5}{100}(100)} = 25^{\frac{5\times\cancel{100}}{\cancel{100}}} = 25^5$

Ejercicios. Aplicando la *Ley de exponente fraccionario o exponente racional*, deduzca las expresiones que se proporcionan a continuación:

1. $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 =$

2. $\left(\frac{9^{-\frac{1}{4}}}{8^{-\frac{1}{6}}}\right)^2 =$

3. $125^{\frac{1}{3}} =$

4. $w^{-\frac{3}{12}} =$, donde w es diferente de cero.

5. $\left(\frac{k^2m^5}{5km^2}\right)^{\frac{1}{3}} =$, donde k y m son diferentes de cero.

6. $\left(\frac{w^{-1}x^{-3}}{y^{-2}z^{-1}}\right)^{-\frac{3}{5}} =$, donde w, x, y y z son diferentes de cero.

7. $\frac{m^{-\frac{3}{4}}}{y^{-\frac{1}{3}}} =$, donde m y y son diferentes de cero.

8. $\left(8^{\frac{2}{12}}\right)^{11} =$

9. $\left(5^{\frac{1}{1000}}\right)^{100} =$

10. $\left(\frac{w^{-1}x^{-3}}{y^{-2}z^{-1}}\right)^{-\frac{2}{3}} =$, donde w, x, y y z son diferentes de cero.

11. $\left(9^{\frac{1}{24}}\right)^{12} =$

12. $\left(a^{\frac{3}{12}}\right)^{4} =$

2.4. Criterios de divisibilidad

(Aguilar et al., 2009; Alba, 2019a)

Divisibilidad entre 2
Todo número es divisible entre dos (2) si termina en cero o en número par (0, 2, 4, 6 y 8).

Ejemplos:

1. El número 200 es divisible entre 2, porque termina en 0
2. El número 1,758 es divisible entre 2, porque termina en 8
3. El número 1,056 es divisible entre 2, porque termina en 6
4. El número 111,112 es divisible entre 2, porque termina en 2
5. El número 209,634 es divisible entre 2, porque termina en 4

Divisibilidad entre 3
Todo número es divisible entre tres (3) si la suma de sus dígitos o cifras es divisible o múltiplo de 3.

Ejemplos:

1. El número 4 628 ¿es divisible entre 3?

Veamos: $4 + 6 + 2 + 8 = 20$; como 20 no es divisible entre 3, entonces el número 4 628 no es divisible entre 3.

$\frac{4628}{3} = 1542.667$ No es exactamente divisible entre 3.

2. El número 5 721 ¿es divisible entre 3?

Sometámoslo a prueba: $5 + 7 + 2 + 1 = 15$; como 15 es divisible entre 3, o múltiplo de 3, entonces el número 5 721 sí es divisible entre 3.

$\frac{5721}{3} = 1907$ Es una cantidad exacta

3. El número 10 038 ¿es divisible entre 3?

Observemos: $1 + 0 + 0 + 3 + 8 = 12$; como 12 es divisible entre 3, entonces el número 10 038 sí es divisible entre 3.

$\frac{10038}{3} = 3346$ Es una cantidad exacta

4. El número 100 000 ¿es divisible entre 3? No, por la suma de sus dígitos es 1; por lo tanto, el número 100 000 no es divisible entre 3.

> NOTA: si la primera suma de los dígitos resulta un número grande, se vuelve a sumar de manera sucesiva; el proceso de la suma de los dígitos debe repetirse hasta obtener un número pequeño o de un solo dígito; si éste resulta ser 3, 6 o 9, entonces aquel número sí es divisible entre 3. Por ejemplo:

5. El número 98 998 983 ¿es divisible entre 3? Si hacemos la suma de sus dígitos obtenemos: $9+8+9+9+8+9+8+3 = 63 = 6+3 = 9$; como 9 es múltiplo de 3, entonces el número 98 998 983 sí es divisible entre 3.

$$\frac{99998983}{3} = 329996633$$

Divisibilidad entre 4
Todo número es divisible entre 4 cuando los dos últimos dígitos sean múltiplos de 4 o doble cero.

Ejemplos:

1. 8, pues el 8 es múltiplo de 4

2. 132, el 32 es múltiplo de 4

3. 184, el 84 es múltiplo de 4

4. 500, termina en doble cero

5. 760, pues el 60 es múltiplo de 4

6. 20 000, termina en doble cero

7. 29 368, pues el 68 es múltiplo de 4

8. 10 000, termina en doble cero

Divisibilidad entre 5
Todo número es divisible entre cinco si termina en 0 o 5.

Ejemplos:

1. El número 10 000 es divisible entre 5, porque termina en 0.

2. El número 102975 es divisible entre 5, porque termina en 5.

$$\frac{102975}{5} = 20595 \text{ Es exacto}$$

3. El número 100 721 no es divisible entre 5, porque termina en 1.

$$\frac{100721}{5} = 20144.2 \text{ No es exacto}$$

4. El número 234 098 670 sí es divisible entre 5, porque termina en 0.

$$\frac{234098670}{5} = 46819734 \text{ Es exacto}$$

5. El número 100 000 005, sí es divisible entre 5, porque termina en 5.

$$\frac{100000005}{5} = 20000001 \text{ Es exacto}$$

Divisibilidad entre 6

Todo número es divisible entre 6 cuando al mismo tiempo es divisible entre 2 y 3; necesariamente se deben cumplir los dos criterios: ser divisibles entre 2 y 3.

Ejemplos:

1. El número 72 es divisible entre 6 porque termina en par y l suma de sus dígitos: $7 + 2 = 9$, es múltiplo de 3.

2. El número 3 234 es divisible entre 6 porque termina en par y la suma de sus dígitos: $3 + 2 + 3 + 4 = 12$, es múltiplo de 3.

3. El número 786 es divisible entre 6 porque termina en par y la suma de sus dígitos: $7 + 8 + 6 = 21 = 2 + 1 = 3$, es múltiplo de 3. Esto pudo notarse desde el 21.

Divisibilidad entre 7

Todo número es divisible entre 7 cuando al restar el último dígito multiplicado por 2 a la cantidad formada por los números que quedan resulta cero (0) o un múltiplo de 7.

Si del primer proceso resulta un número grande, se repite dicho proceso hasta hallar un número más pequeño.

Ejemplos:

1. El número 2 706 ¿es divisible entre 7?

Realizando el proceso: $270 - 6(2) = 270 - 12 = 258$. Como el 258 es un número grande, se repite el proceso:

$25 - 8(2) = 25–16 = 9$. Como 9 no es múltiplo de 7 entonces el número 2 706 no es divisible entre 7.

$\frac{2706}{7} = 386.571$. Demostrado

2. El número 343 ¿es divisible entre 7?

Veamos: $34 - 3(2) = 34 - 6 = 28$. Como 28 es múltiplo de 7 entonces el número 343 es divisible entre 7.

$\frac{343}{7} = 49$. Demostrado

3. El número 105 ¿es divisible entre 7?

$10 - 5(2) = 10 - 10 = 0$. Como la resta dio como resultado 0, el número 105 sí es divisible entre 7.

$\frac{105}{7} = 15$.

Divisibilidad entre 10

Todo número es divisible entre 10 si termina en 0.

Ejemplos:

1. 10
2. 1200
3. 1003040
4. 10010
5. 14890
6. 7120
7. 100
8. 10020

Aunque es un criterio elemental, es necesario considerarlo por la similitud que tiene con los criterios de divisibilidad entre 2 y 5.

La importancia de tener presente los *criterios de divisibilidad* radica en que hay similitud o concordancia entre algunos de ellos y son útiles cuando se presentan casos en los que hay que aplicar varios criterios al mismo tiempo.

Por ejemplo:

1. **La señora Mercedes cuenta con $370 y desea saber que si los reparte entre dos de sus hijos, o entre todos sus hijos que son cinco, o, si se diera el caso, entre sus 10 nietos, ¿les tocarían cantidades enteras exactas?**

La respuesta es *sí, ya que toda cantidad o número que termine en 0 es divisible entre 2, 5 y 10:*

$\frac{\$370}{2}$ =$185 *a cada uno de los dos hijos*

$\frac{\$370}{5}$ =$74 *a cada uno de los cinco hijos*

$\frac{\$370}{10}$ =$37 *a cada uno de los 10 nietos*

2. El señor Hernández tiene un terreno cuya superficie es de 8 300 m2 y desea saber si puede dividirlo, ya sea en dos o en cuatro partes que tengan metros cuadrados exactos.

La respuesta es *sí, ya que todo número que termina en doble cero (00) o es múltiplo de 4 es divisible entre 4 y también entre 2*; sin embargo, es necesario aclarar que *no todo número divisible entre 2 también es divisible entre 4*; pero de forma inversa sí: *todo número divisible entre 4 también es divisible entre 2* (Aguilar et al., 2009) (véase la tabla 1).

Tabla 1. *Ejemplos de divisibilidad*

Número	*Divisibles entre 2*	*Divisible entre 4*
22	Sí	No
106	Sí	No
90	Sí	No
1278	Sí	No
Número	*Divisibles entre 4*	*Divisible entre 2*
$1\underline{00}$	Sí	Sí
$102\underline{64}$	Sí	Sí
$2365\underline{88}$	Sí	Sí
$129\underline{68}$	Sí	Sí
$75\underline{08}$	Sí	Sí
$100\underline{00}$	Sí	Sí

Los últimos dos dígitos de las cantidades subrayadas cumplen con el criterio de divisibilidad entre 4. También cumplen con el criterio de divisibilidad entre 2 (que terminen en 0 o en par).

3. ¿Qué similitud tienen los criterios de divisibilidad entre 2, 3 y 6?
Toda cantidad o número divisible entre 6 también lo es entre 2 y 3. Dicho de otra manera, *el número que es divisible entre 6 lo es porque cumple con el criterio de divisibilidad entre 2 y 3* (Baldor, 2019).

Por ejemplo, el número 324 es divisible entre 6 porque termina en par y porque al sumar sus dígitos se obtiene: $3 + 2 + 4 = 9$, y 9 es múltiplo de 3.

Ejercicios:

1. Aplicando los criterios de divisibilidad y sus similitudes entre 2, 5 y 10, y sin hacer operaciones, complete la tabla 2,

escribiendo en la segunda columna los números 2, 5 o 10, o dos de ellos, o ninguno.

TABLA 2. *Observe los ejemplos*

Número	*Divisible entre*
1000	
825	
802	
10237	
390	2, 5 y 10
608	
222	
3005	
1200968	
686861	Ninguno

2. Amir trabaja en un expendio de café tipo gourmet y va a surtir un pedido empacando 15 bolsas que contengan 5 kg cada una. Su jefe le indicó que apartara 5 kg para el consumo de la oficina. ¿De cuántas bolsas consistirá el pedido?

3. Andrea corre todas las mañanas durante dos horas y cada 10 minutos hace pausas para checar sus signos vitales. En dos días, ¿cuántas veces checó sus signos?

4. De los números: 852 258, 825, 582 y 528, ¿cuál es la razón de que todos sean divisibles entre 3?, ¿qué característica tienen entre sí?

5. Aplicando los criterios de divisibilidad y sus similitudes entre 2 y 4, y sin hacer operaciones, complete la tabla 3 escribiendo en la segunda y tercera columnas las palabras *Sí* o *No*, si los números son divisibles entre 2 o 4.

Tabla 3. *Números divisibles entre 2 o 4*

Números	*Divisible entre 2*	*Divisible entre 4*
1000		
10264		
802		
10238		
390		
608		
222		
7504		
10968		
686866		

Con base en los resultados de este ejercicio conteste lo siguiente:

a) Todos los números que son divisibles entre 2, ¿lo son también entre 4?
b) Todos los números que son divisibles entre 4, ¿lo son también entre 2?

6. Aplicando los criterios de divisibilidad y sus similitudes entre 2, 3 y 6, y sin hacer operaciones, complete la tabla 4 escribiendo en la segunda, tercera y cuarta columnas las palabras *Sí* o *No*, si los números divisibles entre 2, 3 o 6.

Tabla 4. *Números divisibles entre 2, 3 y 6*

Números	*Divisible entre 2*	*Divisible entre 3*	*Divisible entre 6*
300			
10671			
804			
10238			
790			
608			
22221			
7504			
10968			
66666			

Con base en los resultados de este ejercicio conteste lo siguiente:

a) Todos los números que son divisibles entre 2 y 3, ¿lo son también entre 6?
b) Los números que sólo son divisibles entre 3, ¿lo son también entre 6?
c) Los números que son divisibles entre 2, pero no entre 3, ¿lo son también entre 6?

7. Aplicando el criterio de la divisibilidad entre 4, escriba en la segunda columna de la tabla siguiente *Sí* o *No,* si los números son divisibles o no entre 4.

Tabla 5. *Números divisibles entre 4*

Número	*Divisible entre 4*
23 484	
87 202	
452 056	
30 000	
901 006	
29 368	
748 614	
700	
82 348	
1 000	

8. Aplicando el criterio de la divisibilidad entre 7, escriba en la segunda columna del siguiente cuadro *Sí* o *No*, si los números son divisibles o no entre 7.

Tabla 6. *Números divisibles entre 7*

Número	*Divisible entre 7*
23 484	
8 720	
2 058	
3 000	
1 009	
868	
78 615	
700	
82 349	
10 297	

2.5. Operaciones con fracciones

2.5.1. Suma y resta de fracciones

***a)* Cuando los denominadores son iguales,** el denominador se recorre y los numeradores se suman o se restan, según indique la operación.

Ejemplos:

1. $\frac{a}{b} + \frac{z}{b} = \frac{a+z}{b}$, donde b es diferente de cero.
2. $\frac{d}{a} - \frac{t}{a} = \frac{d-t}{a}$, donde a es diferente de cero.
3. $\frac{2}{x} + \frac{c}{x} = \frac{2+c}{x}$, donde x es diferente de cero.
4. $\frac{5}{2} - \frac{7}{2} = \frac{5-7}{2} = \frac{-2}{2} = -1$
5. $\frac{1}{7} - \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{1-2+3}{7} = \frac{2}{7}$
6. $\frac{3}{10} - 1\frac{7}{10} + 4\frac{2}{10} - 2\frac{5}{10} = \frac{3}{10} - \frac{17}{10} + \frac{42}{10}$
   $-\frac{25}{10} = \frac{3-17+42-25}{10} = \frac{3}{10}$
7. $3\frac{5}{3} + \frac{1}{3} - 2\frac{1}{3} + 5\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{20}{3} + \frac{1}{3} - \frac{7}{3} + \frac{19}{3} - \frac{2}{3}$
   $= \frac{20+1-7+19-2}{3} = \frac{31}{3} = 10\frac{1}{3}$

***b)* Cuando los denominadores son diferentes.** Si el planteamiento es una suma o una resta de **dos fracciones** se realiza de manera cruzada, multiplicando numerador por denominador y denominador por numerador. El denominador común de la operación será el producto de los dos denominadores parciales (Baldor, 2007).

Ejemplos:

1. $\frac{x}{a}+\frac{b}{a^2}=\frac{a^2x+ab}{a^3}=\frac{ax+b}{a^2}$, donde a es diferente de cero.

2. $\frac{a}{x^3}-\frac{c}{x}=\frac{ax-cx^3}{x^4}=\frac{a-cx^2}{x^3}$, donde x es diferente de cero.

3. $\frac{2}{3}+\frac{1}{9}=\frac{18+3}{27}=\frac{21}{27}=\frac{7}{9}$

4. $\frac{7}{4}-\frac{2}{3}=\frac{21-8}{12}=\frac{13}{12}$

5. $\frac{4}{3}+\frac{5}{2}=\frac{8+15}{6}=\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$

***c)* Cuando los denominadores son diferentes y se suman o se restan más de dos fracciones** se puede proceder de dos maneras:

c1) En forma desarrollada. Se busca un denominador común de toda la operación, y se divide entre el denominador parcial de cada fracción y se multiplica por su numerador; este proceso se repite para cada fracción que tenga el planteamiento hasta terminar con la última fracción (Aguilar et al., 2009)

Ejemplos:

1. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{e}{f}=\frac{\frac{bdf}{b}\times a+\frac{bdf}{d}\times c-\frac{bdf}{f}\times e}{bdf}=\frac{adf+cbf-ebd}{bdf}$, donde b,d y f son diferentes de cero.

2. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{12}=\frac{\frac{96}{2}\times 1+\frac{96}{4}\times 3-\frac{96}{12}\times 5}{96}=\frac{48+72-40}{96}=\frac{80}{96}=\frac{5}{6}$

3. $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{4}{7}=\frac{\frac{168}{4}\times 3-\frac{168}{2}\times 1+\frac{168}{3}\times 2+\frac{168}{7}\times 4}{168}=\frac{126-84+112+96}{168}=$

$\frac{250}{168}=\frac{125}{84}$

4. $2\frac{1^3}{4}+3\frac{1}{3}-5\frac{2^2}{3}=\frac{9}{4}+\frac{10}{3}-\frac{19}{3}=\frac{\frac{36}{4}\times 9+\frac{36}{3}\times 10-\frac{36}{3}\times 19}{36}=$

$$\frac{81+120-228}{36} = \frac{-27}{36} = \frac{-9}{12} = \frac{-3}{4}$$

c2) Repitiendo procesos. De manera sucesiva se repiten los procesos de las operaciones. Primero se realiza la operación con las dos primeras fracciones; el resultado de esa operación se multiplica con la tercera fracción, y así sucesivamente hasta terminar con la última.

Como se trata de fracciones con denominadores diferentes se aplica el **método cruzado**.

Ejemplos:

1. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{12}$ $=$ Se suman las dos primeras fracciones y al resultado se le resta la última fracción para arribar al resultado final.

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{4+6}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{4} - \frac{5}{12} = \frac{60-20}{48} = \frac{40}{48} = \frac{5}{6}$$

2. $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}$ $=$ Primero se restan las dos primeras fracciones y luego se suman las dos siguientes. O, simplemente, se restan las dos primeras y se suma la tercera con la cuarta. Finalmente, se suman los dos resultados para obtener el resultado final.

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{6-4}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Resta de las dos primeras fracciones.

$\frac{2}{3} + \frac{4}{7} = \frac{14+12}{21} = \frac{26}{21}$. Suma de la tercera y cuarta fracciones.

A continuación, se procede a sumar los dos resultados anteriores para obtener el resultado final:

$\frac{1}{4} + \frac{26}{21} = \frac{21+104}{84} = \frac{125}{84}$

Este procedimiento sólo se utiliza en los casos en que no se recuerde bien el **método desarrollado**. No obstante, lo recomendable es usar este método desarrollado para realizar las operaciones en un solo proceso (en un solo tanto).

a) Cuando los ***denominadores*** son ***iguales.***
b) Cuando los ***denominadores*** son ***múltiplos*** entre sí.
c) Cuando los ***denominadores*** son ***diferentes.***

En resumen, se recomienda prestar atención a dos de esos detalles:

a) ***Denominadores iguales.***
b) ***Denominadores diferentes.***
(Ya que si son *múltiplos*, lógicamente son *diferentes*).

Ejercicios. Aplicando las *técnicas de resolución* de *sumas* y *restas de fracciones* con *denominadores iguales* y *diferentes*, resuelva los siguientes ejercicios:

1. $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{1}{5} + \frac{7}{5} =$
2. $3\frac{2^2}{4} + 3\frac{1}{4} + \frac{2^2}{4} =$
3. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{9} =$
4. $\frac{b}{x^5} - \frac{m}{x^2} =$, donde x es diferente de cero.
5. $\frac{2}{4} - \frac{1}{3} + \frac{4}{15} =$
6. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} =$
7. $\frac{1}{w} + \frac{3}{m} =$, donde w y m son diferentes de cero.
8. $\frac{2}{w} + \frac{3}{m} =$, donde m, w son diferentes de cero.
9. $\frac{5}{y} - \frac{3}{y} + \frac{2x}{y} =$, donde y es diferente de cero.

10. $2\frac{2}{7} + 1\frac{3}{7} - 3\frac{1}{7} + \frac{7}{7} =$

11. $\frac{1}{b^2} - \frac{3}{b^2} + \frac{5}{b^2} =$, donde b es diferente de cero.

12. $\frac{a}{b} + \frac{1}{z} =$, donde b y z son diferentes de cero.

13. $\sqrt{64}\frac{1}{2} + \sqrt[3]{27}\frac{7}{4} =$

2.5.2. Multiplicación de fracciones

Todas las operaciones de *multiplicación* (producto) *de fracciones* se realizan de forma *horizontal*, es decir, *numerador* con *numerador* y *denominador* con *denominador*. A esta forma de operar las fracciones en la multiplicación se le conoce como *algoritmo de la multiplicación de fracciones* (Martínez et al., 2013).

Ejemplos:

1. $\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$
2. $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{50} = \frac{3}{25}$
3. $\frac{4}{7} \times \frac{-2}{7} \times \frac{3}{-7} = \frac{-24}{-343} = \frac{24}{343}$
4. $\left(\frac{5}{2} \times \frac{4}{7}\right)\left(\frac{6}{5} + \frac{1}{5}\right) = \frac{20}{14} \times \frac{7}{5} = \frac{140}{70} = 2$
5. $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
6. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{2}{5}} = \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4\sqrt[3]{5}}$ que es igual a:
   $\frac{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{4 \cdot 5^{\frac{1}{3}}}$

Ejercicios. Aplicando la técnica de la *multiplicación de fracciones*, resuelva los siguientes planteamientos:

1. $\frac{3}{-5} \times \frac{-2}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{1}{7} =$

2. $\left(\frac{-3}{4} \times \frac{2}{6}\right) \frac{3}{-2} =$

3. $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{36}{4}} =$

4. $-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{21}{3}} =$

5. $\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{8}\right)\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6}\right) =$

6. $\frac{3}{-5} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{2} =$

7. $\frac{2}{\sqrt[3]{8}} \times \frac{\sqrt{8}}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{1}{\sqrt{7}} =$

8. $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(2\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) =$

9. $3\frac{\sqrt{81}}{3} \cdot \frac{1}{9} =$

10. $\frac{\sqrt{23}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} =$

11. $3\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \times 2\frac{6}{5} \times 8\frac{1}{7} =$

12. $\sqrt{\frac{21}{3}} \cdot (\sqrt{\sqrt{3}})^2 =$

2.5.3. División de fracciones

Todas las operaciones de *división de números fraccionarios* resulta ser un *producto cruzado*. En este tipo de operaciones, la regla que hay que seguir es la siguiente:

$$\begin{gathered} Numerador \times denominador = Numerador \\ Denominador \times numerador = Denominador \end{gathered}$$

Lo anterior se podría resumir mediante la técnica de *productos cruzados* y *cruzados*, es decir, cruzar el producto de *numerador* $\times$ *denominador* y cruzar el *resultado*; asimismo, cruzar el producto de *denominador* $\times$ *numerador* y cruzar el resultado.

Ejemplos:

$$1.\ \frac{3}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$$

en la que se cumple la regla del *cruzado* y *cruzado*.

$$2.\ \frac{1}{2} \div \frac{\sqrt{x}}{y} = \frac{y}{2\sqrt{x}}$$

donde x y y son diferentes de cero.

$$3.\ \frac{3}{4} \div \frac{x}{2} \div \frac{y}{x^2} = \frac{6x^2}{4xy} = \frac{3x}{2y}$$

donde x y y son diferentes de cero.

$$4.\ \frac{7}{-3} \div \frac{-2}{3} \div \frac{1}{2} \div \frac{-4}{5} = \frac{210}{-24} = \frac{105}{-12} = -\frac{35}{4}$$

$$5.\ \frac{x}{y} \div \frac{2}{5} \div \frac{1}{4} \div \frac{\sqrt{x}}{y} \div \frac{y}{2} = \frac{40xy}{2y^2\sqrt{x}} = 20\frac{\sqrt{x}}{y}$$

donde x y y son diferentes de cero.

En los planteamientos en que se tienen tres fracciones o más, a partir de la segunda fracción se aplica la **inversa** y la división se resuelve aplicando el *algoritmo de la multiplicación*, es decir, los productos horizontales.

La técnica de la inversa se muestra a continuación al resolver algunos de los problemas anteriores:

1'. Se planteó la división de $\frac{3}{2} \div \frac{4}{3}$ cuyo resultado fue $\frac{9}{8}$. Ahora se resuelve aplicando el *algoritmo de la multiplicación* (colocando la inversa de $\frac{4}{3}$):

$\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$ El resultado es el mismo.

3'. Se planteó la división de $\frac{3}{4} \div \frac{x}{2} \div \frac{y}{x^2}$ cuyo resultado fue $\frac{3x}{2y}$, donde x y y son diferentes de cero. Ahora se resuelve con el *algoritmo de la multiplicación*, aplicando el *inverso* de la *segunda* y la *tercera* fracción.

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{x} \div \frac{x^2}{y} = \frac{6x^2}{4xy} = \frac{3x}{2y}$$

Se obtiene el mismo resultado.

4'. El ejercicio 4 se resuelve de la misma manera, aplicando el inverso en las fracciones segunda, tercera y cuarta.

$$\frac{7}{-3} \div \frac{3}{-2} \div \frac{2}{1} \div \frac{5}{-4} = \frac{210}{-24} = \frac{70}{-8} = -\frac{35}{4}$$

Ejercicios. Aplicando la técnica de la *división de fracciones*, o el *algoritmo de multiplicación*, resuelva los siguientes planteamientos:

1. $\frac{x}{y} \div \frac{1}{2} \div \frac{2}{3} \div \frac{m}{w} =$, donde w y y son diferentes de cero.
2. $\frac{7y}{-3} \div \frac{2x}{3y} \div \frac{k}{2x} \div \frac{5y}{5x} =$, donde x y y son diferentes de cero.
3. $\frac{7}{-3} \div 3\frac{-2}{5} =$
4. $\frac{5}{2\sqrt{9}} \div \frac{2^3}{4} \div \frac{1}{2^3} =$
5. $\frac{(25)^{\frac{1}{2}}}{5} \div \frac{\frac{1}{3}}{4} =$
6. $\frac{x}{y} \div \frac{2}{3} \div \frac{m^3}{w} =$, donde w es diferente de cero.
7. $\frac{x}{y} \div \frac{1}{2}$, donde y es diferente de cero.
8. $\frac{x^2}{y} \div \frac{1}{4\sqrt[5]{32}} \div \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{8}} =$, donde y es diferente de cero.

9. $\frac{-2}{3} \div \frac{m}{w^3} =$, donde w es diferente de cero.

10. $\frac{1}{2\sqrt{144}} \div \frac{24m}{w} =$, , donde w es diferente de cero.

2.6. Sucesiones numéricas

Una sucesión numérica es una secuencia o conjunto ordenado de elementos, ya sean números, letras o figuras, normalmente geométricas, o, incluso, una combinación de éstas (Alba, 2019b).

En las sucesiones se tiende a identificar el *elemento sucesor* o el *elemento antecesor*. Al estudiar las sucesiones se busca la *sucesión* o la *regla* que las establecen, la cual inicia con el *patrón de la sucesión numérica* que permite saber si ésta si va creciendo o decreciendo, es decir, si crece hacia los números positivos o hacia los números negativos.

Un ejemplo general es el siguiente: 3, 6, 18, 72, 360, 2160… n-ésimo elemento de la sucesión. Se trata de encontrar la regla que explica ese orden de la sucesión.

En este ejemplo, la sucesión tiene un crecimiento exponencial al que rige una regla o ley que tiene una ponderación en cada salto o en cada patrón:

$$3, \quad 6, \quad 18, \quad 72, \quad 360, \quad 2160, \ldots$$
$$\times 2 \quad \times 3 \quad \times 4 \quad \times 5 \quad \times 6$$

En las **sucesiones geométricas** la ley o regla de formación se obtiene mediante la multiplicación o la división de dos cantidades, si es de superficie, y de tres, si es volumen; es decir *sucesiones numéricas aritméticas* y *sucesiones geométricas* (Alba, 2019b; Baldor, 2019).

A continuación se muestran algunos sencillos ejemplos de sucesiones:

1. ¿Cuál es el número al que le corresponde la posición 20 de la sucesión de los números pares positivos: 2, 4, 6, 8, 10, 12...? Solución:

$$2, \xrightarrow[+2]{} 4, \xrightarrow[+2]{} 6, \xrightarrow[+2]{} 8, \xrightarrow[+2]{} 10, \xrightarrow[+2]{} 12...$$

Se puede observar que el salto va de 2 en 2; se inicia con el 2 y la sucesión crece hacia los números positivos. Por lo tanto la regla se deduce y se reduce a $2n$. Así, la posición 20 será: $2(20) = 40$.

2. ¿Cuál es el número que le corresponde la posición 55 de la sucesión de los números impares positivos 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13...? Solución:

$$1, \xrightarrow[+2]{} 3, \xrightarrow[+2]{} 5, \xrightarrow[+2]{} 7, \xrightarrow[+2]{} 9, \xrightarrow[+2]{} 11, \xrightarrow[+2]{} 13...$$

El salto en la sucesión va de 2 en 2; sin embargo, estos números tienen que ser impares, por lo que la regla se deduce a $2n-1$ para que siempre resulten números impares, ya que el $2n$ siempre generará un número par, pero restándole 1 dará como resultado un número impar. Así, la posición 55 le corresponde al número: $2(55) - 1 = 109$

3. ¿Cuál es el número al que le corresponde el lugar 200 dentro de los cuadrados perfectos 1, 4, 9, 16, 25, 36...? Solución:

Esta sucesión presenta números consecutivos: *1, 2, 3, 4, 5… elevados al cuadrado.* Así, la regla queda como: n^2. *En consecuencia,* la posición 200 le corresponde a $(200)^2 = 40000$

4. Dada la sucesión 2, 5, 10, ____, 26, 37, ____, 65…, calcule los datos faltantes.

Solución:

Aquí podremos observar que en cada número de la sucesión hay un número cuadrado perfecto consecutivo, que inicia con el 1 y se le suma 1. Véase la siguiente tabla para visualizar mejor los resultados.

TABLA 7. *Regla de la sucesión*

Posición	1	2	3	4	5	6	...	n
Regla	1^2+1	2^2+1	3^2+1	4^2+1	5^2+1	6^2+1	...	n^2+1
Número	2	5	10	17	26	37	...	

Por lo tanto, la regla general de esta sucesión, es $n^2 + 1$.
La posición del primer espacio es 4. Así, $(4)^2 + 1 = 17$
La posición del segundo espacio es 7. Así, $(7)^2 + 1 = 50$

5. Dada la sucesión: 2, 5, 8, 11, 14, 17… analiza y responde las siguientes preguntas:

¿Es creciente o decreciente? **Creciente**, pues la serie numérica crece hacia la derecha del 0 en la recta numérica. Dicho de otra forma, crece hacia los positivos.

¿Cuál es el tamaño del salto o patrón de la sucesión? **3,** pues los números van creciendo de 3 en 3.

Regla de la sucesión: $3n - 1$. El -1 porque si a la primera posición (2) se le resta 3 resulta -1.

6. Dada la regla general: $4n - 2$, estimar:

a) Tamaño del salto o patrón de la sucesión: 4.
b) Creciente o decreciente: creciente, por el $+4$.
c) Sucesión: 2, 6, 10, 14, 18...

7. Dada la regla: $-6n + 1$, responde:

a) Tamaño del salto: 6.
b) Creciente o decreciente: decreciente, por el -6.
c) Sucesión: $-5, -11, -17, -23, -29, -35$...

Hay que considerar que existen sucesiones **crecientes** y sucesiones **decrecientes** (elementos sucesores y elementos antecesores). Crecientes, cuando la sucesión avanza hacia los números positivos (hacia la derecha del 0 en la recta numérica), y decreciente cuando avanza hacia los números negativos (hacia la izquierda del 0 en la recta numérica).

Ejemplos. Aplicados a situaciones reales en los que se observa el efecto *creciente* y *decreciente* de las sucesiones.

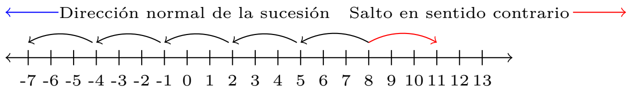
8. La temperatura en la sierra de Chihuahua al inicio del invierno comienza a descender semanalmente, en promedio 3° C, de manera que a la novena semana ha alcanzado su mínimo descenso. Se contabiliza a partir de que el termómetro registra 8° C. ¿A cuánto habrá descendido la temperatura en la novena semana?

Solución:

Con el apoyo de la siguiente recta numérica (figura 7) daremos respuesta a este problema.

El descenso de la temperatura se considera a partir de los 8° C. Por lo tanto, la sucesión es la siguiente: $8, 5, 2, -1, -4$...

Figura 7. *Esquema de una sucesión numérica*



Semanalmente hay un salto de la temperatura de 3° C. Si de la primera posición (8) se suman 3 o se aplica un salto en sentido contrario de la sucesión, se llega a 11 de ambas formas. Así, la *regla* queda como $-3n+11$; $-3n$ porque el tamaño del salto o patrón de la sucesión es 3, negativo, porque se traslada hacia la izquierda del 0 (decreciente y, por lo tanto, temperatura descendiente) y +11 porque de la primera posición de la sucesión se suma el tamaño o patrón de la sucesión, que da 11.

Por lo tanto, a la novena semana la temperatura en la sierra de Chihuahua habrá descendido $-3(9)+11=-16°C$.

9. El día de la inauguración de un centro comercial asistieron 1 500 personas; el segundo día, 1 850; el tercer día, 2 200; el cuarto día, 2 550, y así sucesivamente. ¿Cuántas personas visitaron el centro comercial el sexto día?

Solución:

Cuando nos proporcionan una serie de números como los de este planteamiento, para saber si se trata de una serie numérica lo primero que hay que hacer es observar si existe hay una regularidad entre cada número.

Una vez que se ha identificado que hay una sucesión, la solución la proporciona la elaboración de una regla, del siguiente modo:

$$1500, \quad 1850, \quad 2200, \quad 2550...$$
$$+350 \qquad +350 \qquad +350$$

Este conjunto de números presenta una sucesión, ya que entre uno y otro hay un orden, conocido también como *patrón de sucesión* o *salto*; en este caso, 350.

Para elaborar la regla se procede de la siguiente manera:

350 Un salto al lado contrario

1150, 1500, 1850, 2200, 2550...

+350 +350 +350

Dirección normal de la sucesión

De la primera posición (1 500) se da un salto en sentido contrario de la sucesión, o bien se resta el valor del patrón (350), lo que resulta 1 150 en ambos casos. Así, la regla queda: $350n + 1150$, pues 350 es el orden o el tamaño del salto, n representa la posición *n-ésima* que se desea conocer, y el valor 1150, lo que resulta de extraer una vez el tamaño del patrón o el valor de la posición al realizar un salto en sentido contrario.

A partir de esta regla ($350n + 1150$) se puede calcular el valor de cualquier *n-ésima* posición que se desee.

De esta forma damos solución a la pregunta: ¿cuántas personas visitaron el centro comercial el sexto día?

El sexto día visitaron el centro comercial: $350(6) + 1150 = 3250$ *personas.*

10. Cuenta una anécdota que un maestro de aritmética, queriendo mantener entretenido a su grupo, propuso el problema de sumar los números del 1 al 100 y advirtió que quien no terminara de hacerlo tendría un castigo. Pero Johann Carl Friedrich Gauss, a sus nueve años, con su habilidad matemática, halló la respuesta en corto tiempo. En lugar de sumar

de uno en uno, tomó los números por pares, desde los extremos: el primero con el último, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo y así sucesivamente... ($100+1 = 99+2 = 98+3 = \ldots = 51+50 = 101$), Así encontró lo equivalente a multiplicar 101×50, ya que le salieron 50 pares sumandos. De esta forma, el pequeño Gauss había descubierto la fórmula de la suma de la *sucesión aritmética de números consecutivos*, conocida en el mundo de la aritmética como *suma de Gauss* (véase https://francis.naukas.com/2010/04/15/iii-carnaval-de-matematicas.la-anecdota-de-gauss-el-niño-prodigio-su-profe sor-y-la-suma-del-1-al-100/. https://matemathweb.com /razonamiento-matematico/sucesionesnumericas).

Con base en la información de esta anécdota, encuentre la suma de Gauss.

Solución:

En toda sucesión de números consecutivos se sigue la regla práctica de sumar los números en parejas: los extremos, hasta llegar al centro del conjunto de números. ¿Cómo surge el 101? De sumar $n + 1$. Y si se multiplica por el n-ésimo número se obtiene el doble de la serie de números; como este número se duplica, ahora hay que dividirlo entre dos.

De esta forma, la suma de Gauss, que al mismo tiempo es la regla de la sucesión, queda como: $\frac{n(n+1)}{2}$. Con esta fórmula se puede obtener la suma de cualquier serie numérica de n-ésimos números consecutivos.

Prueba:

La suma del 1 al 100: 5 050

Suma del 1 al 100: $\frac{100(100+1)}{2} = 5050$

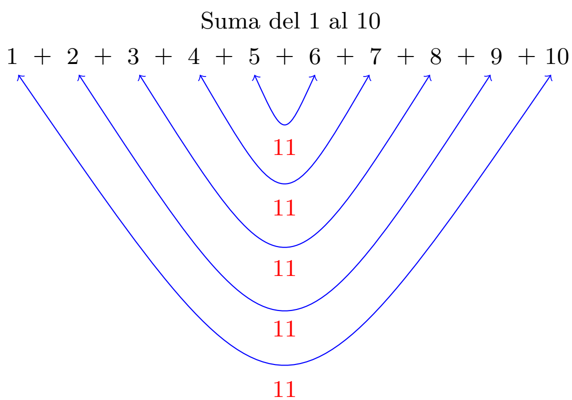
Suma del 1 al 10: $\frac{10(10+1)}{2} = 55$

Suma del 1 al 45: $\frac{45(45+1)}{2} = 1035$

Suma del 1 al 9: $\frac{9(9+1)}{2} = 45$

Si existe alguna duda sobre los pares o las parejas de números que se forman en la suma, a continuación se proporciona una descripción gráfica (figura 8):

FIGURA 8. *Descripción gráfica de la suma de Gauss*



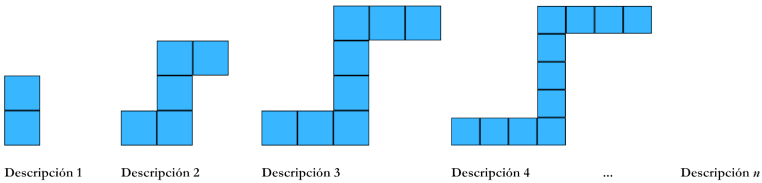
FUENTE: Elaboración propia.

Como podemos darnos cuenta, se forman cinco parejas de números cuya suma es 11 y si realizamos esta multiplicación: 11 x 5 = 55, obtendremos el resultado; sin embargo, si en vez de multiplicar por 5 lo hacemos por $n = 10$, que es el tamaño de la serie numérica, entonces el número se duplica, por lo que hay que dividirlo entre 2. De este modo la regla de esta sucesión queda como: $\frac{n(n+1)}{2}$.

Así, el niño Gauss terminó el ejercicio primero que todos sus compañeros y entregó a su maestro el resultado: 5 050. A éste le llevó mucho tiempo entender lo que su alumno había hecho, pero no pudo refutarlo porque, en todo caso, tenía que demostrarlo (véase https://bit.ly/4ji56UV).

11. En la pared de una plaza hay una serie de descripciones como las que se muestran en la Figura 9. Considerando que las descripciones siguieran creciendo con el mismo patrón, se podría hablar de una n-ésima descripción. Con base en la información, complete la Tabla 8 que aparece abajo.

FIGURA 9. *Descripciones geométricas*



FUENTE: Elaboración propia.

TABLA 8. *Número de cuadros en la sucesión*

Número de figura	1	2	3	4	5	10	...	n	2510
Número de cuadros							...		

Solución:

En las figuras se observa que el crecimiento va de 3 en 3 (patrón de la sucesión) hacia los positivos (hacia la derecha del 0), por lo que podemos deducir que la regla de la sucesión inicia con $3n$; luego, si a la primera posición (1), que tiene 2 cuadros, se le resta 3 (el tamaño del patrón), resulta -1. Después de este breve análisis, ya se puede completar la tabla.

Número de figura	1	2	3	4	5	10	...	n	2510
Número de cuadros	2	5	8	11	14	29	...	$3n-1$	7 259

Aplicando la regla general de la sucesión: $3n - 1$. Así se encuentra el valor de 7529 : 3(2510)–1 = 7529.

Ejercicios. Aplique la técnica de las sucesiones numéricas y geométricas para resolver los planteamientos que se proporcionan a continuación:

1. Dada la sucesión: 2, 8, 14, 20, 26... responda las preguntas:
   - ¿Es creciente o decreciente?
   - ¿Cuál es el tamaño del salto o patrón de la sucesión?
   - Regla de la sucesión:

2. Dada la sucesión: 12, 9, 6, 3, 0, -3... responda las preguntas:
   - ¿Es creciente o decreciente?
   - ¿Cuál es el tamaño del salto o patrón de la sucesión?
   - Regla de la sucesión:

3. Dadas las reglas:

   a) $-10n + 4$, defina:
   - Tamaño del salto:
   - Creciente o decreciente:

- La sucesión:

b) $10n + 4$, defina:

- Tamaño del salto:
- Creciente o decreciente:
- La sucesión:

c) $3n - 2$, defina:

- Tamaño del salto:
- Creciente o decreciente:
- La sucesión:

d) -2n, defina:

- Tamaño del salto:
- Creciente o decreciente:
- La sucesión:

e) $11n$–8, defina:

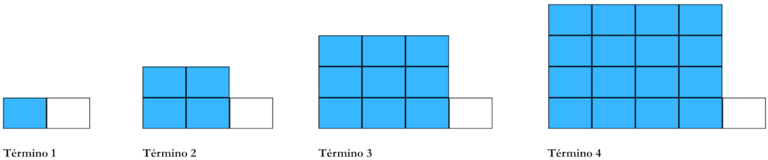
- Tamaño del salto:
- Creciente o decreciente:
- La sucesión:

f) $-7n + 2$, defina:

- Tamaño del salto:
- Creciente o decreciente:
- La sucesión:

4. Observa la sucesión de términos en la Figura 10 y contesta las preguntas.

FIGURA 10. *Sucesión geométrica*



FUENTE: Elaboración propia.

a) ¿Cuál es la regla de la sucesión?
b) ¿Cuántos cuadrados tendrá el término 6?
c) ¿Cuántos cuadrados tendrá el término 9?

2.7. Potencias de base 10 (notación científica)

Para las potencias de base 10 y exponente entero, la forma de operarlas consiste en desplazar el punto decimal tantas posiciones como indique el exponente, hacia la derecha si el exponente es positivo y hacia la izquierda si el exponente es negativo.

Trabajar este tipo de potencias equivale a estudiar la *notación científica,* también conocida como *notación índice estándar*, una manera rápida de representar un número utilizando potencias de base 10 (Aguilar et al., 2009). Esta notación se utiliza para expresar, de manera fácil, números muy grandes o muy pequeños. De esta forma, los números se escriben como un producto:

$$a \times 10^n$$

Donde:

a es un número real mayor o igual que 1 y menor que 10 (recibe el nombre de coeficiente).

n es un número entero llamado exponente (u orden de magnitud).

La notación científica utiliza un sistema llamado "coma flotante", o "punto flotante" en los países de habla inglesa y en algunos hispanohablantes. Por ejemplo: $3,2345 \times 10^5$ o 3.2345×10^5.

El primero en intentar la representación de números muy grandes fue el matemático y filósofo griego Arquímedes (considerado el padre de la notación científica), en su obra *El contador de Arena,* en el siglo III a. C. Arquímedes ideó un sistema de representación numérica para estimar cuántos granos de arena existían en el universo. El número estimado por él era de 10^{63} granos (véase https://shre.ink/MqcS). Nótese que existe coincidencia de ese exponente con el número de casilleros del ajedrez, pues para valores positivos el exponente es $n-1$, donde n es el número de dígitos, siendo la última casilla la número 64 y el Varangul". Cuando el rey recibió el obsequio y adquirió el dominio del juego gracias a Sessa, quiso gratificar al joven por el extraordinario presente. La leyenda sostiene que éste despreció todo tipo de riquezas y posesiones materiales que el rey le había ofrecido y prefirió ser gratificado con granos de trigo, para lo cual pidió al rey: un grano para la primera casilla, dos para la segunda, cuatro para la tercera, ocho para la cuarta, dieciséis para la quinta, y así sucesivamente, doblando el valor de cada casilla hasta la última del tablero. Lo curioso del caso fue que cuando, informado el rey por sus más connotados algebristas de que dado ese cálculo era imposible juntar tal cantidad de granos de trigo y pagarle al forastero (Tahan, 2005).

Descifrado en números reales este bello acontecimiento puede ilustrarse como se muestra en la Tabla 9:

TABLA 9. *Descifrado en números reales de los valores potenciados en las casillas de ajedrez*

	Casilla 1	Casilla 2	Casilla 3	Casilla 4	Casilla 5	Casilla 6	Casilla 7	Casilla 8
Base 2 por doblar la cantidad.	2^{1-1}	2^{2-1}	2^{3-1}	2^{4-1}	2^{5-1}	2^{6-1}	2^{7-1}	2^{8-1}
Las potencias quedan:	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
Granos de trigo por casilla.	**1**	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**
	⋮							⋮
	2^{57-1}	2^{58-1}	2^{59-1}	2^{60-1}	2^{61-1}	2^{62-1}	2^{63-1}	2^{64-1}
	2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}
	$7.20576E^{16}$	**$1.44115E^{17}$**	**$2.88230E^{17}$**	**$5.76460E^{17}$**	**$1.15292E^{18}$**	**$2.30584E^{18}$**	**$4.61168E^{18}$**	**$9.22337E^{18}$**

La cantidad de trigo que el rey debía pagarle a Sessa era la suma de lo que arrojaran las 64 casillas. Esto se explica mediante la sumatoria:

$$C_{64} = \Sigma\left(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}\right) = \\ 18446744073709551615$$

O también

$$C_{64} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

(Dieciocho trillones, cuatro cientos cuarenta y seis mil setecientos cuarenta y cuatro billones, setenta y tres mil setecientos nueve millones, quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince granos de trigo.)

Cabe aclarar que no existe misterio alguno en los cálculos prodigiosos que resultan de este acontecimiento. El detalle está en que *no se puede aplicar a las sumas infinitas* *las propiedades de la aritmética finita* (Tahan, 2005. Véase https://matematicascercanas.com/2014/03/10/la-leyenda-del-tablero-de-ajedrez-y-los-granos-de-trigo/).

Siendo un poco más específicos, para llegar a lo tangible, consideremos que 1 kg de trigo contiene, en promedio entre 23 000 a 25 000 granos; por lo que tomando la media de 24 000 granos por kg, tendremos:

$$\begin{aligned}\tfrac{18446744073709551615}{24000} &= 768614336404565 \text{ kg}\\ &= 768614336405\text{tm}\end{aligned}$$

Consideremos el ranking de los principales productores de trigo en el mundo durante el ciclo 2022-2223, en miles de toneladas métricas, para dar una idea de estas cantidades (véase https://es.statista. com/estadisticas/634804/ principales-paises-productoresdetrigoenelmundo).

China	137 723 000 tm
Unión Europea	134 700 000 tm
India	103 000 000 tm
Rusia	91 000 000 tm
Estados Unidos	44 902 000 tm
Australia	36 600 000 tm
Canadá	33 824 000 tm
Pakistán	26 400 000 tm
Ucrania	21 000 000 tm
Turquía	17 250 000 tm
	646 399 000 tm por año

Tomando en cuenta sólo a los 10 principales productores mundiales de trigo, en conjunto sólo reúnen 646.4 millones de toneladas de trigo al año año, pero a Sessa se le debía pagar la exquisita cantidad de 768 614.3 millones de toneladas de ese grano. Por lo tanto, estos 10 países tendrían que producirlo, sin tener merma de su cosecha anual, por un espacio de más de un milenio:

$$\frac{768614.3\text{tm}}{646.4\text{tm/ año}} = 1189 \text{ años}$$

El rey nunca calculó la deuda que había contraído con Lahur Sessa.

2.8. Operaciones con potencias de base 10

2.8.1. Suma y resta

En las operaciones de suma y resta con potencias de 10, siempre que éstas sean las mismas, se deben **sumar los coeficientes** dejando la potencia de 10 con el mismo grado.

En caso de que no tengan el mismo exponente, debe convertirse el coeficiente multiplicándolo o dividiéndolo por 10, 100, 1000, etc., según sea necesario para igualar los exponentes de toda la expresión (Aguilar et al., 2009).

Ejemplos:

1. $2 \times 10^5 + 3 \times 10^5 = 5 \times 10^5$, porque tienen la misma potencia.

2. $3 \times 10^5 - 0.2 \times 10^5 + 4 = 6.8 \times 10^5$, potencias del mismo tamaño.

3. $2\times10^4+3\times10^5-6\times10^3 = \underbrace{0.2 \times 10^5 + 3 \times 10^5 - 0.06 \times 10^5}_{Aquí\, se\, tomó\, el\, exponente\, 5\, como\, referencia}$

$= 3.14 \times 10^5$

4. $3 \times 10^3 + 2 \times 10^4 + 3 \times 10^6 - 5 \times 10^2 = \underbrace{0.3 \times 10^4 + 2 \times 10^4 + 300 \times 10^4 - 0.05 \times 10^4}_{Aquí\ se\ tomó\ el\ exponente\ 4\ como\ referencia} = 302.25 \times 10^4$

5. $\frac{1}{2} \times 10^3 + \frac{2}{3} \times 10^5 - \frac{3}{8} \times 10^4 = 0.5 \times 10^3 + 666.667 \times 10^3 - 3.75 \times 10^3 = 663.417 \times 10^3$, esta transformación es necesaria ya que se manejan potencias.

6. $\frac{3}{4} \times 10^4 - \frac{1}{3} \times 10^3 + \frac{2}{4} \times 10^7 = 7.5 \times 10^3 - 0.333 \times 10^3 + 5000 \times 10^3 = 5007.1667 \times 10^3$

7. $5 \times 10^4 + 0.255 \times 10^2 + 1/4 \times 10^5 = 500 \times 10^2 + 0.255 \times 10^2 + 250 \times 10^2 = 750.255 \times 10^2$

8. $\frac{32}{\sqrt{16}} \times 10^{-2} + 100\frac{\sqrt{49}}{7} \times 10^{-1} - 3\sqrt{81} \times 10^5 = 0.0008 \times 10^2 + 0.1 \times 10^2 - 27000 \times 10^2 = -26999.8992 \times 10^2$

Ejercicios. Aplicando la técnica de las *operaciones de suma y resta con potencias de base 10*, resuelva los planteamientos que se solicitan a continuación:

1. $\frac{3}{8} \times 10^6 + \frac{3}{7} \times 10^4 - \frac{1}{8} \times 10^5 - 2000 \times 10^2 =$

2. $7.5 \times 10^4 - \frac{3}{6} \times 10^5 + 5.5 \times 10^4 =$

3. $2\frac{1}{2} \times 10^3 + 4\frac{2}{3} \times 10^2 - \frac{1}{3} \times 10^4 =$

4. $\sqrt{49} \times 10^2 - 2\sqrt{1} \times 10^3 + \frac{1}{3}\sqrt{9} \times 10^3 =$

5. $\frac{45}{90} \times 10^7 + 2\frac{4}{8} \times 10^6 + \frac{7}{21}\sqrt{4} \times 10^{\sqrt{25}} =$

6. $3 \times 10^6 - 2 \times 10^3 + 8 \times 10^3 - 7 \times 10^4 =$

7. $3.45 \times 10^5 + 2.25 \times 10^3 + 7.75 \times 10^7 + 0.2554 \times 10^5 =$

8. $\frac{5}{\sqrt[3]{125}} \times 10^3 + 3\frac{\sqrt{36}}{6} \times 10^5 + \frac{3}{21}\sqrt{64} \times 10^4 =$

9. $1.4 \times 10^3 + 2.22 \times 10^3 + 7.77 \times 10^4 =$

10. $\frac{1}{\sqrt[3]{8}} \times 10^2 + 300\frac{\sqrt{36}}{6} \times 10^{-2} + \sqrt{64} \times 10^{-1} =$

2.8.2. Multiplicación

Para multiplicar cantidades escritas en notación científica, se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes, sin importar el tamaño que éstos tengan.

Ejemplos:

1. $(4 \times 10^{12})(2 \times 10^5) = 8 \times 10^{17}$

2. $(2 \times 10^5)(3 \times 10^3)(4 \times 10^{-2}) = 24 \times 10^6$

3. $(2.2 \times 10^3)(3.1 \times 10^{-3})(4.4 \times 10^2) = 30.008 \times 10^2 = 3000.8$

4. $\left(\frac{3}{4} \times 10^4\right)\left(\frac{1}{2} \times 10^{-2}\right)\left(\frac{1}{3} \times 10^{-2}\right) = \frac{3}{24} \times 10^0 = \frac{1}{8} \times 1 = \frac{1}{8}$, con base en la ley de los exponentes, según la cual toda base a la potencia cero (0) es igual a la unidad.

5. $\left(3 \times 10^{\frac{3}{6}}\right)\left(2 \times 10^{\frac{1}{3}}\right) = \left(3 \times 10^{\frac{1}{2}}\right)\left(2 \times 10^{\frac{1}{3}}\right) = 6 \times 10^{\frac{3+2}{6}} = 6 \times 10^{\frac{5}{6}}$

6. $\left(\frac{\sqrt{4}}{2} \times 10^2\right)\left(\frac{3}{\sqrt[3]{64}} \times 10^3\right)\left(\frac{2}{3} \times 10^2\right) = \frac{6}{12} \times 10^7 = \frac{1}{2} \times 10^7$

7. $(3 \times 10^{10})(2 \times 10^8)(5 \times 10^7) = 30 \times 10^{25}$

8. $(0.25 \times 10^3)(2.2 \times 10^{-2})(5.4 \times 10^{-3}) = 2.97 \times 10^{-2} = 0.0297$

9. $\left(3\frac{1}{2} \times 10^{\frac{1}{3}}\right)\left(-2 \times 10^{\frac{1}{4}}\right)(4 \times 10^3) = \left(-28 \times 10^{\frac{43}{12}}\right)$ $(0.25 \times 10^3)(2.2 \times 10^{-2})(5.4 \times 10^{-3}) = 2.97 \times 10^{-2} = 0.0297$

10. $\left(\frac{3}{\sqrt[4]{16}} \times 10^2\right)\left(\frac{4}{\sqrt{9}} \times 10^{-3}\right)\left(2\frac{2}{3} \times 10^2\right) = \frac{96}{18} = \frac{16}{3} = 5.333$

Ejercicios. Aplicando la técnica de las *operaciones de multiplicación con potencias de base 10*, resuelva los planteamientos que se solicitan a continuación:

1. $(3 \times 10)(1 \times 10)(5 \times 10) =$

2. $(2.25 \times 10)(3.10 \times 10)(4.5 \times 10) =$

3. $\left(\frac{3}{7} \times 10^{3}\right)\left(\frac{1}{4} \times 10^{-3}\right)\left(\frac{1}{3} \times 10^{-\frac{1}{3}}\right) =$

4. $\left(10 \times 10^{\frac{3}{6}}\right)\left(23 \times 10^{-\frac{1}{3}}\right) 6 \times 10^{2} =$

5. $(0.25 \times 10^{3})(5.4 \times 10^{-3}) =$

6. $\left(\frac{1}{2} \times 10^{\frac{1}{3}}\right)\left(-2 \times 10^{-\frac{1}{4}}\right)\left(4\frac{1}{3} \times 10^{5}\right) =$

7. $\left(3 \times 10^{\frac{3}{6}}\right)\left(2\frac{2}{3} \times 10^{\frac{1}{3}}\right) =$

8. $\left(\sqrt[3]{\frac{8}{125}} \times 10^{4}\right)\left(\sqrt{\frac{3}{4}} \times 10^{3}\right) =$

9. $(0.25 \times 10^{4})(5.55 \times 10^{2}) =$

10. $\left(2 \times 10^{5}\right)\left(4 \times 10^{-3}\right)\left(1 \times 10^{2}\right) =$

2.8.3. División

Para dividir cantidades escritas en notación científica se dividen los coeficientes y se restan los exponentes:

Ejemplos:

1. $\frac{8 \times 10^{4}}{2 \times 10^{2}} = 4 \times 10^{4-2} = 4 \times 10^{2} = 400$

2. $\frac{48 \times 10^{-10}}{12 \times 10^{-1}} = 4 \times 10^{-10-(-1)} = 4 \times 10^{-10+1} = 4 \times 10^{-9} =$ 0.000000004

3. $\frac{9 \times 10^{5}}{3 \times 10^{-2}} = 3 \times 10^{5-(-2)} = 3 \times 10^{7} = 30000000$

4. $\frac{\frac{4}{3}\times 10^3}{\frac{5}{6}\times 10^5} = \frac{24}{15} \times 10^{3-5} = \frac{8}{5} \times 10^{-2} = 1.6 \times 10^{-2} = 0.016$

5. $\frac{\frac{7}{2}\times 10^7}{\frac{3}{4}\times 10^5} = \frac{28}{6} \times 10^{7-5} = \frac{14}{3} \times 10^{2} = 4.667 \times 10^{2} = 466.7$

Ejercicios. Aplicando la técnica de las *operaciones de división con potencias de base 10*, resuelva los planteamientos que se solicitan a continuación:

1. $\frac{5\times 10^3}{3\times 10^2} =$
2. $\frac{\frac{3}{2}\times 10^8}{\frac{1}{2}\times 10^5} =$
3. $\frac{\sqrt{100}\times 10^5}{\sqrt[3]{125}\times 10^2 =}$
4. $\frac{21\times 10^4}{7\times 10^2} =$
5. $\frac{\frac{1}{2}\times 10^6}{\frac{2}{3}\times 10^4} =$
6. $\frac{5\frac{1}{4}\times 10^3}{3\frac{2}{3}\times 10^2} =$
7. $\frac{-5\times 10^4}{25\times 10^{-1}} =$
8. $\frac{\sqrt{3}\cdot 3\times 10^8}{10\times 10^5} =$
9. $\frac{\sqrt{16}\times 10^4}{\sqrt[3]{27}\times 10^3} =$
10. $\frac{\frac{3}{\sqrt{7}}\times 10^2}{\frac{5}{\sqrt{5}}\times 10^5} =$

2.9. Potenciación

Este tipo de operación tiene lugar cuando se tiene una cantidad llamada *base* y aparece elevada a una *potencia n-ésima.* Dicha potencia indica que se multiplique la base por sí misma las veces que lo indique la potencia, es decir:

$$x^n = x \cdot x \cdot x \cdots x \text{ ésima}$$

Cuando se trabaja con potencias con notación científica, el coeficiente se eleva a la potencia indicada y se multiplican los exponentes. Si la notación científica está elevada a más de una potencia, éstas se convierten en una sola (Soler et al., 2004).

Ejemplos de potencias elementales:

1. $8^2 = 8 \cdot 8 = 64$

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

3. $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$

4. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{9}$

5. $(-3)^{-4} = \frac{1}{-3^4} = \frac{1}{(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)} = \frac{1}{81}$

6. $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$, resulta positivo por cuanto se multiplicó pares de veces.

7. $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$, resulta negativo por cuanto se multiplicó impares de veces.

8. $7^{-2} = \frac{I}{7^2} = \frac{1}{49}$

Ejemplos de potencias con notación científica:

1. $\left(3 \times 10^6\right)^2 = 9 \times 10^{12}$

2. $\left(2 \times 10^3\right)^3 = 8 \times 10^9$

3. $\left[\left(5 \times 10^3\right)^3\right]^3 = \left(5 \times 10^3\right)^9 = 1.953125 \times 10^{33}$

4. $\left\{\left[\left(7 \times 10^2\right)^3\right]^4\right\}^5 = \left(7 \times 10^2\right)^{60} = 5.08021861 \times 10^{170}$

5. $\left(\frac{1}{2} \times 10^4\right)^6 = \frac{1}{64} \times 10^{24}$

6. $\left\{\left[\left(\frac{3}{7} \times 10^{\frac{2}{5}}\right)^3\right]^3\right\}^{\frac{5}{3}} = \left(\frac{3}{7} \times 10^{\frac{2}{5}}\right)^{15} = 3.022374111$

7. $\left\{\left[\left(5\times 10^3\right)^7\right]^2\right\}^3 = \left(5\times 10^3\right)^{42} = 2.27373675\times 10^{155}$

Ejercicios. Aplique la técnica de la potenciación en sus diferentes modalidades para deducir las expresiones que se proporcionan a continuación:

1. $(-4)^2 =$
2. $(5)^{-3} =$
3. $(6)^{-4} =$
4. $(-1)^8 =$
5. $(-2)^{-5} =$
6. $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 =$
7. $\left(\frac{7}{3}\right)^3 =$
8. $\left(\frac{2}{7}\right)^{-3} =$
9. $\left(-\frac{3}{10}\right)^{-3} =$
10. $-(5-2)^{-4} =$
11. $\left(\frac{2}{7}+\frac{4}{3}\right)^3 =$
12. $\left(5-\frac{2}{7}\right)^{-2} =$
13. $\left(4\times 10^2\right)^3 =$
14. $\left[\left(3\times 10^3\right)^{-3}\right]^4 =$
15. $\left(\frac{1}{3}\times 10^4\right)^3 =$
16. $\left\{\left[\left(2\times 10^3\right)^2\right]^{-2}\right\}^{-3} =$
17. $\left\{\left[\left(\frac{-2}{3}\times 10^3\right)^{\frac{3}{2}}\right]^3\right\}^{\frac{2}{3}} =$
18. $\left[\left(3\left(\frac{5}{4}\right)\times 10^3\right)^{-3}\right]^{-2} =$

2.10. Propiedades que no cumple la potenciación

a) No se cumple la propiedad *distributiva de la potencia* con respecto a la *adición* y la *sustracción*; es decir, no se puede distribuir cuando dentro de un paréntesis se tiene una suma o una resta.

Ejemplos:

$$(a+b)^m \neq a^m + b^m$$
$$(a-b)^m \neq a^m - b^m$$

Ejemplos numéricos:

1. $(2+5)^3 \neq 2^3 + 5^3$
   $7^3 \neq 8 + 125$
   $343 \neq 133$

2. $(2-5)^3 \neq 2^3 - 5^3$
   $(-3)^3 \neq 8 - 125$
   $-27 \neq -117$

3. $(12+10)^5 \neq 12^3 + 10^5$
   $22^5 \neq 248832 + 100000$
   $5153632 \neq 348832$

b) No cumple la propiedad *conmutativa*, excepto en los casos en que *la base y el exponente tienen el mismo valor*. De manera general, se expresa como sigue:

$$a^b \neq b^a, \textit{ donde } a, b \textit{ son diferentes de cero.}$$

$$y^x \neq x^y, \textit{ donde } x, y \textit{ son diferentes de cero.}$$

Ejemplos numéricos:

1. $4^3 \neq 3^4$

$64 \neq 81$

2. $5^2 \neq 2^5$

   $25 \neq 32$

3. $8^7 \neq 7^8$

4. $2097152 \neq 5764801$

Excepto, como ya se dijo antes, cuando la base y el exponente tienen el mismo valor.

Ejemplo:

$x^y = y^x \Leftrightarrow x = y si,\ x = y,$ *donde* x, y *son diferentes de cero.*

c) No cumple con la propiedad *asociativa* de los exponentes.

Con base en una de las *leyes de los exponentes,* la cual establece que “si una potencia se eleva a otra potencia, los exponentes se multiplican”, se puede elevar una potencia a otra potencia, y esa a su vez, a otra potencia, y así sucesivamente, pues lo único que se hace es multiplicar todos los exponentes; sin embargo, no resulta lo mismo si un exponente desempeña el papel de *base*. Dicho de otra manera, que uno de esos exponentes se eleve a otra potencia nos dará otro resultado (Aguilar et al., 2008). Cabe aclarar que en una serie de potencias sólo hay una base.

Su expresión general sería:

$$a^{b^c} \neq a^{(b^c)}, \textit{ donde } a, b, c \textit{ son diferentes de cero.}$$

En el término a^{b^c}, la b funge también como base y no solo la a, por lo que $a^{b^c} \neq a^{(b^c)}$. Así como:

$$x^{\mathrm{a}^{(b)^{\mathrm{c}}}} \neq x^{a^{b^{c}}}, \textit{ donde } x, a, b, c \textit{ son diferentes de cero.}$$

Por cuanto que en el primer término ($x^{\mathrm{a}^{(b)^{\mathrm{c}}}} \neq x^{a^{b^{c}}}$)$b$ está siendo elevada a la potencia c, siendo b exponente de x. Esa asociación, no es posible.

Ejemplos numéricos:

En este ejemplo, en el término $4^{2^{3}}$ el 2 es potencial del 4 y al mismo tiempo está elevado a la potencia 3, de manera que es potencia y base a la vez; a diferencia de 4^{2^3} donde el 2 y el 3 son potencias del 4. Siendo así, sólo se multiplican.

1. $4^{2^{3}} \neq 4^{2^3}$
   $4^8 \neq 4^6$

En este, en el término es claro identificar por el paréntesis que el 2 está elevado a la potencia 3, de manera que el 2 se eleva al cubo y pasa a ser potencia del 5; a diferencia de donde el 4, 2 y 3 son potencias de la base 5 y solo se multiplican entre sí.

2. $5^{4^{(2)^{3}}} \neq 5^{4^{2^3}}$
   $5^{4^8} \neq 5^{24}$
   $5^{32} \neq 5^{24}$

En este ejemplo el resultado no cambia debido a que el término, el exponente convierte al 4 en 2 por el radical. La diferencia con el término es que los exponentes son un producto.

3. $3^{2^{4^{\frac{1}{2}}}} = 3^{2^{(4)^{\frac{1}{2}}}}$
   $3^{2\times 4\times \frac{1}{2}} = 3^{2^{\sqrt{4}}}$
   $3^{\frac{8}{2}} = 3^{2^2}$
   $3^4 = 3^4$

Este es un ejemplo más en el que se demuestra que la potenciación no cumple con la propiedad asociativa de los exponentes.

4. $m^{3^{8^{\frac{1}{3}}}} = m^{3^{(8)^{\frac{1}{3}}}}$
$m^{3 \times 8 \times \frac{1}{3}} = 3^{3^{\sqrt[3]{8}}}$
$m^{\frac{24}{3}} = m^{3^2}$
$m^8 = m^6$

Sin embargo, son expresiones iguales: $5^{2^{3^2}} = 5^{2 \times 3 \times 2} = 5^{2 \times 3 \times 2} = 5^{12}$, lo que establece una de las leyes de los exponentes.

2.11. Radicales

Cuando se habla de los radicales, al instante sale a relucir el símbolo $\sqrt{}$, que voluntaria e involuntariamente asociamos a la raíz de un número, aunque a veces no se sepa en esencia qué es. El símbolo $\sqrt{}$ significa: *raíz cuadrada de…*, *raíz n-ésima de…* O sea, si se nos presenta la $\sqrt{x}$ nos indica que hay *una cantidad que elevada al cuadrado nos da x*, o lo que es lo mismo, *una cantidad que multiplicada por sí misma nos da x.* De esta forma se dice que:

$\sqrt{a}$ = raíz cuadrada de a

$\sqrt[3]{y}$ = raíz cúbica de y

$\sqrt[5]{32}$ = raíz quinta de 32

$\sqrt[n]{x}$ = raíz enésima de x

Los símbolos que integran a un radical son los siguientes:

Índice del radical

Radical

$$\sqrt[n]{x}$$

Radicando o subradical

En realidad, un radical es un número o un símbolo con exponente fraccionario. De ahí que $a^n = b$. Al pasar del otro lado de la igualdad el exponente n, queda como sigue:

$a = b^{\frac{1}{n}}$, el exponente pasa con su recíproco o inverso, siendo equivalente

$a = \sqrt[n]{b}$, donde n es el índice u orden de la raíz.

De esta forma, se puede definir:

Índice del radical indica el tipo, el tamaño o el orden de la raíz. Cuando éste es igual a 2, se omite su escritura por ser la más chica y significa raíz cuadrada ($\sqrt{\ }$); cuando es igual a 3, o mayor, sí se escribe y significa raíz cúbica, cuarta, quinta, etcétera.

Radical, también llamado signo o símbolo de la raíz $\sqrt{\ }$.

Radicando, número al cual se le extrae la raíz.

Entre los números reales positivos (R^+) siempre se obtendrán dos resultados: uno *positivo* y otro *negativo* si el **índice de la raíz** es **par**; sin embargo, cuando el **radicando** es **negativo**, sólo existirá *una sola raíz real negativa* si el **índice** del radical es **impar**; es decir, se puede extraer la **raíz** de un **número negativo** “si y sólo sí” ésta (la **raíz**) o **índice** del radical es **impar**.

Ejemplos:

$$\sqrt{9} = \pm 3$$

$$\sqrt[4]{16} = \pm 2$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

$$\sqrt[5]{-25} = -1.9$$

$$\sqrt[7]{-3580} = -3.22$$

$$\sqrt[9]{-5255} = -2.59$$

$$\sqrt[11]{-12000} = -2.35$$

La raíz **par** de un **número negativo** no es un número real, es decir, no está definida en los números reales; si este caso se presenta, entraría en el concepto de número imaginario (número i). En las matemáticas elementales se dice que "no existe".

Ejemplos:

$$\sqrt{-8} = \text{No está definida en los números reales.}$$

$$\sqrt[4]{-10} = \text{No está definida en los números reales.}$$

$$\sqrt[6]{-5} \text{ No está definida en los números reales.}$$

Como se dijo, solo es posible cuando el **índice** o el **tamaño** de la raíz es **impar**.

En conclusión, *sólo es posible obtener la raíz de un número negativo, mientras ésta sea* ***impar*** (radical impar) ($\sqrt[3]{}$, $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[7]{}$, $\sqrt[9]{}$, *etc.*). Dicho de otra forma, las **raíces impares** pueden tener **radicando positivo o negativo** y las **raíces pares** ($\sqrt{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[6]{}$, $\sqrt[8]{}$, *etc.*) sólo pueden tener **radicando positivo** (Baldor, 1996). Estos se ilustran de mejor manera en los ejemplos de la Tabla 10.

TABLA 10. *Ejemplos numéricos*

Radicales con índice par	*Radicales con índice impar*
1. $16 = \pm 4$, tiene dos resultados: +4 y -4, porque (+4)(+4)=16 y (-4)(-4)=16	1. $\sqrt[3]{8}$, tiene un solo resultado ya que hay un único conjunto de números que multiplicados dan -8, es decir: $(-2)(-2)(-2) = -8$, pues se está multiplicando impares veces.
2. $\sqrt[2]{81} = \pm 3$, tiene dos resultados: +3 y -3, porque (+3)(+3)(+3)(+3)=**81** y (-3)(-3)(-3)(-3)=**81**	2. $\sqrt[5]{1,024} = \pm 4$, se puede observar que el radicando es $+$, pero sigue dando un solo resultado, ya que se multiplica impares veces el 4 para obtener el 1 024 ($4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 =$ 1024).
3. $\sqrt[6]{64} = \pm 2$, tiene dos resultados: +2 y -2, porque (+2)(+2)(+2)(+2)(+2)(+2)=**64** y (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)=**64**	3. $\sqrt[5]{-1,024} = -4$, sólo cambió el signo del radicando, por lo que es posible obtener dicha raíz, porque el índice es impar (radicando + o $-$ si el índice es impar).
4. $\sqrt[10]{1} = \pm 1$, de la misma manera, multiplicar diez veces +1 o -1, resulta 1.	4. $\sqrt[7]{-292} = -2.25$, produce un solo resultado negativo ya que 2.25 se está multiplicando siete veces para obtener -292.
5. $\sqrt[14]{22.74} = \pm 1.25$, ya que multiplicar 14 veces +1.25 o -1.25 da como resultado 22.74	5. $\sqrt[11]{-567} = -2.2$. Multiplicando 11 veces -2.2 se obtiene -5867.

Cuando se trabajan **radicales** que contienen **potencias de base 10** se extrae la raíz del coeficiente y se divide el exponente entre el índice de la raíz.

Ejemplos:

1. $\sqrt{9 \times 10^{26}} = 3 \times 10^{13}$

2. $\sqrt[3]{27 \times 10^{12}} = 3 \times 10^{4}$

3. $\sqrt[4]{256 \times 10^{64}} = 4 \times 10^{16}$

4. $\sqrt[5]{59300 \times 10^{95}} = 9 \times 10^{19}$

5. $\sqrt[6]{\frac{309}{595} \times 10^{96}} = \frac{2.6}{2.9} \times 10^{16}$

Ejercicios. Aplicando las técnicas del manejo de los radicales en sus diferentes expresiones, resuelva lo que se pide a continuación:

1. $\sqrt{144} =$
2. $\sqrt{-36} =$
3. $\sqrt[5]{-32} =$
4. $\sqrt[5]{32} =$
5. $\sqrt[7]{-78125} =$
6. $\sqrt[4]{1} =$
7. $\sqrt{7 \times 10^{6}} =$
8. $\sqrt[3]{64 \times 10^{15}} =$
9. $\sqrt[4]{\frac{256}{4} \times 10^{36}} =$
10. $\sqrt{\frac{1}{9} \times 10^{16}} =$
11. $\sqrt[3]{\frac{6}{\sqrt{49}} \times 10^{21}} =$
12. $\sqrt{169 \times 10^{20}} =$
13. $\sqrt[5]{16807 \times 10^{20}} =$
14. $\sqrt[6]{-323} =$
15. $\sqrt[3]{-500} =$

2.11.1 Algunas propiedades de los radicales

Como se puede observar con la igualdad de la raíz:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

La radicación en realidad es otra forma de expresar una potencia fraccionaria: “La raíz n-ésima de cierto número es equivalente a elevar dicho número a la potencia inversa”; de ahí que en las propiedades de la potenciación se cumple también con la radicación. Para que estas propiedades se cumplan es necesario que el radicando sea positivo. Entre esas **propiedades** se pueden mencionar las siguientes:

a) Raíz de un producto *La raíz n-ésima de un producto de factores es igual al producto de las raíces de los factores.*

Ejemplo:

$$\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

Ejemplos numéricos:

1. $\sqrt{3^2\cdot 2^4} = \sqrt{3^2}\cdot\sqrt{2^4} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{16} = 3\cdot 4 = 12$

En este tipo de productos la técnica más sencilla es *igualar el exponente* de cada factor con *el índice del radical* para que sean cancelables y obtener más rápido el resultado. Así:

2. $\sqrt{3^2\cdot 24} = \sqrt{3^{\cancel{2}}\cdot 2^{\cancel{2}}\cdot 2^{\cancel{2}}} = 3\cdot 2\cdot 2 = 12$

3. $\sqrt{4^2\cdot 1^4\cdot 11^2} = \sqrt{4^2\cdot 1^2\cdot 1^2\cdot 11^2} = 4\cdot 1\cdot 1\cdot 11 = 44$

3. $\sqrt[3]{3^3\cdot 5^9\cdot 3^{12}} = \sqrt[3]{3^3\cdot 5^3\cdot 5^3\cdot 5^3\cdot 3^3\cdot 3^3\cdot 3^3\cdot 3^3} = 3\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 30,375$

4. $\sqrt[5]{6^2\cdot 9^4\cdot 8^5} = \sqrt[5]{6^2}\cdot\sqrt[5]{9^4}\cdot 8 = \sqrt[5]{36}\cdot\sqrt[5]{6561}\cdot 8 = 2.048\times 5.8\times 8 = 95.027$

5. $\sqrt{4^2\cdot 5^2\cdot 7^2} = 4\cdot 5\cdot 7 = 140$

6. $\sqrt{7^2 \cdot 5^6 \cdot 2^4} = \sqrt{7^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2} = 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 3,500$

7. $\sqrt[3]{2^7 \cdot 12^4 \cdot 20^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 12^3 \cdot 12 \cdot 20^3 \cdot 20^2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} \times 12 \cdot \sqrt[3]{12} \times 20 \cdot \sqrt[3]{20^2} =$

$$4\sqrt[3]{2} \times 12\sqrt[3]{12} \times 20 \cdot \sqrt[3]{400} = 5.04 \times 27.47 \times 147.36 = 20,402$$

8. $\sqrt[5]{2^{10} \cdot 5^5 \cdot 4^15} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot 4^5 \cdot 4^5 \cdot 4^5} = 2 \cdot 2 \times 5 \times 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1,280$

b) Raíz de un cociente *La raíz n-ésima de una fracción es igual al cociente de la raíz del numerador entre la raíz el denominador.*

Si esta propiedad se aplica a números reales, no hace falta transformar la raíz a potencia de exponente racional; sin embargo, sí es necesario cuando se involucran variables.

Ejemplos:

1. $\sqrt[3]{\frac{m^3}{y^9}} = \frac{m^{3/3}}{y^{9/3}} = \frac{m}{y^3}$, donde y es diferente de cero.

2. $\sqrt[4]{\frac{3^8}{3^4}} = \frac{3^{8/4}}{3^{4/4}} = \frac{3^2}{3} = \frac{9}{3} = 3$ o $\sqrt[4]{\frac{3^8}{3^4}} = \sqrt[\cancel{4}]{\frac{3^4 \cdot \cancel{3^4}}{\cancel{3^4}}} = 3$

3. $\sqrt[6]{\frac{6^9}{8^3}} = \frac{6^{9/6}}{8^{3/6}} = \frac{6^{3/2}}{8^{1/2}} = \sqrt{\frac{6^3}{8}} = \sqrt{\frac{216}{8}} = \sqrt{27}$

4. $\sqrt[7]{\frac{3^7}{4^7}} = \frac{3^{7/7}}{4^{7/7}} = \frac{3}{4} = 0.75$ o $\sqrt[\cancel{7}]{\frac{3^{\cancel{7}}}{4^{\cancel{7}}}} = \frac{3}{4} = 0.75$

5. $\sqrt[9]{\frac{100^9}{100^9}} = \frac{100^{9/9}}{100^{9/9}} = 1$

c) Raíz de un radical (radical del radical, del radical. . .) *La raíz de un radical es un radical en otro radical, y* *el resultado es un radicando cuyo índice es el producto de los índices de los radicales originales.*

Ejemplos:

1. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n*m]{a}$

2. $\sqrt[w]{\sqrt[x]{tp}} = \sqrt[w*x]{tp}$

3. $\sqrt[w]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}} = \sqrt[w*m*n]{x}$

Ejemplos numéricos:

1. $\sqrt{\sqrt[3]{65}} = \sqrt[a*3]{65} = \sqrt[6]{65} = 2$

2. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{16,900}}} = \sqrt[4*3*2]{16,900} = \sqrt[24]{16,900} = 1.5$

3. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{17}}} = \sqrt[2*3*5]{17} = \sqrt[30]{17} = 1.1$

4. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{1}{9}}} = \sqrt[12]{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt[12]{1}}{\sqrt[12]{9}} = \frac{1}{1.2} = 0.833,$ o también:
$\sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{1}{9}}} = \sqrt[12]{0.11111} = 0.833$

5. $\sqrt{\sqrt{\frac{3}{\sqrt[3]{3}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[12]{3}} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{12}}} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{-\frac{1}{6}}} = 3^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3} = 1.2,$
aplicando factorización en el denominador.

Ejercicios. Aplicando las propiedades de los radicales vistas antes, deduzca los siguientes ejercicios:

1. $\sqrt{5^2 \cdot 3^6} =$ 7. $\sqrt[3]{\frac{3^3}{4^6}}$ 13. $\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}}} =$

2. $\sqrt{4^3 \cdot 3^4 \cdot 11^3} =$

3. $\sqrt[3]{7^3 \cdot 2^9 \cdot 1^{15}} =$

4. $\sqrt[5]{6^5 \cdot 3^4 \cdot 8^{10} \cdot 5^5} =$

5. $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2} =$

6. $\sqrt[4]{\frac{16m^4}{y^{12}}} =$

8. $\sqrt[w]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}}}} =$

9. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{513}} =$

10. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{1000}}} =$

11. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\frac{100}{90}}} =$

12. $\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{3}}}} =$

14. $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{8^3}{7^2}}} =$

15. $\sqrt[6]{\frac{8^9}{4^3}} =$

16. $\sqrt[10]{\frac{5^9}{7^8}} =$

17. $\sqrt[100]{\frac{1000^{10}}{1000^{10}}} =$

2.11.2 Racionalización de radicales

La técnica de la racionalización se aplica cuando en las operaciones existe uno o más radicales y no es posible simplificar por simples operaciones.

La racionalización como técnica matemática consiste en multiplicar el cociente (numerador y denominador) por el radical que obstaculiza las operaciones, con el fin de eliminar el o los radicales y facilitar los cálculos. Dicho de otra forma, si el radical que hay que racionalizar, está en el denominador, se trata entonces de transformar el denominador en una cantidad racional (Joaquím y Ortega, 1993).

Entre algunos casos en que es necesaria la aplicación de la racionalización, están los siguientes.

1. Expresión del tipo $\frac{a}{b\sqrt{c}}$, donde b y c son diferentes de cero.

En este caso se presenta el radical $\sqrt{c}$

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \left[\frac{a}{b\sqrt{c}}\right] \cdot \left[\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\right] = \overbrace{\frac{a \cdot \sqrt{c}}{b(\sqrt{c})^2}}^{Parte\,racional} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b \cdot c}$$

2. Expresión del tipo $\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$, donde b y c son diferentes de cero. Hay que considerar que en este caso está presente un radical enésimo y se transforma a $\sqrt[n]{c^{n-m}}$, con la finalidad de que el radical original ($\sqrt[n]{c^m}$), iguale su exponente al índice del radical, donde $m < n$.

Éste se busca de la siguiente forma: el radical $\sqrt[n]{c^m}$ se multiplica por otro factor de manera que el exponente de c llegue a ser igual a n y se pueda cancelar (https://www.mundoestudiante.com/racionalizacion-de-radicales/).

Por ejemplo:

$$\sqrt[n]{c^m} \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}} = \sqrt[n]{c^m \cdot c^{n-m}} = \sqrt[n]{c^{m+(n-m)}} = \sqrt[n]{c^{m+n-m}} = \sqrt[n]{c^n} = c$$

Por lo tanto se procede a la racionalización como sigue:

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}} = \left[\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}\right] \cdot \underbrace{\left[\frac{\sqrt[n]{c^{n-m}}}{\sqrt[n]{c^{n-m}}}\right]}_{Parte\,racional} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m \cdot c^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b \cdot \sqrt[n]{c^n}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b \cdot c}$$

3. Expresión del tipo $\frac{a}{\sqrt{b+c}}$, donde b y c son diferentes de cero.

Como se observa, el denominador es un binomio en el que hay un radical.

En este caso se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado de ese binomio.

$$\frac{a}{\sqrt{b}+c} = \frac{a}{\sqrt{b}+c} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{b}-c}{\sqrt{b}-c}}_{Parte\,racional} = \frac{a\cdot(\sqrt{b}-c)}{b-c^2}$$

4. Expresión del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, donde b y c son diferentes de cero. Cuando del denominador sea un binomio con uno o dos radicales se procede de la misma forma que en el caso 3: se multiplica por el conjugado del denominador.

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})} \cdot \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

Los siguientes ejemplos con números reales y expresiones algebraicas ofrecen mayor precisión de estos casos y se constata la razón del uso de las racionalizaciones como herramienta de la aritmética y el álgebra.

Ejemplos:

1. $\frac{3}{2\sqrt{2}} = \left[\frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right] = \frac{3\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

2. $\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}$; en este caso primero se busca el factor por el cual se racionalizará:

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^{3-I}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

Así:

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{2}} = \left[\frac{3}{2\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}\right] = \frac{3\sqrt[3]{2^2}}{2\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2\cdot 2} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{4}$$

3. $\frac{5x}{\sqrt[5]{(6x)^2}}$; el factor con el que se racionalizará:

$\sqrt[5]{(6x)^{5-2}} = \sqrt[5]{(6x)^3}$

$$\frac{5x}{\sqrt[5]{(6x)^2}} = \left[\frac{5x}{\sqrt[5]{(6x)^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{(6x)^3}}{\sqrt[5]{(6x)^3}}\right] = \frac{5x\sqrt[5]{(6x)^3}}{\sqrt[5]{(6x)^5}} = \frac{5x\sqrt[5]{(6x)^3}}{6x} = \frac{5}{6}\sqrt[5]{(6x)^3}$$

donde x es diferente de cero.

4. $\frac{5}{\sqrt{7}+3} =$; en este caso se usa el conjugado para racionalizar la $\sqrt{7}-3$ ecuación, que es:

$$\left[\frac{5}{\sqrt{7}+3} \cdot \frac{\sqrt{7}-3}{\sqrt{7}-3}\right] = \frac{5(\sqrt{7}-3)}{7-9} = \frac{5(\sqrt{7}-3)}{-2} = -\frac{5}{2}(\sqrt{7}-3)$$

5. $\frac{2}{\sqrt[4]{w^2}-1}$ $=$; en este ejemplo, el conjugado de $\sqrt[4]{w^2}-1$ es: $\sqrt[4]{w^2}+1$

$\left[\frac{2}{\sqrt[4]{w^2}-1} \cdot \frac{\sqrt[4]{w^2}+1}{\sqrt[4]{w^2}+1}\right] = \frac{2\left(\sqrt[4]{w^2}+1\right)}{w-1}$, donde w es diferente de uno.

6. $\frac{4}{\sqrt{y}+\sqrt{3}} =$; en este el conjugado de $\sqrt{y}+\sqrt{3}$ es: $\sqrt{y}-\sqrt{3}$

$\left[\frac{4}{\sqrt{y}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{y}-\sqrt{3}}{\sqrt{y}-\sqrt{3}}\right] = \frac{4(\sqrt{y}-\sqrt{3})}{y-3y+3y-3} = \frac{4(\sqrt{y}-\sqrt{3})}{y-3}$, donde y es diferente de 3.

7. $\frac{3}{\sqrt{w}+\sqrt{x}} = \left[\frac{3}{\sqrt{w}+\sqrt{x}}\right]\left[\frac{\sqrt{w}-\sqrt{x}}{\sqrt{w}-\sqrt{x}}\right] = \frac{3(\sqrt{w}-\sqrt{x})}{w-x}$, donde w y x son diferentes de cero y w es diferente de x.

En los casos de racionalización de expresiones, donde el índice del radical sea 3, se debe multiplicar por una expresión que dé como resultado una *suma* o una *diferencia de cubos.*

Esto es, aplicando la *factorización* de *suma* y *diferencia de cubos perfectos*:

$$a^3+b^3 = (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$
$$a^3-b^3 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

Es decir:

- Si el denominador es de la forma $(a+b)$, su conjugado es (a^2-ab+b^2)
- Si el denominador es de la forma $(a-b)$, su conjugado es (a^2+ab+b^2)

8. $\frac{3}{\sqrt[3]{m+2}}$; en este caso el conjugado de $\sqrt[3]{m+2}$ es $(\sqrt[3]{m})^2 - 2\sqrt[3]{m}+2^2 = \sqrt[3]{m^2}-2\sqrt[3]{m}+4$. Así, la racionalización queda del siguiente modo:

$$\left[\frac{3}{\sqrt[3]{m}+2}\cdot\frac{\sqrt[3]{m^2}-2\sqrt[3]{m}+4}{\sqrt[3]{m^2}-2\sqrt[3]{m}+4}\right] = \frac{3\left(\sqrt[3]{m^2}-2\sqrt[3]{m}+4\right)}{(\sqrt[3]{m})^3+2^3} = \frac{3\left(\sqrt[3]{m^2}-2\sqrt[3]{m}+4\right)}{m+8}$$

donde m es diferente de -8.

9. $\frac{5}{\sqrt[3]{t-3}}$; en este caso el conjugado de $\sqrt[3]{t-3}$ es $\left(\sqrt[3]{t}\right)^2+3\sqrt[3]{t}+3^2 = \sqrt[3]{t^2}+3\sqrt[3]{t}+9$. Así, la racionalización, queda de la siguiente manera:

$$\left[\frac{5}{\sqrt[3]{t}-3}\cdot\frac{\sqrt[3]{t^2}}{\sqrt[3]{t^2}}+\frac{3\sqrt[3]{t}+9}{3\sqrt[3]{t}+9}\right] = \frac{5\left(\sqrt[3]{t^2}+3\sqrt[3]{t}+9\right)}{\sqrt[3]{t^3}-27} = \frac{5\left(\sqrt[3]{t^2}+3\sqrt[3]{t}+9\right)}{t-27}$$

donde t es diferente de 27.

Cuando se presentan casos en que el o los radicales se ubican en el numerador, el procedimiento a seguir es el mismo que cuando los radicales están en el denominador.

Ejemplos:

10. $= \frac{\sqrt{w}}{2w} = \left[\frac{\sqrt{w}}{2w}\cdot\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{w}}\right] = \frac{w}{2w\sqrt{w}} = \frac{l}{2\sqrt{w}}$, donde w es diferente de cero.

11. $\frac{\sqrt{3x}-\sqrt{2w}}{9x^2-4w^2} =$, donde x y w son diferentes de cero.

En este caso se factoriza el denominador por tratarse de una diferencia de cuadrados: $9x^2-4w^2=(3x-2w)(3x+2w)$, y luego toda la expresión original se multiplica por el conjugado de $\sqrt{3x} - \sqrt{2w} = \sqrt{3x} + \sqrt{2w}$. Así, la racionalización, queda de la siguiente manera:

$$\left[\frac{\sqrt{3x}-\sqrt{2w}}{(3x-2w)(3x+2w)} \cdot \frac{\sqrt{3x}+\sqrt{2w}}{\sqrt{3x}+\sqrt{2w}}\right] = \frac{\cancel{(3x-2w)}}{\cancel{(3x-2w)}(3x+2w)(3x+\sqrt{2w})}$$
$$= \frac{1}{(3x+2w)(3x+2w)}$$

12. $\frac{\sqrt[3]{2m}+\sqrt[3]{2w}}{m+w}$, donde m y w son diferentes de cero. Aquí se busca el conjugado de: $\sqrt[3]{2m} + \sqrt[3]{2w}$

$$\sqrt[3]{2m} + \sqrt[3]{2w} = \left(\sqrt[3]{2m}\right)^2 - \sqrt[3]{2m}\sqrt[3]{2w} + \left(\sqrt[3]{2w}\right)^2$$
$$= \sqrt[3]{4m^2} - \sqrt[3]{2m}\sqrt[3]{2w} + \sqrt[3]{4w^2}$$

De este modo, la racionalización, queda así:

$$\left[\frac{\sqrt[3]{2m}+\sqrt[3]{2w}}{m+w} \cdot \frac{\sqrt[3]{4m^2}-\sqrt[3]{2m}\sqrt[3]{2w}+\sqrt[3]{4w^2}}{\sqrt[3]{4m^2}-\sqrt[3]{2m}\sqrt[3]{2w}+\sqrt[3]{4w^2}}\right] =$$
$$= \frac{\left(\sqrt[3]{2m}\right)^3+\left(\sqrt[3]{2w}\right)^3}{(m+w)\left(\sqrt[3]{4m^2}-\sqrt[3]{2m}\sqrt[3]{2w}+\sqrt[3]{4w^2}\right)}$$
$$= \frac{2m+2w}{(m+w)\left(\sqrt[3]{4m^2}-\sqrt[3]{2m}\sqrt[3]{2w}+\sqrt[3]{4w^2}\right)}$$
$$= \frac{2\cancel{(m+w)}}{\cancel{(m+w)}\left(\sqrt[3]{4m^2}-\sqrt[3]{2m}\sqrt[3]{2w}+\sqrt[3]{4w^2}\right)}$$
$$= \frac{2}{\left(\sqrt[3]{4m^2}-\sqrt[3]{2m}\sqrt[3]{2w}+\sqrt[3]{4w^2}\right)}$$

13. $\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{x-5}$, donde x es diferente de 5.

Se busca el conjugado del numerador: $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}$$

De este modo, la racionalización queda así:

$$\left[\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{(x-5)} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}\right] = \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-\left(\sqrt[3]{5}\right)^3}{(x-5)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}\right)} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}$$

Ejercicios. Aplique la técnica de la racionalización en las operaciones racionales de los radicales para deducir las expresiones que se proporcionan a continuación:

1. $\frac{1}{\sqrt{2}} =$
2. $\frac{w}{\sqrt[3]{w^2}} =$, donde w es diferente de cero.
3. $\frac{5a}{2\sqrt[4]{2a}} =$, donde a es diferente de cero.
4. $\frac{2w}{\sqrt[5]{(3w)^2}} =$, donde w es diferente de cero.
5. $\frac{2}{\sqrt{m^3}+5} =$, donde m es mayor que cero.
6. $\frac{6}{\sqrt{8}-2} =$
7. $\frac{m}{\sqrt[4]{y^2}-1} =$, donde y es diferente de 1.
8. $\frac{4}{\sqrt{m}+\sqrt{7}} =$
9. $\frac{3}{\sqrt{k}-\sqrt{t}} =$, donde t es diferente de k y ambas son diferentes de cero.
10. $\frac{5}{\sqrt[3]{k}-2} =$, donde k es diferente de 8.
11. $\frac{2}{\sqrt[3]{m}+3} =$, donde m es diferente de -27.
12. $\frac{\sqrt{m}}{4m} =$, donde m es diferente de cero.
13. $\frac{16m^2-49k^2}{\sqrt{2m}-\sqrt{3k}} =$, donde m y k son diferentes de cero.
14. $\frac{\sqrt{3m}+\sqrt{k}}{4m^2-k^2} =$, donde m y k son diferentes de cero.

15. $\frac{\sqrt[3]{w}+\sqrt[3]{k}}{w+k}=$, donde w es diferente de $-k$ y ambas son diferentes de cero.

16. $\frac{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{3}}{m-3}=$, donde m es diferente de 3.

Unidad 3
Herramientas valiosas

La imaginación es más importante que el conocimiento.
Albert Einstein

3.1 Introducción

La naturaleza nos ofrece una gran variedad de dimensiones y complejidades que quien las contempla se queda perplejo. Cuando estas dimensiones se traducen a la cotidianidad humana, se presentan problemas de tipo económico, administrativo, ingenieril, biológico, médico, social, geográfico, físico, astronómico, geodésico, etcétera, de manera que para interpretar ese lenguaje de la naturaleza surge la ciencia matemática o, como lo dijera Pitágoras, "la magia de las matemáticas" (Echegaray, 2001), que nos presenta muchas herramientas para plantear soluciones a variados problemas en los que se hace necesario no sólo el uso del conocimiento, sino también mucha observación, curiosidad, experimentación y el arte de la imaginación. Despierta la curiosidad cuando se plantean situaciones problemáticas como la que sugiere Sánchez (2012) y que a continuación se parafrasea:

> Raúl y René eran dos amigos que hacía tiempo que no se habían visto. El día que se encontraron de nuevo conversaron un rato sobre cómo les había ido en su vida y luego se adentraron un poco en temas de la familia:
>
> Raúl le preguntó a René: "¿Cuáles son las edades de tus tres hijos?" A lo que René contestó" "¡Es muy fácil saberlo! El producto del número de años que tiene cada uno de los tres es 40 y la suma de las tres edades es igual al número de tu casa". Raúl se quedó pensando un momento, haciendo algunos cálculos. Luego dijo: "Necesito más datos". René contestó: "¡Es cierto! Mi esposa y yo nunca tuvimos gemelos".
>
> *(En cuanto pueda, ayude a Raúl)*

Cuando el calculador analiza un problema para darle solución, debe manejar una serie de argumentos matemáticos que le permitan tener una idea clara de lo que le están pidiendo, la herramienta que va a utilizar y la solución real a la que quiere llegar.

Las herramientas matemáticas son tantas y tan variadas que se puede contar con una para cada tipo de problema que demanda el mundo que nos rodea. En esta unidad se exploran algunas de ellas. ¡Ojalá que le sean de utilidad!

3.2. La poderosa herramienta del mínimo común múltiplo (mcm)

Julián y Norma se encontraron en una reunión de negocios y, en una plática sobre su mercancía de venta, Julián dijo: "Yo vendo blusas a $75 cada una", y Norma comentó: "Yo vendo faldas a $60 cada una".

Después de haber conversado un rato y dado que su negocio se ubicaba en diferentes zonas de la ciudad, deciden intercambiar parte de su mercancía, con la condición de que ninguno tuviera pérdidas; es decir, que la cantidad de blusas y faldas intercambiadas tuvieran el mismo monto económico. El problema es —dijo Julián— cómo calcular cuántas blusas y cuántas faldas podemos intercambiar que sumen el mismo monto. Entonces intervino Norma y dijo: "Recuerdo un poco de mis clases de matemática de la secundaria y, que yo sepa, se puede hacer uso del mínimo común múltiplo". Entonces Julián preguntó: "¿Y qué es eso del mínimo común múltiplo? A lo cual ella respondió:

> El **mínimo común múltiplo** (mcm) de **dos** o **más cantidades** es **el menor de todos sus múltiplos comunes**, sin considerar el 0. De ahí su nombre, *mínimo:* el más pequeño de los *múltiplos* que son *comunes* a todos los números en cuestión.

Julián, muy interesado de lo que Norma le compartía, y sorprendido de su habilidad, le preguntó: "¿Y cómo se determina ese mínimo común múltiplo?" Norma le respondió: "Lo podemos obtener de **varias formas**, pero para que me entiendas te lo voy demostrar de una manera sencilla con dos números pequeños, ¿te parece? Julián dijo: "¡Sin más preámbulo, manos a la obra!"

Norma inició su exposición así: la expresión *"mcm [4, 6]"*, se lee *"mínimo común múltiplo de los números 4 y 6"*, por lo que vamos a calcular el *mcm de 4 y 6*. Para hacerlo se procede de la siguiente manera:

- Primero escribimos los *múltiplos de 4* hasta donde sea posible.

- Luego, los múltiplos de 6, igual, hasta donde sea posible:

Múltiplos de 4 : 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52...

Múltiplos de 6 : 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72...

"Como puedes observar —dijo Norma—, cada número se va multiplicando: primero por 1, luego por 2, luego por 3, y así sucesivamente, hasta el n-ésimo número con que se desee. Los números que están encerrados en un círculo hacen intersección entre los dos conjuntos de múltiplos, que son: 12, 24, 36, 48... Como el más pequeño (el *mínimo*) de los múltiplos comunes de estos dos conjuntos es el 12, por lo tanto, el mcm [4, 6] = **12**". "Muy bien —contestó Julián—, ¿pero eso qué tiene que ver con las blusas y las faldas que vendemos?" "Espera, ¡no he terminado!, lo interrumpió Norma. "Ahora emplearemos un método fácil y ameno para el cálculo del *mcm*, mediante la **descomposición de factores primos** de los números en cuestión".

Descomposición en factores primos:

1.

4	6	$\div 2$	mitad de ambos números
2	3	$\div 2$	mitad de 2
1	3	$\div 3$	tercera o tercia de 3
	1		hasta que quedan en 1 ambos números

De esta forma el *mcm* será la *multiplicación* de los *factores comunes*:

$$\text{mcm } [4, 6] = 2 \times 2 \times 3 = \mathbf{12}$$

“Ahora, me gustaría que resolvieras un ejercicio más como entrenamiento —dijo Julián, muy entusiasmado— que me digas qué es ese 12 como mcm”. “¡De acuerdo! —respondió Norma, y añadió—, para que luego resolvamos nuestro problema con nuestra mercancía y no te impacientes”.

Entonces procedió a un segundo ejemplo:

2. Determinar el mcm $[15, 25]$:

Solución:

$$\begin{array}{rr|l} 15 & 25 & \div 3 \\ \hline 5 & 25 & \div 5 \\ 1 & 5 & \div 5 \\ & 1 & \end{array}$$

mcm $[15, 25] = 3 \times 5 \times 5 = \mathbf{75}$

“Creo que hasta aquí ya hemos entendido el procedimiento, pero para saber cómo se interpreta o cómo se toma ese *mcm* —dijo Norma— es necesario aplicarlo a un problema real, como el nuestro. Veamos ahora cuántas blusas y cuántas faldas como mínimo vamos intercambiar para que nadie salga perdiendo. De esta manera ponemos en práctica esta herramienta tan útil en la resolución de problemas”.

“Como ya sabemos —dijo Norma—, tú, Julián, vendes blusas a \$75 cada una y yo vendo faldas a \$60 cada una”. Por lo tanto:

Solución:

$$\begin{array}{rr|l} 75 & 60 & \div 2 \\ \hline 75 & 30 & \div 2 \\ 75 & 15 & \div 3 \\ 25 & 5 & \div 5 \\ 5 & 1 & \div 5 \\ 1 & & \end{array}$$

"Así: $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 300$, o también $2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$, lo que se interpreta como el ***monto mínimo que hará cada mercancía*** que nos "En conclusión —dijo Norma—, tú me darás 4 blusas y yo te daré 5 faldas. De esta manera hemos intercambiado \$300 en mercancía".

$\therefore$ intercambiaremos: $\frac{300}{75} = 4$ blusas y

$$\frac{300}{60} = 5 \text{ faldas}$$

"En conclusión —dijo Norma—, tú me darás 4 blusas y yo te daré 5 faldas. De esta manera hemos intercambiado \$300 en mercancía".

Con fines de entrenamiento, se propusieron realizar otros ejercicios.

3. Determine el mcm $[31, 55]$:

Solución:

$$\begin{array}{rr|r} 31 & 55 & \div 5 \\ \hline 31 & 11 & \div 31 \\ 1 & 11 & \div 11 \\ & 1 & \end{array}$$

mcm $[31, 55] = 5 \times 31 \times 11 = \mathbf{1\ 705}$

4. Determinar el mcm $[16, 40]$:

Solución:

$$\begin{array}{rr|l} 16 & 40 & \div 2 \\ \hline 8 & 20 & \div 2 \\ 4 & 10 & \div 2 \\ 2 & 5 & \div 2 \\ 1 & 5 & \div 5 \\ & 1 & \end{array}$$

mcm $[16, 40] = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = \mathbf{80}$

5. Determinar el mcm $[120, 600]$:

Solución:

$$\begin{array}{rr|r} 120 & 600 & \div 10 \\ \hline 12 & 60 & \div 6 \\ 2 & 10 & \div 2 \\ 1 & 5 & \div 5 \\ & 1 & \end{array}$$

mcm $[120, 600] = 10 \times 6 \times 2 \times 5 = \mathbf{600}$

6. Determine el mcm $[6, 10, 15]$:

Solución:

$$\begin{array}{rrr|l} 6 & 10 & 15 & \div 2 \\ \hline 3 & 5 & 15 & \div 3 \\ 1 & 5 & 5 & \div 5 \\ & 1 & 1 & \end{array}$$

mcm $[6, 10, 15] = 2 \times 3 \times 5 = \mathbf{30}$

7. Determinar el mcm $[80, 240, 720]$:

Solución:

80	240	720	$\div 10$
8	24	72	$\div 8$
1	3	9	$\div 3$
	1	3	$\div 3$
		1	

mcm $[80, 240, 720] = 10 \times 8 \times 3 \times 3 = \mathbf{720}$

8. Calcule el mcm $[4, 8, 10, 18]$:

Solución:

4	5	10	18	$\div 2$
2	4	5	9	$\div 2$
1	2	5	9	$\div 2$
	1	5	9	$\div 5$
		1	9	$\div 9$
			1	

mcm $[2, 8, 10, 18] = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 9 = \mathbf{360}$

3.2.1. El mcm en el contexto aplicado

1. Los señores Noé y Elí trabajan en sociedad cultivando jitomates, para lo cual necesitan comprar fertilizante de dos tipos para cada surco sembrado. El señor Noé comprará urea, que cuesta \$35 el kilogramo, y el señor Elí comprará micronutrientes, que cuesta \$45 el kilogramo. Ellos desean saber ¿cuál es la mínima cantidad de dinero que se necesita para que ambos inviertan lo mismo?

Solución:

$$\begin{array}{rr|l} 35 & 45 & \div 3 \\ \hline 35 & 15 & \div 3 \\ 35 & 5 & \div 5 \\ 7 & 1 & \div 7 \\ 1 & & \end{array}$$

$3 \times 3 \times 5 \times 7 = \mathbf{315}$

$\therefore$ Necesitan \$315 cada uno y así comprarán:

Noé $= \frac{315}{35} = 9$ kg de urea

Elí $\frac{315}{45} = 7$ kg de micronutrientes

2. Lucía y Paola se disponen a ahorrar. Lucía ahorra \$50, y Paola, \$72, semanalmente. ¿Cuál será la mínima cantidad que las dos alcanzarán a ahorrar a la par?

Solución:

$$\begin{array}{rr|l} 50 & 72 & \div 2 \\ \hline 25 & 36 & \div 2 \\ 25 & 18 & \div 2 \\ 25 & 9 & \div 3 \\ 25 & 3 & \div 3 \\ 25 & 1 & \div 5 \\ 5 & & \div 5 \\ 1 & & \end{array}$$

mcm $[50, 72] = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 1800$

$\therefore$ Lucía ahorrará: $\frac{1800}{50} = 36$ semanas

Paola ahorrará: $\frac{1800}{72} = 25$ semanas

De manera que cada una ahorrará: **\$1 800**

3. Con \$30 ¿podré comprar un número exacto de lápices de \$3, \$5 y \$6 cada uno? ¿Cuántos de cada precio?

Solución:

3	5	6	$\div 2$
3	5	3	$\div 3$
1	5	1	$\div 5$

mcm $[3, 5, 6] = 2 \times 3 \times 5 = 30$

$\therefore$ Se puede comprar un número exacto de lápices, porque el precio (3, 5 y 6) es múltiplo (divisor exacto) de 30.

Se pueden comprar: $\frac{30}{3} = 10$ de \$3
$\frac{30}{5} = 6$ de \$5

$\frac{30}{5} = 6$ de \$6

4. ¿Se puede tener \$500 en monedas de \$5, \$10 y \$20?

Solución:

5	10	20	$\div 2$
5	5	10	$\div 2$
5	5	5	$\div 5$
1	1	1	

mcm $[5, 10, 20] = 2 \times 2 \times 5 = 20$

$\therefore$ Sí se pueden tener \$500 en monedas de a \$5, \$10 y \$20, debido a que estos valores son múltiplos de 20 y divisores exactos de 500.

Y se podrán tener con: $\frac{500}{5} = 100$ monedas de a \$5,
$\frac{500}{10} = 50$ monedas de a \$10, y

$\frac{500}{20} = 25$ monedas de a \$20

5. ¿Cuál es la mínima, y la misma, distancia que se puede medir con una cinta de 20, 50 y 80 metros de largo?

Solución:

Dicho de otra manera: si comenzamos a medir en el mismo punto al mismo tiempo con las tres cintas, ¿a las cuántas medidas con cada cinta logran quedar a la par nuevamente las mediciones, tal y como iniciaron?

Así, hay que calcular el mcm de las medidas de las cintas:

$$\begin{array}{rrr|l}
20 & 50 & 80 & \div 2 \\
\hline
10 & 25 & 40 & \div 2 \\
5 & 25 & 20 & \div 2 \\
5 & 25 & 10 & \div 2 \\
5 & 25 & 5 & \div 5 \\
1 & 5 & 1 & \div 5 \\
1 & & &
\end{array}$$

mcm $= 2^4 \times 5^2 = 400$

$\therefore$ La menor distancia que se puede medir exactamente es 400 m.

Las veces que se debe medir con cada cinta:

$\frac{400}{20} = 20$ veces con la cinta de 20 m

$\frac{400}{50} = 8$ veces con la cinta de 50 m

$\frac{400}{80} = 5$ veces con la cinta de 80 m

6. El equipo de trabajo de Sebastián se reúne cada 14 días, mientras que el equipo de Mayra lo hace cada 10 días, y el de Jaime cada 15 días. Si hoy se reunieron todos los equipos, ¿cuánto tiempo tardarán en volver a reunirse todos?

Solución:

$$\begin{array}{rrr|l} 14 & 10 & 15 & \div 2 \\ \hline 7 & 5 & 15 & \div 3 \\ 7 & 5 & 5 & \div 5 \\ 7 & 1 & 1 & \div 7 \\ 1 & & & \end{array}$$

$\text{mcm} = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$

$\therefore$ Tardarán 210 días en volver a reunirse, es decir, en $\frac{210}{30} = 7$ meses

7. Braulio, Chela y Julián son promotores de una compañía que vende membresías. Braulio realiza recorridos por diferentes ciudades, cada uno de los cuales requiere 8 días; los recorridos de Chela ocupan 10 días, mientras que los de Julián duran 18 días. Si hoy inician sus recorridos en la sede de la compañía, ¿en cuántos días volverán a comenzar juntos sus recorridos?

Solución:

$$\begin{array}{rrr|l} 8 & 10 & 18 & \div 2 \\ \hline 4 & 5 & 9 & \div 2 \\ 2 & 5 & 9 & \div 2 \\ 1 & 5 & 9 & \div 3 \\ & 5 & 3 & \div 3 \\ & 5 & 1 & \div 5 \\ & 1 & & \end{array}$$

$\text{mcm}\ [8, 10, 18] = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$

$\therefore$ En 360 días volverán a iniciar juntos sus recorridos.

8. Un circuito se recorre en automóvil en cinco minutos, en motocicleta en cuatro minutos y en bicicleta en 12. Si el automovilista, el motociclista y el ciclista salieron juntos a las

12:00 horas ¿en qué tiempo volverán a comenzar los recorridos juntos?

Solución:

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 12 & \div 2 \\ \hline 5 & 2 & 6 & \div 2 \\ 5 & 1 & 3 & \div 3 \\ 5 & & 1 & \div 5 \\ 1 & & & \end{array}$$

mcm $[5, 4, 12] = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$

$\therefore$ Volverán a comenzar juntos a los 60 min, o sea, en una hora.

9. ¿Cuál es la menor suma de dinero con que se puede comprar un número exacto de libros de 3, 4, 5 y 8 dólares cada uno y cuántos libros de cada precio se podrían comprar con esa suma?

Solución:

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 5 & 8 & \div 2 \\ \hline 3 & 2 & 5 & 4 & \div 2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & \div 2 \\ 3 & & 5 & 1 & \div 3 \\ 1 & & 5 & & \div 5 \\ & & 1 & & \end{array}$$

mcm $[3, 4, 5, 8] = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$

a) La menor suma de dinero es 120 dólares.

b) Se podrían comprar:

$\frac{120}{3} = 40$ libros de 3 dólares

$\frac{120}{4} = 30$ libros de 4 dólares

$\frac{120}{5} = 24$ libros de 5 dólares

$\frac{120}{8} = 15$ libros de 8 dólares

10. ¿Cuál es la menor capacidad que debe tener un estanque que se desea llenar en un tiempo exacto por cualquiera de las tres llaves de las que se dispone? La primera vierte 12, la segunda 18 y la tercera 20 l/min.

Solución:

12	18	20	$\div 2$
6	9	10	$\div 2$
3	9	5	$\div 3$
1	3	5	$\div 3$
	1	5	$\div 5$
		1	

mcm $[12, 18, 20] = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$

El estanque debe tener una capacidad mínima de 180 litros. El tiempo que le llevará a cada llave:

La primera $= \frac{180}{12} = 12$ minutos

La segunda $= \frac{180}{18} = 10$ minutos

La tercera $= \frac{180}{20} = 9$ minutos

11. ¿Cuál es la menor capacidad que debe tener un estanque que se desea llenar en un tiempo exacto por cualquiera de las tres llaves de las que se dispone? La primera vierte 2 litros por segundo, la segunda 30 litros en 2 segundos y la tercera 48 litros en 3 segundos.

Solución:

Primero se debe convertir el gasto hidráulico (lo que vierte cada llave en la unidad de tiempo) de cada llave a $l\, s^{-1}$.

Primera llave: $2\,l\,s^{-1}$

Segunda llave: $30/2 = 15\,l\,s^{-1}$

Tercera llave: $48/3 = 16\,l\,s^{-1}$

Ahora se procede a calcular la mínima capacidad que debe tener el estanque.

$$\begin{array}{ccc|c}
2 & 15 & 16 & \div 2 \\
\hline
1 & 15 & 8 & \div 2 \\
 & 15 & 4 & \div 2 \\
 & 15 & 2 & \div 2 \\
 & 15 & 1 & \div 3 \\
 & 5 & & \div 5 \\
 & 1 & &
\end{array}$$

mcm $[2, 15, 16] = 2^4 \times 3 \times 5 = 240$

$\therefore$ La menor capacidad que debe tener el estanque es 240 litros.

El tiempo que tardará en llenar ese estanque cada llave:

$\frac{240}{2} = 120$ segundos

$\frac{240}{15} = 16$ segundos

$\frac{240}{16} = 15$ segundos

12. Hallar la menor capacidad posible de un depósito que se puede llenar en un número exacto de segundos abriendo simultáneamente las tres llaves que vierten: la primera 10 litros por minuto, la segunda 12 litros por minuto y la tercera 30 litros por minuto. Y ¿cuántos minutos tardaría en llenarse?

Solución:

En este caso no se calcula el mcm de lo que vierte cada llave, porque el planteamiento dice que se abren simultáneamente las tres llaves; es decir, entre las tres llenarán el depósito; por lo tanto, se trata de obtener el mcm de la suma de las tres llaves: $10 + 12 + 30 = 52$.

$$\begin{array}{r|r} 52 & \div 2 \\ \hline 26 & \div 2 \\ 13 & \div 13 \\ 1 & \end{array}$$

mcm $[52] = 2 \times 2 \times 13 = 52$

$\therefore$ La capacidad mínima del depósito es 52 litros. El tiempo que tardaría en llenarse:

$\frac{52}{52} = 1$ minuto

13. ¿Cuál es la menor longitud de una varilla que se puede dividir en pedazos de 8, 9 y 15 cm de longitud sin que sobre ni falte nada y cuántos pedazos de cada longitud se podrían obtener de esa varilla?

Solución:

$$\begin{array}{ccc|c} 8 & 9 & 15 & \div 2 \\ \hline 4 & 9 & 15 & \div 2 \\ 2 & 9 & 15 & \div 2 \\ 1 & 9 & 15 & \div 3 \\ & 3 & 5 & \div 3 \\ & 1 & 5 & \div 5 \\ & & 1 & \end{array}$$

mcm $[8, 9, 15] = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$

$\therefore$ La longitud mínima que la varilla puede tener es 360 cm (3.6 m)

Los pedazos que se puede obtener:

$\frac{360}{8} = 45$ pedazos de 8 cm

$\frac{360}{9} = 40$ pedazos de 9 cm

$\frac{360}{15} = 24$ pedazos de 15 cm

14. En el rancho San José hay un programa de vacunaciones para las tres especies de animales que viven ahí. Los bovinos cada seis meses; los porcinos cada cuatro meses, y los ovinos cada tres meses. Si el 10 de junio se iniciaron las vacunas de todas las especies, ¿a los cuántos meses volverán a vacunarse todas las especies juntas? Y ¿cuántas vacunas habrá recibido cada especie en ese tiempo?

$$\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & & 1 & \end{array}$$

el mcm $[6, 4, 3] = 2 \times 2 \times 3 = 12$

$\therefore$ Volverán a vacunarse todas las especies juntas a los 12 meses (en un año) Las vacunas que habrá recibido cada especie:

$\frac{12}{2} = 2$ vacunas a los bovinos

$\frac{12}{4} = 3$ vacunas a los porcinos

$\frac{12}{3} = 4$ vacunas a los ovinos

3.3. La poderosa herramienta del máximo común divisor (MCD)

Andrés, un estudiante del colegio Justo Sierra, tratando de obtener solución a un problema, le pidió asesoría a su maestro de matemáticas, preguntándole: "Profesor, ¿qué es el Máximo Común Divisor?"

El profesor respondió:

"El **máximo común divisor** (**mcd**) de **dos o más números**, como su nombre lo indica, es **el más grande de los divisores**, que es **común** a esos números; es decir, es **el número más grande que divide al mismo tiempo** a **todos los números en cuestión** (Aguilar et al., 2009. Baldor, 2019)".

Por ejemplo:

¿Cuál es el más grande divisor común de los números 40 y 50?

D(40): 1 , 2, 5, 8, 10, 20, 40
D(50): 1 , 2, 5, 10, 25, 50

La intersección entre estos dos conjuntos es: {1, 2, 5, 10}

Por lo tanto, el mcd de 40 y 50 es 10.

"¡Profesor! —dijo Andrés—, pero de esa forma es muy costoso calcular el mcd en números grandes ¿verdad?" El profesor le respondió: "Tienes razón, así como lo hemos hecho sería muy costoso, lo mismo si se tratara de varios números a la vez; sin embargo, existen **varios métodos** para determinar ese mcd. Te mostraré algunos que son muy usados para estos cálculos.

I. Por simple inspección

Este método funciona muy bien cuando los números en cuestión son pequeños y cual consiste en fijar la atención en el **número menor** de todos a los que se desea obtener el mcd. **Si éste divide a todos de manera exacta**, entonces **ese número** menor **será el mcd** (Baldor, 2019).

Por ejemplo:

1. ¿Cuál es el mcd de los números: 4, 8 y 12?

Solución:

Como el menor de estos números es 4, y éste divide de manera exacta al 8 y al 12, entonces el mcd es **4**.

2. Hallar el mcd [9, 27, 45]

Solución:
El menor de estos números es el 9, y éste divide exactamente a 27 y a 45, ya que es múltiplo de ellos; por lo tanto, el mcd [9, 27, 45] = **9**

3. Hallar el mcd [4, 12, 18]

Solución:
Por simple inspección nos damos cuenta de que el número menor (4), no divide de manera exacta al 18; por lo tanto, el 4 no es el mcd de estos tres números.

Después de plantear este tercer ejemplo, el maestro le explicó a Andrés: "Cuando nos encontramos con casos de este tipo, se recurre al **uso de otros métodos**; sin embargo —dijo—, no pretendo abrumarte con tantos métodos; más bien deseo proporcionarte herramientas prácticas que te permitan obtener al resultado que esperas, pues es lo que nos exige la vida real.

II. Por descomposición de factores primos

Este método consiste en **descomponer** los números en cuestión **en sus factores primos;** el mcd será **el producto de sus factores primos comunes** que tienen **menor exponente**.

Resolvamos los tres ejemplos utilizando este método.

1'. Hallar el mcd [4, 8, 12]

Solución:

4	$\div 2$
2	$\div 2$
1	

8	$\div 2$
4	$\div 2$
2	$\div 2$
1	

12	$\div 2$
6	$\div 2$
3	$\div 3$
1	

Los factores comunes de cada número, son los siguientes:

Factores comunes del 4: 2^2

Factores comunes del 8: 2^3

Factores comunes del 12: $2^2 \times 3$

Por lo tanto, el único factor común de estos tres números es el 2, y el de menor exponente, el 2^2; entonces, el mcd $[4, 8, 12] = 2^2 = \mathbf{4}$

2'. Hallar el mcd [9, 27, 45]

Solución:

9	$\div 3$
3	$\div 3$
1	

27	$\div 3$
9	$\div 3$
3	$\div 3$
1	

45	$\div 3$
15	$\div 3$
5	$\div 5$
1	

Los factores comunes de cada número son los siguientes:

Factores comunes del 9: 3^2

Factores comunes del 27: 3^3

Factores comunes del 45: $3^2 \times 5$

El factor común es el 3, y el de menor exponente el 3^2, así:

El mcd $[9, 27, 45] = 3^2 = \mathbf{9}$

3'. Hallar el mcd [4, 12, 18]

Solución:

4	$\div 2$
2	$\div 2$
1	

12	$\div 2$
6	$\div 2$
3	$\div 3$
1	

18	$\div 2$
9	$\div 3$
3	$\div 3$
1	

Los factores comunes de cada número son los siguientes:

Factores comunes del 4: 2^2

Factores comunes del 12: $2^2 \times 3$

Factores comunes del 18: 2×3^2

En este ejemplo también se registra un solo factor común, que es el 2, y el de menor exponente, el 2^1; por lo tanto, el mcd $[4, 12, 18] = \mathbf{2}$

Hemos resuelto tres ejercicios mediante **dos métodos distintos**; sin embargo, continuaremos trabajando con el segundo (**por descomposición de factores primos**), para aclarar que también se puede trabajar mediante la *observación* de la *descomposición de los factores primos. Aquel factor primo que se repita en todas las descomposiciones* formará el mcd, multiplicándose entre sí el número de veces que igualmente se repite en todos los números en descomposición (Aguilar et al., 2009). Resolvamos de nuevo el ejemplo 1.

1”. Hallar el mcd [4, 8, 12]

Solución:

4	$\div 2$	8	$\div 2$	12	$\div 2$
2	$\div 2$	4	$\div 2$	6	$\div 2$
1		2	$\div 2$	3	$\div 3$
		1		1	

Como puedes observar, el único factor primo común que se repite en las tres descomposiciones, es el 2, y se repite dos veces.

$$\text{Por lo tanto: el mcd } [4, 8, 12] = 2 \times 2 = 4$$

"Aún existe otro método —agregó el profesor—, al que algunos autores llaman **método abreviado**, que se basa en la **descomposición de factores primos**, con la diferencia de que aquí cada **factor primo** tiene que **ser común a todos los números** en cuestión. Veamos cómo funciona".

III. Método abreviado

Este método está basado en la **descomposición de factores primos**, pero, **dividiendo al mismo tiempo a todos los números en cuestión** por un **factor primo común**. Los **cocientes obtenidos así** se **vuelven a dividir por otro factor común, y así sucesivamente,** hasta que los cocientes ya no tengan un factor común; de esta manera, el **mcd será el producto de los factores primos comunes encontrados** (Aguilar et al., 2009).

Veamos algunos ejemplos:

1. Hallar el mcd [6, 12, 54]

Solución:

$$\begin{array}{ccc|c} 6 & 12 & 54 & \div 2 \\ \hline 3 & 6 & 27 & \div 3 \\ 1 & 2 & 9 & \end{array}$$

Los tres números son divisibles entre 2

Los tres números son divisibles entre 3

Ya no hay factor común entre los tres.

Los números 6, 12 y 54 tienen como primer factor primo común el 2, quedando como cocientes 3, 6 y 27. Éstos, a su vez, tienen otro factor común que es el 3, de los cuales se obtuvieron los cocientes 1, 2 y 9, que no tienen ningún factor común que los divida de forma exacta; por lo tanto:

$\text{mcd } [6, 12, 54] = 2 \times 3 = 6$

2. Hallar el mcd [4, 8, 12]

Solución:

$$\begin{array}{rrr|r} 4 & 8 & 12 & \div 2 \\ \hline 2 & 4 & 6 & \div 2 \\ 1 & 2 & 3 & \end{array}$$

$\therefore \text{ mcd } [4, 8, 12] = 2 \times 2 = \mathbf{4}$

3. Hallar el mcd [208, 910, 1 690]

Solución:

$$\begin{array}{rrr|r} 208 & 910 & 1690 & \div 2 \\ \hline 104 & 455 & 845 & \div 13 \\ 8 & 35 & 65 & \end{array}$$

El $\text{mcd } [208, 910, 1690] = 2 \times 13 = \mathbf{26}$

"¡Andrés! —replicó el profesor, dando las últimas explicaciones a su discípulo—, queda a elección del estudiante de esta disciplina optar por uno de los tres métodos; con el que mejor se acomode (**factores primos comunes de menor exponente** o el que **se repite en todas las descomposiciones** o el **método abreviado** para resolver cualquier planteamiento. El que a cada quien le sea más fácil de dominar; al final, los tres llegan al mismo resultado de forma rápida y segura.

Resolvamos otros ejemplos para un mayor dominio sobre el cálculo del mcd:

1. Hallar el mcd [170, 204]

Solución:

170	$\div 2$
85	$\div 5$
17	$\div 17$
1	

204	$\div 2$
102	$\div 2$
51	$\div 3$
17	$\div 17$
1	

Factores comunes del 170: $2 \times 5 \times 17$

Factores comunes del 204: $2^2 \times 3 \times 17$

En este caso, los factores comunes son el 2 y el 17, ya que se repiten en las dos descomposiciones:

$\therefore$ el mcd $[170, 204] = 2 \times 17 = \mathbf{34}$

Dicho de otra manera, los factores comunes que se repiten en ambas descomposiciones y que tienen el mínimo exponente son el 2 y el 17.

Por lo tanto, el mcd $[170, 204] = 2 \times 17 = \mathbf{34}$

2. Hallar el mcd [108, 420, 1 260]

Solución:

108	$\div 2$
54	$\div 2$
27	$\div 3$
9	$\div 3$
3	$\div 3$
1	

420	$\div 2$
210	$\div 2$
105	$\div 3$
35	$\div 5$
7	$\div 7$
1	

1260	$\div 2$
630	$\div 2$
315	$\div 3$
105	$\div 3$
35	$\div 5$
7	$\div 7$
1	

Observemos las **respuestas** de este ejemplo desde la perspectiva de los **tres métodos**:

a) Los factores comunes que se repiten en las tres descomposiciones son el 2, el 2 y el 3.

Por lo tanto, el mcd $[108, 420, 1260] = 2 \times 2 \times 3 = \mathbf{12}$

b) Los factores comunes de menor exponente son los siguientes:
Factores comunes del 108: $2^2 \times 3^3$
Factores comunes del 420: $2^2 \times 3 \times 5 \times 7$
Factores comunes del 1260: $2^2 2 \times 3 \times 5 \times 7$

Los de menor exponente: $2^2 \times 3$
El mcd $[108, 420, 1260] = 2^2 \times 3 = \mathbf{12}$

c) De la forma abreviada:

108420	1260	$\div 2$
54210	630	$\div 2$
27105	315	$\div 3$
9	35	105

Como los únicos factores comunes fueron el 2, el 2 y el 3, y los cocientes 9, 35 y 105 no tienen un factor común que divida a todos al mismo tiempo, el mcd $[108, 420, 1260] = 2 \times 2 \times 3 = \mathbf{12}$

3.3.1. El MCD en un contexto aplicado

1. Don Pedro tiene una parcela de 120 m de ancho y 500 m de largo. Desea seccionarla en parcelas cuadradas de máxima superficie para sembrar diferentes tipos de hortalizas. ¿Cuáles serán las dimensiones de estas parcelas para la siembra? No se considera ninguna separación entre las áreas seccionadas.

Solución:

120	500	$\div 2$
60	250	$\div 2$
30	125	$\div 5$
6	25	

mcd $[120, 500] = 2 \times 2 \times 5 = 20$

$\therefore$ Las dimensiones de las áreas para la siembra serán de $20 \times 20m$.

En total serán:

$\frac{120}{20} = 6$

$\frac{500}{20} = 25$

$6 \times 25 = 150$ áreas

2. Se desea dividir en áreas iguales dos terrenos, uno de 16 170 m^2 y otro de 15 730 m^2 de superficie, y saber:
a) ¿Cuál es la mayor superficie posible para cada una de las áreas?
b) ¿Cuántas áreas se obtendrán en cada caso?

Solución:

16170	15730	$\div 2$
8085	7865	$\div 5$
1617	1573	$\div 11$
147	143	

a) La mayor superficie de cada área será $= 2 \times 5 \times 11 = 110m^2$

b) El número de áreas que se obtendrán en cada caso:

$\frac{16170}{110} = 147$ áreas o parcelas

$\frac{15730}{110} = 143$ áreas o parcelas

3. Alberto tiene unas tablas que miden 240 cm, y otros 180 cm de longitud. Tiene la intención de fabricar estanterías del mayor ancho posible. ¿Cuál es la mayor longitud que se puede obtener para cada estante?

Solución:

240	180	$\div 2$
120	90	$\div 2$
60	45	$\div 3$
20	15	$\div 5$
4	3	

La mayor longitud que se puede obtener para cada estante, es:
$2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60cm$

Y se pueden obtener:
$\frac{240}{60} = 4$ secciones de las primeras tablas

$\frac{180}{60} = 3$ secciones de las segundas tablas

4. Zenón tiene un pliego de papel que mide 90 cm de ancho y 150 cm de base. Pretende cortarlo en cuadrados sin desperdiciar material. ¿Cuál es el mayor tamaño posible de los lados de los cuadrados que se pueden obtener?

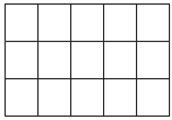
Solución:

90	150	$\div 2$
45	75	$\div 3$
15	25	$\div 5$
3	5	

El mayor tamaño posible de los cuadrados será:
$2 \times 3 \times 5 =$ **30 cm**

Se obtendrá un total de:
$\frac{90}{30} = 3$

$\frac{150}{30} = 5$



15 cuadrados de 30×30 cm

5. Dos rollos de listón miden 90 m y 135 m, respectivamente. Si se desea cortarlos en pedazos de la misma longitud y del mayor tamaño posible, ¿cuál debe ser la medida de cada pedazo y cuántos pedazos se obtendrán en total?

Solución:

$$\begin{array}{cc|c} 90 & 135 & \div 3 \\ \hline 30 & 45 & \div 3 \\ 10 & 15 & \div 5 \\ 2 & 3 & \end{array}$$

La medida de cada pedazo será: $3 \times 3 \times 5 = \mathbf{45\ m}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{90}{45} = 2 \\[2ex] \frac{135}{45} = 3 \end{array}\right\rangle \text{5 pedazos}$$

6. Joaquín recibe tambos de aceite con diferentes capacidades; unos de 250 litros, otros de 360 litros y otros más de 540 litros. Para comercializar el aceite, pretende depositarlo en garrafas de la misma capacidad:

a) ¿Cuál será la mayor capacidad posible de las garrafas?

b) ¿Cuántas garrafas obtendrá de cada uno de los tambos?

Solución:

$$\begin{array}{rrr|l} 250 & 360 & 540 & \div 2 \\ \hline 125 & 180 & 270 & \div 5 \\ 25 & 36 & 54 & \end{array}$$

a) La mayor capacidad de las garrafas será de $2 \times 5 =$ **10 litros**

b) Joaquín obtendrá:

$\frac{250}{10} = 25$ garrafas de los tambos de 250 L.

$\frac{360}{10} = 36$ garrafas de los tambos de 360 L.

$\frac{540}{10} = 54$ garrafas de los tambos de 540 L.

Donde: L = litros

7. David tiene dos piezas de vinil: una mide 54 m y la otra 180 m de longitud. Él deberá elaborar anuncios de igual longitud del mayor tamaño posible:

a) ¿Cuál será la longitud de cada anuncio?
b) ¿Cuántos anuncios podrá hacer David?

Solución:

$$\begin{array}{rr|l} 54 & 180 & \div 2 \\ \hline 27 & 90 & \div 3 \\ 9 & 30 & \div 3 \\ 3 & 10 & \end{array}$$

a) La longitud de cada anuncio será de $2 \times 3 \times 3 =$ **18 m**
b) Podrá hacer:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{54}{18} = 3 \\ \\ \frac{180}{18} = 10 \end{array}\right\rangle \text{13 anuncios}$$

8. Un bloque de piedra de 108 cm por 144 cm por 180 cm se dividirá en bloques cúbicos. Se desea saber:

a) ¿Cuál es la mayor longitud posible de las aristas de los cubos que se pretende obtener, si se desea evitar el desperdicio del material?

b) ¿Cuántos cubos se obtendrán?

108	144	180	$\div 2$
54	36	45	$\div 2$
27	36	45	$\div 3$
9	12	15	$\div 3$
3	4	5	

a) La mayor longitud posible de las aristas de los cubos será de $2 \times 2 \times 3 \times 3 =$ **36 cm**

b) Se obtendrán:

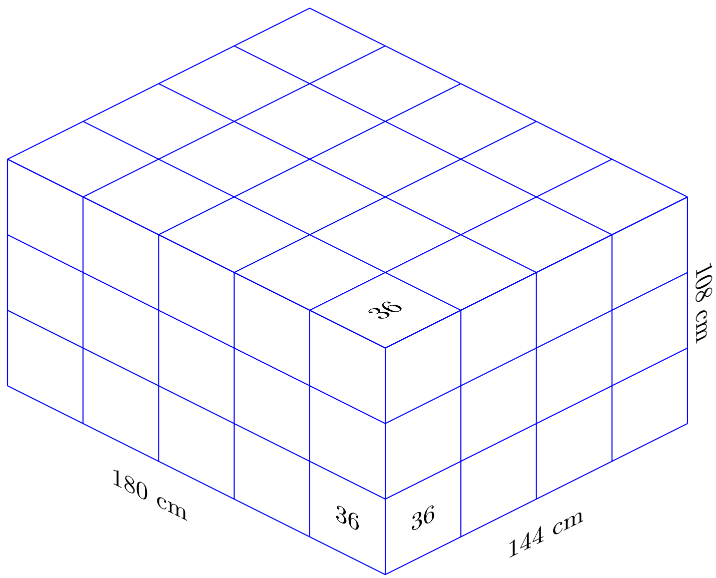
$$\frac{108}{36} = 3$$

$$\frac{144}{36} = 4 \qquad 60 \text{ cubos}$$

$$\frac{180}{36} = 5$$

El bloque de piedra seccionada quedaría como se ilustra en la figura 11.

Figura 11. *Ilustración del planteamiento 8*



9. Verónica desea empacar 200 naranjas y 275 manzanas en cajas que contengan el mismo número de las primeras y la misma cantidad de las segundas. ¿Cuántas cajas necesitará para lograr su objetivo?

Solución:

200	275	$\div 5$
40	55	$\div 5$
8	11	

$5 \times 5 = 25$ frutos por caja

El número de cajas que se necesitan será:

$\frac{200}{25} = 8$ cajas para las naranjas $\}$ 19 cajas en total

$\frac{275}{25} = 11$ cajas para las manzanas

10. Una sala mide 600 cm por 924 cm. Allí se desea colocar un piso de loseta cuadrada, de manera que no se requiera cortar las piezas. ¿Cuál es el mayor tamaño posible que deben medir las losetas?

Solución:

$$\begin{array}{rr|l} 600 & 924 & \div 2 \\ \hline 300 & 462 & \div 2 \\ 150 & 231 & \div 3 \\ 50 & 77 & \end{array}$$

El mayor tamaño de las losetas será de $2 \times 2 \times 3 =$ **12 cm** $\times$ **12 cm**

11. Un padre reparte los gastos de la semana (lunes a sábado) a tres de sus hijos, de manera que todos deben gastar la misma cantidad diariamente. Al primero le da 84 dólares; al segundo, 72 dólares, y al menor, 60 dólares. Para el control de sus finanzas el padre desea saber:

a) ¿Cuál es la mayor cantidad que podría gastar diario cada uno?
b) ¿Cómo le fue a cada hijo con el dinero que recibió?
c) ¿Cuáles serán los gastos semanales del padre con sus tres hijos?
d) Si se junta todo el dinero, ¿para cuántos días alcanzaría?

Solución:

84	72	60	$\div 2$
42	36	30	$\div 2$
21	18	15	$\div 3$
7	6	5	

a) La mayor cantidad que pueden gastar: $2 \times 2 \times 3 =$ **12 dólares diarios cada uno**

b) En seis días, cada hijo gastó:

12×6 días = **72 dólares** cada uno
Al 1° le sobraron 12 dólares
El 2° gastó justo lo que recibió
Al 3° le faltaron 12 dólares

c) Los gastos semanales del padre serán: $72 \times 3 =$ **216 dólares.**

d) Si reúne todo el dinero: $84 + 72 + 60 = 216$ dólares le alcanzaría para:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{84}{12} = 7 \\ \\ \frac{72}{12} = 6 \\ \\ \frac{60}{12} = 5 \end{array}\right\} \text{18 días}$$

12. Se tienen tres cajas que contienen 1 600, 2 000 y 3 392 libras de jabón, respectivamente. El jabón de cada caja está dividido en bloques del mismo peso y del mayor posible. ¿Cuánto pesa cada bloque y cuántos bloques hay en cada caja?

Solución:

$$\begin{array}{rrr|l} 1600 & 2000 & 3392 & \div 2 \\ \hline 800 & 1000 & 1696 & \div 2 \\ 400 & 500 & 848 & \div 2 \\ 200 & 250 & 424 & \div 2 \\ 100 & 125 & 212 & \end{array}$$

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

Cada bloque pesa **16 libras.** Hay:

$\frac{1600}{16} = 100$ bloques en la $1^{\underline{a}}$ caja

$\frac{2000}{16} = 125$ bloques en la $2^{\underline{a}}$ caja

$\frac{3392}{16} = 212$ bloques en la $3^{\underline{a}}$ caja

Ejercicios. Pon a prueba tus conocimientos y resuelve los planteamientos que se proporcionan a continuación, aplicando los métodos del mcd.

1. Una pequeña empresa que vende leche cuenta con tres sucursales en la ciudad: una en el norte, otra en el sur y otra más en el este. Sabemos que la sucursal del norte produce 300 bidones de leche diarios; la del sur 240, y la del este 360. Se quiere transportar estos bidones de leche en camionetas que lleven el mismo número de bidones, pero que sea el mayor número de bidones posible. ¿Cuántos bidones de leche debe transportar cada camioneta?

2. Un pequeño acuario cayó en bancarrota, por lo que otros acuarios van a comprarle los peces que le quedaron. En total, se venderán 48 peces payaso, 60 peces globo, 36 tiburones bebés, 24 pulpos y 72 peces león. Para la venta, se desea que los contenedores sean del mismo tamaño y que alberguen la mayor

cantidad de animales posible. Además, en cada contenedor sólo puede haber peces de una única especie ¿Cuántos peces debe haber por contenedor y cuántos contenedores se necesitan para cada especie?

3. Tres estudiantes amigos cursan inglés en la misma escuela y en el mismo horario, sólo que el primero asiste a clases cada tres días, el segundo cada dos días y el tercero cada cuatro días. Si el lunes 1° de mayo iniciaron el curso juntos, ¿a los cuántos días volverán a verse en el salón los tres?

4. A una papelería hicieron un pedido de 140 lápices, 84 libretas y 76 agendas. Se desea distribuir el pedido de manera equitativa en el mayor número posible de cajas para su envío. ¿En cuántas cajas cabe dicho envío?

5. ¿Cuál será la menor capacidad que debe tener un contenedor que recibe la leche de tres ranchos ganaderos, los cuales cuentan con una producción y una conducción de la leche de manera automatizada hacia donde se ubica el contenedor, cuando el primer rancho envía 180 l cada hora, el segundo 120 l y el tercero 95 l. Si llegara haber alguna falla en el sistema automatizado en cualquiera de los ranchos, ¿en qué tiempo llenará el contenedor cualquiera de los tres ranchos?

6. En Navidad, una empresa desea elaborar canastas con 30 cajas de peras, 50 de uvas y 24 de manzanas. Se van a formar canastas con la misma cantidad de frutas y con la mayor cantidad posible de producto ¿Cuántas canastas se pueden formar?

7. La mascota de Lorena, un canino *french poodle,* enfermó gravemente y el veterinario le asignó un tratamiento combinado de dos tipos de pastillas y unas inyecciones de un mismo

tipo. La primera pastilla debe suministrársele cada tres horas; la segunda, cada cuatro horas, y las inyecciones cada seis horas. Al inicio, el veterinario le suministró todos los medicamentos al mismo tiempo, cuando eran las 10:00 horas, y las siguientes Lorena se encargará de hacerlo siguiendo las indicaciones anteriores. ¿A las cuántas horas volverán a coincidir las aplicaciones de los tres medicamentos juntos?

8. Luis dispone de dos tiras de madera iguales, pero de longitudes 150 y 175 centímetros. Si tiene que cortarlas en tramos iguales, de manera que obtenga el máximo número posible de tramos, ¿cuántos tramos debe cortar y cuánto deben medir?

9. Martha quiere comprar lápices de colores verde y morado. Los lápices verdes vienen en cajas de 100 unidades, mientras que los morados vienen en cajas de 40. ¿Cuál es el mínimo número de cajas de cada color que debe comprar Martha para tener el mismo número de lápices de ambos colores?

10. Antonio tiene 70 kg de cemento y 240 kg de arena y quiere preparar sacos iguales con la misma proporción de cemento y arena para guardarlos en el trastero, pero desea comprar el mínimo número posible de sacos. ¿Cuántos sacos debe comprar?

11. Si los tornillos se venden en cajas de 50 unidades y las tuercas en cajas de 45, ¿cuántas cajas de cada material se tienen que comprar para tener una rosca por cada tornillo?

12. Hugo quiere renovar el piso de un corral para cerdos tipo rectangular, que tiene las dimensiones 3.6 por 2.4 m, utilizando losetas de barro cuadradas lo más grandes posible. ¿De qué tamaño serán y cuántas losetas se necesitan?

3.4. Proporcionalidad directa e inversa

La **antesala** para adentrarse a la técnica de la ***regla de tres***, es tener en cuenta lo que son las **razones** y las **relaciones de proporcionalidades,** directas e inversas.

a) Una función de **proporcionalidad directa** se da cuando *dos conjuntos de cantidades son directamente proporcionales,* de manera que *al aumentar o disminuir una de ellas, la otra lo hace de igual manera y en la misma proporción.*

Su expresión matemática es la siguiente:

$$y = kx$$

En la que k es la constante de proporcionalidad que indica la cantidad por la que hay que multiplicar a x, para obtener a y (https://www.sangakoo.com/es/temas/repartos-proporcionalesdirectos-e-inversos).

Un ejemplo de lo anterior se muestra en la Tabla 11, donde se presentan diferentes **cantidades** de aceite sintético que se usa en los motores de camiones pasajeros de una línea de servicio y el **costo**. El litro de este aceite se cotiza en $140.

TABLA 11. *Ejemplos*

Cantidad (l)	Costo ($)
0.5	70
1	140
2	280
3	420
4	560
5	700

En la tabla se observa que si los **litros aumentan**, también **aumenta** el **costo**, en la **misma proporción**; por lo que hay una **relación directa de dependencia**: ***relación de proporcionalidad directa,*** que se puede expresar como una razón entre dos magnitudes, es este caso, **cantidad** y **costo**.

$$\frac{70}{0.5} = \frac{140}{1} = \frac{280}{2} = \frac{420}{3} = \frac{560}{4} = \frac{700}{5} = 140$$

En todos los casos, las razones son equivalentes y la *constante de proporcionalidad* directa es **140**.

Por lo tanto, *cuando el cociente o razón entre dos magnitudes es constante, se afirma que las magnitudes son directamente proporcionales.*

b) Una relación de **proporcionalidad inversa** se da *cuando dos conjuntos de cantidades se relacionan de manera inversa, de tal forma que al aumentar una de ellas, la otra lo hace de manera inversa en la misma proporción*; es decir, si los valores de x aumentan, los valores de y disminuyen en la misma proporción, y viceversa.

Su expresión matemática es la siguiente:

$$y = \frac{k}{x}$$

Ya que el **producto de las cantidades correspondientes** es una **constante**; es decir, el producto de los factores es la constante $\boldsymbol{k}$. $\Rightarrow xy = k$ (`https://shre.ink/Mqcs`).

Un ejemplo de este caso es el que se le presenta al señor Pablo. Él llena una pileta todos los días para dar de beber a sus animales. Sin embargo, tiene el inconveniente de que a la única llave con la que cuenta le lleva 12 horas realizar ese llenado, por lo que desea aumentar el número de llaves para minimizar el tiempo de dicho llenado. En la Tabla 12 se presentan los datos del comportamiento del llenado de la pileta: al aumentar el número de llaves se optimiza el tiempo.

Tabla 12. *Tiempo de llenado de una pileta con respecto al número de llaves*

Número de llaves	Tiempo de llenado (horas)
1	12
2	6
3	4
4	3
5	2.4
6	2
7	1.71
8	1.5
9	1.33
10	1.2
11	1.1
12	1

En esta tabla se observa que si el número de llaves aumenta, disminuye el tiempo de llenado de manera proporcional. Hay que hacer notar que existe un producto constante entre el número de llaves y el tiempo de llenado:

$$\begin{gathered}
1 \times 12 = 12 \\
2 \times 6 = 12 \\
3 \times 4 = 12 \\
4 \times 3 = 12 \\
5 \times 2.4 = 12 \\
6 \times 2 = 12 \\
7 \times 1.71 = 12 \\
8 \times 8.5 = 12 \\
9 \times 1.33 = 12 \\
10 \times 1.2 = 12 \\
11 \times 1.1 = 12 \\
12 \times 1 = 12
\end{gathered}$$

Todos los productos anteriores son equivalentes, por lo que la **constante de proporcionalidad inversa** es **12** (número de llaves por tiempo de llenado = 12).

De esta forma, se afirma que *cuando el* ***producto*** entre los valores de **dos magnitudes** es **constante**, las magnitudes son **inversamente proporcionales** (`https://shre.ink/Mqcd`).

Veamos otro ejemplo aplicado.

Elías, con su experiencia como pintor de casas, dice que pinta una casa en tres días. Al contratarlo le preguntaron: "¿En cuánto tiempo pintaría dos casas del mismo tamaño que usted refiere, si trabajan cuatro personas, considerando que todos trabajan al mismo ritmo? Hay que ayudar a Elías a dar una respuesta (véase la tabla 13).

TABLA 13. *Relación días de trabajo y número de personas*

Elaborando primeros resultados

Personas	*Días de trabajo para una casa*
1	3
2	1.5
3	1
4	0.75
5	0.6
6	0.5

Personas	Días de trabajo para dos casas
1	6
2	3
3	2
4	1.5

En la primera tabla la constante es 3, y en la segunda es 6. De acuerdo con la expresión $y = \frac{k}{x}$, la respuesta en la primera tabla se encuentra dividiendo la constante $k = 3$ entre cada número de personas. Partiendo de que sólo don Elías pinta una casa en tres días y luego $\frac{3}{2} = 1.5$, $\frac{3}{3} = 1$ y $\frac{3}{4} = 0.75$, este último cociente multiplicado por 2 (dos casas) será la respuesta de don Elías, es decir, $0.75 \times 2 =$ **1.5 días**, día y medio **para pintar dos casas entre cuatro personas.**

Con base en la segunda tabla, el resultado se encuentra de manera directa: cuatro personas pintarán las dos casas en **1.5 días**, que es lo mismo que $\frac{6}{4} = 1.5$ días, es decir, la constante $k = 6$ entre el valor de $x = 4$ (número de personas).

Ahora que ya se le ayudó a Elías a proporcionar una respuesta, se ha hecho un repaso de las proporcionalidades. De esta forma se está listo para adentrarse al tema de la **regla de tres** y sus variaciones.

3.5. La regla de tres simple

Los procedimientos que se han descrito antes para resolver problemas de proporcionalidad se pueden sintetizar en una regla muy conocida y usada por muchos, denominada *regla* *de tres simple*, *regla de tres cantidades* o, simplemente, *regla de tres*.

En esta regla se establece una relación de linealidad proporcional en la que hay tres valores conocidos y uno desconocido, el cual es la incógnita.

La *regla de tres* se puede aplicar en la solución de problemas, en tres formas diferentes:

- Regla de tres simple directa
- Regla de tres simple inversa
- Regla de tres compuesta

(Aguilera et al., 2009).

3.5.1. La regla de tres simple directa

Este procedimiento permite calcular el valor de una cantidad desconocida, conociendo otras tres cantidades que están relacionadas entre sí. Cabe mencionar que la regla de tres simple directa forma una proporción de dos razones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Que se lee: "a es a b, como c es a d" (Aguilera et al., 2009).

Ejemplos:

1. La masa de 4 litros de miel es de 5.8 kg. ¿Cuál es la masa de 11 litros de miel?

Solución: Antes de iniciar con los cálculos, el primer análisis que se debe hacer es verificar que ciertamente se trata de una proporcionalidad directa y no inversa (Tabla 14).

Tabla 14. *Datos del planteamiento 1*

Litros (l)	4	11
Masa (kg)	5.8	x

Hay que recordar que la *proporcionalidad directa* se produce cuando *al aumentar una de las variables, la otra lo hace igual también de manera proporcional*; en este caso se observa que al *aumentar los litros*, *aumenta también la masa*; por lo tanto, sí se trata de una ***proporcionalidad directa***. Algunos trabajan esta proporcionalidad directa igualando las razones:

$\frac{x}{11} = \frac{5.8}{4}$ que se lee *"equis es a 11 como 5.8 es a 4"*

Otros la abordan en expresión lineal:

x : 11 :: 5.8 : 4 que se lee de la misma forma *"equis es a 11 como 5.8 es a 4"*

De las dos formas se obtendrá la ecuación: $4x = 5.8 \times 11$, de donde se obtiene la respuesta a la pregunta:

$x = \frac{5.8 \times 11}{4}$ =**15.95 kg**, en **11 litros** de miel hay **15.95 kg**

Al estudiar la proporcionalidad directa, se propone al estudiante, con base en la experiencia, que utilice una técnica de relación de proporcionalidad de la siguiente forma:

De manera directa, tal como se plantea en el problema:

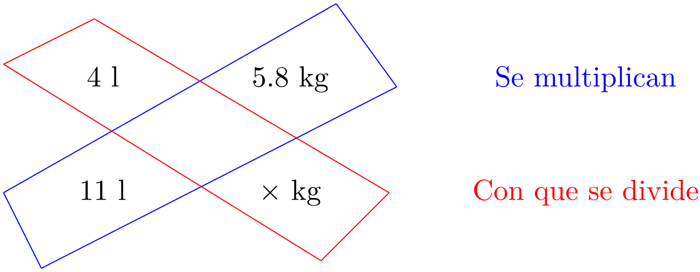
$\boxed{\text{4 l}} \longrightarrow \boxed{\text{5.8 kg}}$ "4 litros es a 5.8 kg", como:

$\boxed{\text{11 l}} \longrightarrow \boxed{\times \text{ kg}}$ "11 litros ¿a cuántos kg es?"

La idea es:

Litros debajo de litros	Kilogramos debajo de kilogramos

Luego se multiplican de manera cruzada:



Se multiplican los términos cruzados que contienen dos datos (11 y 5.8) y el producto resultante se divide entre los términos cruzados que contienen un dato (4) y el valor faltante (la incógnita). El producto y el cociente será el valor de la incógnita (x); es decir:

$$\frac{11\times5.8}{4} = x$$
$$\therefore x = 15.95 \text{ kg}$$

2. El señor Omar fertilizó con 400 kg de sulfato de amonio dos hectáreas de maíz. Suponiendo que aplicará la misma proporción en las restantes 5.7 ha que están pendientes por fertilizar, ¿cuántos kg necesitará para realizar esa actividad?

Solución:
El problema es de proporcionalidad directa, ya que al aumentar la superficie, también aumentará la cantidad de fertilizante. Se propone:

400 kg   2 ha divide. "400 es a 2", como

x kg   5.7 ha se multiplican "5.7 a cuánto es"

$$\frac{400 \times 5.7}{2} = x$$

$\therefore x = 1140$ kg de sulfato de amonio para las restantes 5.7 ha

> NOTA: También se pueden acomodar los datos para expresar el problema: si fueron 400 kg para 2 ha, entonces se necesitarán 200 kg para 1 ha, de manera que para 5.7 ha basta con multiplicar: $200 \times 5.7 = 1140$ kg; esto es, haciendo uso de la constante de proporcionalidad.

> NOTA: La regla de tres simple directa afortunadamente permite acomodar de muchas formas los datos para llevar a cabo los cálculos.

3. En su entrenamiento un ciclista recorre 12 km en donde horas, manteniendo la misma velocidad. ¿Qué distancia recorrerá en $4\frac{3}{5}$ horas?

Solución:

Los $4\frac{3}{5} = 23/5 = 4.6$ horas
Por lo tanto:

$$\begin{array}{ccc} 12 \text{ km} & & 2 \text{ h} \\ & & \\ x \text{ km} & & 4.6 \text{ h} \end{array}$$

$\frac{12 \times 4.6}{2} =$**27.6 km** en 4.6 h

4. Los $\frac{3}{5}$ de capacidad de un tinaco de agua son 2 400 litros. ¿Cuál será la capacidad de $\frac{7}{8}$ del mismo tinaco?

Solución:

Observe que $\frac{3}{5} < \frac{7}{8}(0.6 < 0.875)$; por lo tanto, habrá un crecimiento proporcional en la capacidad del tinaco. Así:

$$\begin{array}{cc} 0.6 & 2{,}400\ 1 \\ 0.875 & x1? \end{array}$$

$$\frac{0.875 \times 2400}{0.6} = 3,5001$$

5. Un ciclista avanza con una velocidad de 42 km/h. ¿En cuánto tiempo recorrerá 120 km?

Solución:

$$\begin{array}{cc} 42 \text{ km} & 1 \text{ h} \\ 120 \text{ km} & \text{xh?} \end{array}$$

$\frac{120 \times 1}{42}$ =**2.857 h** = **2 h** con **51.4 min**.

Ejercicios. Pon a prueba tus conocimientos resolviendo los planteamientos que se proporcionan a continuación, aplicando la técnica de la *regla de tres simple directa.*

1. Entre dos máquinas sembradoras de arroz, siembran cinco hectáreas por jornal. Entre cinco máquinas, ¿cuántas hectáreas sembrarán?

2. La descomposición bacterial de un alimento alcanza 20 % en 30 minutos. ¿En qué tiempo estará completamente descompuesto ese alimento?

3. Si 15 bombas de mochila con motor cuestan \$34 500, ¿cuánto se debe pagar por siete bombas del mismo tipo?

4. Isabel recibió \$3 852 por 180 dólares. ¿Cuánto recibirá Andrés si cambia en ese mismo día y en ese mismo banco 820 dólares?

5. Se prepara un platillo para 24 personas invitadas a una reunión, para lo cual se necesitan 3.4 kg de papas. Si la mitad de las personas avisan que asistirán acompañados con su pareja, ¿cuántos kilogramos de papas se necesitarán?

3.5.2. La regla de tres simple inversa

La regla de tres simple inversa es un procedimiento que permite calcular el valor faltante de una proporción de dos razones, cuando se conocen tres cantidades que están relacionadas y falta una cuarta cantidad por conocer (la incógnita).

La diferencia respecto de la regla de tres simple directa es que en ésta (la inversa) se multiplican los dos factores de la primera razón y el producto se divide entre el valor de la razón incompleta, ya que el producto de las cantidades correspondientes es la constante de proporcionalidad; es decir, el producto de los factores es la constante $\boldsymbol{k}$.

$$\mathbf{xy=k}$$

Expresado de manera más sencilla, una proporcionalidad inversa ocurre cuando:

- Al **aumentar** un valor dado, el otro **disminuye** en la **misma proporción**.
- Al **disminuir** un valor dado, el otro **aumenta** en la **misma proporción.**

(https://bit.ly/3Gd56ql). Con los ejemplos que siguen, se tendrá una mejor comprensión de esta regla.

1. José y Ciro son pintores de casas que tienen la misma habilidad y calculan que pintar la fachada de una casa de dos pisos les llevará nueve días. Para terminar el trabajo más rápido, contrataron a otra persona con la misma eficiencia que la suya. **¿Cuántos días emplearán los tres para terminar el trabajo?**

Solución: Observarse que el número de personas y los días que lleva pintar la fachada de la casa son magnitudes inversamente proporcionales, ya que al **aumentar** el número de personas **disminuyen** los días de trabajo (Tabla 15).

TABLA 15. *Información del planteamiento 1*

Número de personas	2	3
Días empleados	9	x

Cumpliendo con la función $xy = k$, se establece la relación:

$$2 \times 9 = 3x$$

Por lo tanto: $x = \frac{2\times 9}{3}$=**6 días** les llevará terminar el trabajo entre las tres personas.

Otra forma de manejar la información es ésta:

$\boxed{\text{2 personas} \longrightarrow \text{9 días}}$ se multiplican

$\boxed{\text{3 personas} \longrightarrow \text{x días}}$ divide

Los cálculos obedecen la misma razón por tratarse de un problema de proporcionalidad inversa:

$2 \times 9 = 3x$; por lo tanto, $\frac{2 \times 9}{3} = \mathbf{6}$ **días**

Se deja a elección del estudiante la forma en la que quiera manejar la información, pero que, sobre todo, desarrolle la habilidad para realizar los cálculos correspondientes.

2. Una llave vierte 2.8 litros de agua por minuto y tarda dos horas en llenar un estanque. **¿Cuántas horas tardaría en llenar el mismo estanque si la llave vertiera siete litros por minuto?**

Solución:
Observe que a mayor capacidad de la llave, menor tiempo de llenado, pues se trata de magnitudes inversamente proporcionales (Tabla 16).

Tabla 16. *Datos del planteamiento 2*

Litros por minuto (1/min)	2.8	7
Tiempo de llenado (h)	2	x

Por lo que: $\frac{2.8 \times 2}{7}$ **0.8 h = 48 min**.

3. Una máquina sembradora para maíz con cuatro dosificadores (cuatro agujeros), tarda 1.5 horas en sembrar dos hectáreas. Si a la sembradora se le agregan dos dosificadores más, ¿qué tiempo tardará en sembrar las dos hectáreas?

Solución: Al aumentar el número de agujeros dosificadores, disminuirá el tiempo de sembrado (Tabla 17).

Tabla 17. *Datos del planteamiento 3*

Número de dosificadores	4	6
Tiempo de siembre (h)	1.5	x

Por lo tanto: $\frac{4\times1.5}{6} = \mathbf{1\ h.}$

4. En una pizzería se tiene como meta la entrega de 20 pizzas en una hora si laboran tres empleados. Queriendo minimizar el tiempo de entrega a 45 minutos, ¿cuántos empleados (Tabla 18) deberían laborar para alcanzar ese objetivo?
Solución:

TABLA 18. *Datos del planteamiento 4*

Número de empleados	3	X
Tiempo de entrega (h)	1	0.75

Así: $\frac{1\times3}{0.75} =$ **4 empleados**

5. Benito viaja de su casa a su trabajo a una velocidad de 80 km/h de manera constante y emplea una hora con 30 minutos en llegar. La próxima vez que viaje tendrá una reunión de trabajo al llegar. Para ser puntual, desea hacer su viaje en sólo una hora. ¿Cuál será la velocidad a la que debe viajar para alcanzar su meta?

Solución:

$$\begin{array}{ll} 80 \text{ km/h} & 1.5\text{h} \\ x \text{ km/h} & 1\text{h} \end{array}$$

$$\text{Así } \frac{80\times1.5}{1} = \mathbf{120\ km/h.}$$

Ejercicios. Pon a prueba tus conocimientos resolviendo los planteamientos que se proporcionan a continuación, aplicando la técnica de la *regla de tres simple inversa.*

1. Entre ocho trabajadoras domésticas asean un edificio y tardan dos días en terminar el trabajo. ¿Cuántos días tardarían en hacerlo 15 trabajadoras?

2. Un estanque se llena con una llave que vierte un determinado caudal y tarda 50 minutos en hacerlo. ¿Cuántos minutos tardaría en llenarse dicho estanque con tres llaves que vierten el mismo caudal?

3. Un tractor, trabajando a ¾ de su capacidad, tarda dos horas en arar una parcela. Si aumenta su capacidad al 100 %, ¿en cuánto tiempo arará dicha parcela?

4. En una planta embotelladora de agua se envasan 1 600 botellas con una capacidad de 1.25 litros cada una. Si se desea envasar la misma cantidad de agua en botellas de 2.5 litros, ¿cuántas botellas se necesitarán?

5. Una llave con un determinado caudal tarda 30 minutos en llenar un depósito. ¿Cuántos minutos tardaría en llenarse el depósito con tres llaves que vierten el mismo caudal?

3.5.3. La regla de tres compuesta

Haciendo un recordatorio, la **regla de tres simple *relaciona dos magnitudes proporcionales***, cuya ***proporcionalidad*** puede ser ***directa*** o ***inversa***.

La **regla de tres compuesta *relaciona tres o más magnitudes*** que pueden ser ***directas*** o ***inversamente proporcionales***.

En los planteamientos pueden presentarse solamente relaciones de *proporcionalidad directa*, *inversa* o *mixta*. Es claro que en la mayoría de los problemas en los que se relacionan variables de la vida, siempre se presentan relaciones de proporcionalidad mixta (directa e inversa al mismo tiempo). A continuación veremos ejemplos de los tres tipos (Baldor, 2019. Véase `https://shre.ink/Mqcm`).

La forma en que se trabajan estos planteamientos es la siguiente: primero se identifican las relaciones entre las magnitudes conocidas con la incógnita y luego se determina la correspondencia entre ellas.

La metodología sobre el se explica en los siguientes ejemplos, cuyos planteamientos involucran tres o más magnitudes.

Ejemplos:

1. Se sabe que cinco botellas de agua, de dos litros cada una, pesan 11.5 kilogramos. ¿Cuánto pesan dos botellas de tres litros cada una?

Solución: Se tienen tres magnitudes que son: *botellas*, *litros* y *kilogramos*. Las relaciones entre ellas son las siguientes:

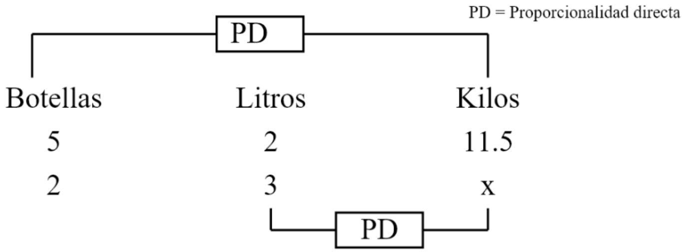
Botellas	Litros	Kilos
5	2	11.5
2	3	x

NOTA: La dirección de las flechas es para señalar si la magnitud aumenta o disminuye.

Ahora hay que *relacionar* las *magnitudes conocidas* y la *magnitud de la incógnita x*.

- Comparando **botellas** con **kilos**: si hay ***menos*** botellas, pesarán ***menos***. Esto es **proporcionalidad directa**.
- Comparando **litros** con **kilos**: si hay ***más*** litros, pesarán ***más***. Esto es **proporcionalidad directa**.

Ahora se escriben las relaciones en forma de fracciones para poder despejar la incógnita x: se recomienda que *la primera*



fracción que se escriba sea donde está la incógnita (esto no es estrictamente así; sin embargo, facilita los cálculos). *Luego se iguala a la multiplicación de las dos fracciones que se forman con los datos restantes.*

Los cálculos se pueden realizar de las dos formas que se describen a continuación con las cuales se obtiene el mismo resultado, como en este caso que se tienen dos proporcionalidades directas:

---

a) $\frac{11.5}{x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3}$

$\frac{11.5}{x} = \frac{10}{6}$

$x = \frac{11.5 \times 6}{10}$

$x = 6.9kg$

b) La forma más cómoda para el despeje de la variable, es la siguiente:

$\frac{x}{11.5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2}$ Donde primero va la incógnita.

$\frac{x}{11.5} = \frac{6}{10}$

$x = \frac{6 \times 11.5}{10}$

$x = 6.9kg$

Por lo tanto, si cinco botellas de dos litros cada una pesaron 11.5 kg, entonces dos botellas de tres litros cada una pesarán $6.9kg \approx 7kg$.

2. En la pastelería Onomástico laboran nueve personas que, trabajando ocho horas, producen 150 pasteles de las mismas características. ¿Cuántas horas necesitan 12 trabajadores de igual eficiencia para producir 375 pasteles del mismo tipo?

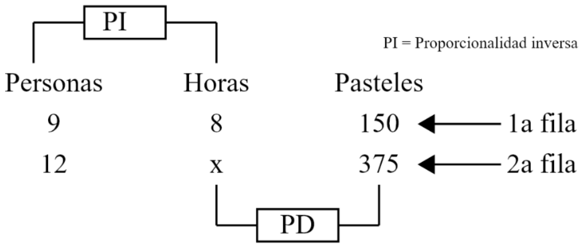
Solución: Primero identificamos las magnitudes: *personas*, *horas* y *pasteles*, de las cuales la magnitud *horas* es la incógnita.

La relación entre estas magnitudes es la siguiente:

Personas	Horas	Pasteles
9	8	150
12	x	375

Relacionando las *magnitudes conocidas* y la *magnitud de la incógnita*:

• **Personas** con **horas**: si hay ***más*** personas trabajando, necesitarán ***menos*** tiempo. Esto es **proporcionalidad inversa**.
• **Pasteles** con **horas**: si se elaboran ***más*** pasteles, se necesitarán ***más horas***. Esto es **proporcionalidad directa**.



Observe que en este planteamiento se presenta una **proporcionalidad directa** y una **proporcionalidad inversa**. En casos como éste, las relaciones con fines de cálculo se pueden abordar de varias formas.

Tomando las relaciones por filas:

Para la 1ª fila: $\frac{8}{150} \times 9$
Para la 2ª fila: $\frac{x}{375} \times 12$

> En el ejemplo 1 se tomó de manera directa por tratarse de dos proporcionalidades directas; o sea, por columnas.

En seguida se **igualan** las relaciones, colocando primero la razón donde se ubica la incógnita, y se realizan los cálculos hasta obtener el valor de la variable:

$\frac{x}{375} \times 12 = \frac{8}{150} \times 9$

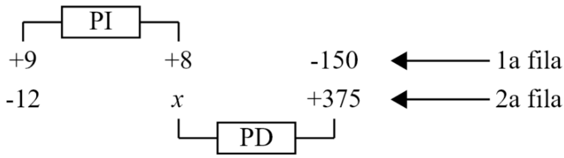
$x \times 12 = \frac{72}{150} \times 375$

$x = \frac{180}{12}$

x=**15 horas**, tiempo que necesitan nueve personas para preparar 375 pasteles.

Otra forma de tomar las relaciones:

Se colocaa un signo + al número de la primera fila y un signo − al primer número de la segunda fila, si la relación de proporcionalidad es *inversa* (9 y 12), y un signo − y un signo + a la siguiente magnitud (150 y 375), si es *directa*. De forma automática se le asigna el signo + al valor de la relación de la incógnita (8). Como se observa en la siguiente descripción:



La incógnita se iguala al cociente formado por el producto de los valores con signo +, dividido por los valores con signo −:

$$x = \frac{9 \times 8 \times 375}{12 \times 150} = \mathbf{15\ horas}$$

> NOTA: esta técnica consiste en colocar un signo a los números de acuerdo con el tipo de proporcionalidad. Al formular la ecuación, queda despejada la variable y ya no hay necesidad de hacer otras maniobras algebraicas para el despeje; de esta manera, el cálculo se facilita.

Otra forma:

Establezca las relaciones de manera *directa* para las *proporcionalidades directas,* e *invertida,* para las *proporciones inversas* (denominador como numerador y numerador como denominador). A saber:

PI		PD
9	8	150
12	x	375

$\frac{8}{x} = \frac{150}{375} \cdot \frac{12}{9}$

$x = \frac{375 \times 9 \times 8}{150 \times 12}$

Al despejar a x se invierten las fracciones.

$x =$ **15 horas**

Se deja en libertad al estudiante de elegir la forma como mejor se acomode para establecer las relaciones de los cálculos.

El **siguiente ejemplo se resuelve de las tres formas** antes descritas.

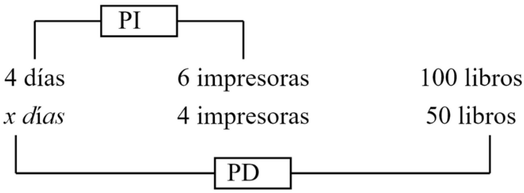
3. En la imprenta El Porvenir, en cuatro días, seis impresoras imprimen 100 libros. Se les han descompuesto dos impresoras y tienen el compromiso de imprimir 50 libros; ¿cuántos días tardarán en terminar la tarea?

Solución: Las magnitudes que se tienen en el planteamiento son las siguientes: **días**, **impresoras** y **libros**.

La relación entre ellas es como sigue

Días	Impresoras	Libros
4	6	100
x	4	50

La proporcionalidad entre esas magnitudes es la siguiente:
• **Impresoras** con **días**. Si hay **menos** impresoras, se necesitan **más** días. **Proporcionalidad inversa.**
• **Libros** con **días**. Si se imprimen **menos** libros, se necesitan **menos** días. **Proporcionalidad directa.**



Solución A. Invirtiendo la fracción de proporcionalidad inversa (productos cruzados):

$\frac{4}{x} = \frac{4}{6} \cdot \frac{100}{50}$

$x = \frac{4 \times 6 \times 50}{4 \times 100}$

$\frac{8}{x} = \frac{1200}{400}$

$x =$**3 días**

Solución B. Usando los signos + y −:

$+4$ días	$+6$ impresoras	-100 libros
x días	-4 impresoras	$+50$ libros

Igualando la incógnita con el cociente de productos con los signos + y −:

$$x = \frac{4\times6\times50}{4\times100} = \mathbf{3\ días}$$

Solución C. Tomando las relaciones por filas:

Para la 1ª fila: $\frac{4}{100} \times 6$

Para la 2ª fila: $\frac{x}{50} \times 4$

Igualando las relaciones:

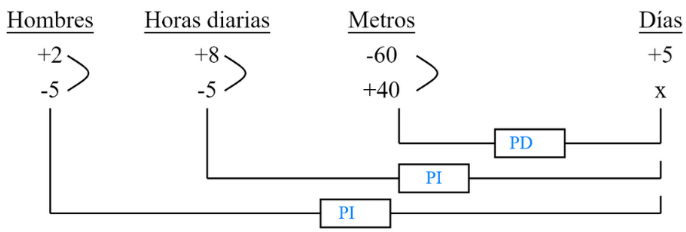
$\frac{x}{50} \times 4 = \frac{4}{100} \times 6$

$x = \frac{4\times6\times50}{100\times4}$

$x =$ **3 días**

4. En una compañía, dos hombres trabajando ocho horas diarias durante cinco días, construyen 60 metros de una obra. ¿Cuántos días necesitarán cinco hombres trabajando cinco horas diarias para construir 40 metros de la misma obra?

Solución: Primero relacionamos las magnitudes:



Utilizando productos cruzados, es decir, invirtiendo las proporciones inversas:

$\frac{5}{x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{60}{40}$

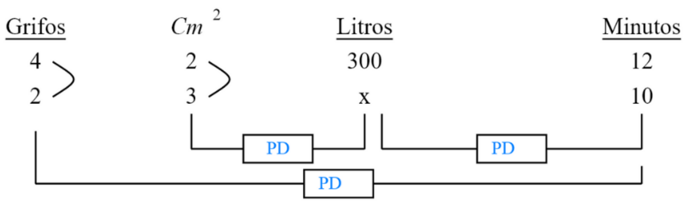
$x = \frac{5\times2\times8\times40}{5\times5\times60} = \frac{640}{300} =$ **2.13 días = 2 días con 8 min**

O si al estudiante le acomoda mejor, usando los signos $+$ y $-$:

$$x = \frac{2\times8\times40\times5}{5\times5\times60} = \frac{3200}{1500} = \textbf{2.13 días = 2 días con 8 min.}$$

5. Si con cuatro grifos cuyas bocas de salida son de $2cm^2$ se obtienen 300 litros de agua en 12 minutos, ¿cuántos litros se obtienen en 10 minutos con dos grifos con bocas de $3cm^2$?

Solución:



$$\frac{300}{x} = \frac{12}{10}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{2}{3}$$
$$x = \frac{300\times10\times2\times3}{12\times4\times2} = \frac{2250}{12} = \textbf{187.5 litros}$$

Ejercicios. Ponga a prueba sus conocimientos resolviendo los planteamientos que se proporcionan a continuación, aplicando la técnica la *regla de tres compuesta* en sus diferentes formas.

1. Un equipo de ocho programadores trabajará seis horas diarias para desarrollar un *software* en un año. Si se forma un equipo de 10 programadores trabajando cuatro horas diarias, ¿cuántos años necesitan para realizar un proyecto de la misma magnitud?

2. La cancha del Estadio Azteca de la Ciudad de México tiene una superficie de $7,140m^2$ (https://www.estadioazteca.com.mx/

ficha-tecnica/). Para cortar su césped se emplean tres máquinas podadoras funcionando durante cincohoras. ¿Cuánto tiempo se requiere para cortar el césped de otro estadio de las mismas características, cuya superficie es la mitad de la del Azteca, empleando siete máquinas?

3. John y Paul tienen una banda y componen seis canciones en 15 días. Si llaman a su amigo George para que les ayude durante cinco días, ¿cuántas canciones compondrán?

4. Un buque de carga realiza un transporte en 24 días. Queriendo minimizar el consumo de combustible, lleva tres motores encendidos y consume un total de 2 000 l de fuel. Si se encienden sus seis motores para realizar el transporte y el buque consume en 3 000 l, de fuel, ¿cuánto dura el transporte?

5. Dos tractores trabajando cinco horas aran 15 hectáreas y consumen 90 litros de diésel. Si trabajaran tres tractores durante tres horas y consumieran 150 litros de diésel, ¿cuántas hectáreas ararían?

6. En un cañaveral, cinco cortadoras de caña trabajando nueve horas diarias durante cinco días logran el corte de 130 hectáreas. Si se descomponen dos máquinas cortadoras y disminuyen a siete horas diarias de trabajo, ¿en cuántos días lograrán el corte de las restantes 120 hectáreas?

7. En una repostería solicitan tres pedidos de 300 bocadillos cada uno, para lo cual necesitan emplear a ocho trabajadores para surtirlos en dos días. Si solicitaran cinco pedidos y los mismos 300 bocadillos cada uno y emplearan a 10 trabajadores, ¿en cuántos días estarían listos los pedidos?

8. Una empresa cuenta con un equipo de tres técnicos que pueden reparar los seis levantacargas tan sólo en 180 minutos. Si se necesita reparar cinco levantacargas, pero uno de los técnicos no podrá ayudar a los demás, ¿cuánto tiempo tardarán en repararlos?

9. En un sembradío de sandías que es regado dos veces a la semana se suministran dos fertilizaciones y se realizan tres aplicaciones de plaguicidas; de esta forma se podrían cosechar 12 toneladas de fruta. Sin embargo, queriendo aumentar la producción, se riega cuatro veces a la semana, se fertiliza tres veces y cuatro veces se combate la plaga. En estas nuevas condiciones, ¿cuántas toneladas se producirán?

> NOTA: considerando que el aumento de todas las aplicaciones fuera lineal.

10. Ana y María son dueñas de sendas pizzerías. En la de María se cocinan cuatro pizzas en tres hornos en 30 minutos. Si Ana dispone de cuatro hornos, ¿cuánto tardará en cocinar seis pizzas, suponiendo que ambas poseen el mismo tipo de horno?

3.6. Reparto proporcional

Al fallecer, el señor Abelino dejó una herencia en el banco $1 950 000 para sus tres hijos: Abel, Susana y David. Él dejó establecido en su testamento que esa cantidad se repartiera de manera proporcional, sin dar más explicaciones. De esta manera, surgieron varias ideas entre los herederos:

- Abel opinó que el monto del dinero se dividiera en tres partes.

- David dijo que se repartiera de manera proporcional, tomando en cuenta el número de hijos que tenía cada uno de ellos: Abel tiene dos hijos, Susanatres hijos y David cuatro hijos.
- Susana intervino y dijo que se tomara en cuenta la edad de cada uno de ellos, más el número de hijos.

Después de discutir con prudencia estuvieron de acuerdo con la propuesta de Susana. Abel tenía 39 años, Susana 30 años y David 26 años de edad.

Luego dijo Abel: "¿Cómo hacemos este reparto proporcional?" "Pues las cantidades proporcionales en que se repartirá la heredad: 41, 33 y 30?

Nuevamente intervino Susana y afirmó que en la escuela les dijeron que para realizar este tipo de repartos se debía sacar un cociente, que es la proporción global entre los que se reparte la cantidad, esto es: $\frac{N}{a+b+c}$, y que éste cociente se multiplique por la porción que corresponde a cada quien; es decir, por el índice del reparto, o sea (a, b y c):

$\frac{N}{a+b+c} \times a$, $\frac{N}{a+b+c} \times b$ y $\frac{N}{a+b+c} \times c$.

Donde *a, b* y *c* son diferentes de cero.

Además, su maestro de matemáticas le dijo que un **reparto proporcional** es la distribución de una cantidad en partes proporcionales a ciertos números llamados **índices del reparto**, es decir, entre las proporciones en las que se reparte; además de que existen las que se hacen de forma directa y las que se realizan de forma inversa. Le hizo énfasis en que la **proporcionalidad** abarca los temas de la *regla de tres*, el *reparto proporcional* y los *porcentajes* (Martínez et al., 2013. Véase https://www.sangakoo.com/es/temas/repartos-proporcionales-directos-e-inversos).

De esta forma, Susana y sus hermanos pudieron hacer el reparto de la herencia, de manera que fue proporcional y de común acuerdo entre los tres. Habían optado por una ***proporcionalidad directa***.

A Abel le correspondieron:

$\text{Abel} = \frac{1{,}950{,}000}{41+33+30} \times 41 = 18,750 \times 41 = \$768,750.00$

A Susana le correspondieron:

$\text{Susana} = \frac{1{,}950{,}000}{41+33+30} \times 33 = 18,750 \times 33 = \$618,750.00$

A David le correspondieron:

$\text{David} = \frac{1{,}950{,}000}{41+33+30} \times 30 = 18,750 \times 30 = \$562,500.00$

El reparto quedó hecho de manera satisfactoria:

$768,750.00 + $618,750.00 + $562,500.00 = $1,950,000.00

3.6.1. La proporcionalidad directa en el contexto aplicado

1. Dos amigos, Arturo y Andrés, compraron una casa en $889 590. Arturo aportó $380 000 y Andrés la diferencia. Luego, la propiedad fue vendida en $1 150 000. Después de haber recibido el dinero de la venta, se lo repartieron de manera proporcional a las aportaciones que hicieron cuando fue adquirida la casa. ¿Cuánto recibió cada uno?, ¿cuál fue la ganancia obtenida por cada quien?

Solución:
a) Cada uno recibió:

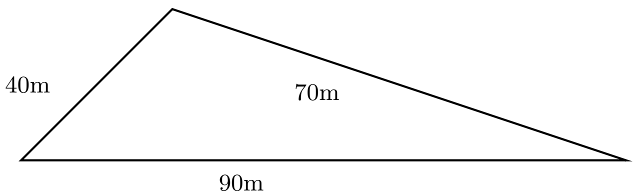
$\text{Arturo} = \frac{1{,}150{,}000}{380000+509590} \times 380000 = 1.29273 \times 380000 = \$491,237.5$

Andrés = $\frac{1{,}150{,}000}{380000+509590} \times 509590 = 1.29273 \times 509590 =$ $\$658,762.5$

a) La ganancia obtenida por cada uno fue la siguiente:
Arturo = 491,237.5 – 380,000 = $**111, 237.5**
Andrés = 658,762.5 – 509,590 = $**149,172.5**

2. El croquis de un terreno tiene forma triangular (véase la figura 12). Al ingeniero encargado de reproducir el nuevo croquis le piden que lo lleve a una escala mayor, ya que dicha superficie se sembrará en otro semejante, de manera que debe cumplir con las especificaciones del proyecto. Le dan como dato que el perímetro del nuevo terreno tendrá 350 m y que cada lado aumentará de manera proporcional:¿cuáles serán las medidas del nuevo terreno?

FIGURA 12. *Croquis del terreno del planteamiento 2*



Solución:

El lado de $40m = \frac{350}{40+70+90} \times 40 = 1.75 \times 40 = 70m$

El lado de $70m = \frac{350}{40+70+90} \times 70 = 1.75 \times 70 = 122.5m$

El lado de $90m = \frac{350}{40+70+90} \times 90 = 1.75 \times 90 = 157.5m$

3. Un billete de lotería fue comprado por tres amigos. Noé cooperó con $\frac{1}{5}$ del valor y los otros con la mitad del resto. El premio fue de $50,000 y los amigos pretenden repartirlo

de manera proporcional a la cantidad que aportaron para la compra del boleto. ¿Cuánto le tocará a cada uno?

Solución:

$$\text{Al primero} = \frac{50{,}000}{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}} \times \frac{1}{5} = 50,000 \times \frac{1}{5} = \$10,000.00$$

$$\text{Al segundo} = \frac{50{,}000}{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}} \times \frac{2}{5} = 50,000 \times \frac{2}{5} = \$20,000.00$$

Al tercero = \$20,000.00 Por deducción, ya que cooperó con lo mismo que el segundo.

4. De las 360 aves que hay en un corral, el número de gallinas es el triple que el de pavos, y el número de pavos es el doble que el de gansos. ¿Cuántas aves de cada especie hay en el corral?
Solución:

Gallinas = 3 veces los pavos Pavos = 2 veces los gansos

Por lo tanto, de cada especie corresponde:

$\Longrightarrow$ Gansos = 1 tanto
Pavos = 2 tantos
Gallinas = 6 tantos

Así:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{360}{6+2+1} \times 6 = 40 \times 6 = 240 \text{ gallinas} \\ \frac{360}{6+2+1} \times 2 = 40 \times 2 = 80 \text{ pavos} \\ \frac{360}{6+2+1} \times 1 = 40 \times 1 = 40 \text{ gansos} \end{array}\right\} \text{En total hay 360 aves}$$

5. Para celebrar la fiesta del 15 de septiembre, en una preparatoria se gastaron \$6 730. Según el ciclo escolar, en ese tiempo

se cursa el semestre impar, por lo que existe un grupo de primero, uno de tercero y uno de quinto semestre, además de uno de regularización. El director decide que cooperen los cuatro grupos. ¿Qué cantidad aportará cada grupo si la cooperación se realiza de manera proporcional al número de alumnos por grupo? El grupo de primer semestre tiene 35 alumnos, el de tercero 30, el de quinto 25, y el de regularización 12.

Solución:

El primer semestre: $\frac{6730}{35+30+25+12} \times 35 = 65.98 \times 35 = \$2,309.00$

El tercer semestre: $\frac{6730}{35+30+25+12} \times 30 = 65.98 \times 30 = \$1,979.00$

El quinto semestre: $\frac{6730}{35+30+25+12} \times 25 = 65.98 \times 25 = \$1,650.00$

El de regularización: $\frac{6730}{35+30+25+12} \times 12 = 65.98 \times 12 = \$792.00$

3.6.2. La proporcionalidad inversa en el contexto aplicado

1. Elena, madre de tres hijos que están estudiando, pretende motivarlos para que falten menos a la escuela y, de esta manera, evitar que sus inasistencias perjudiquen sus calificaciones: Para ello decide repartir \$200 entre los tres de manera proporcional al número de faltas que tienen. El que tenga menor número de faltas recibirá mayor porción, y el que tenga mayor número de faltas recibirá menor porción. Diego tiene ocho faltas, Alma cuatro y Daniel tre. ¿Cuánto le tocará a cada uno?

Solución:
Puesto que el propósito es motivarlos para que tengan el menor número de faltas, el reparto proporcional es inverso. Así, los \$200 se repartirán entre $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$.

Con fines de cálculo, las fracciones se convierten a un denominador común, para lo cual se recurre al *mínimo común múltiplo (mcm)* (tema 3.2).

Esto es:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 3 & \div 2 \\ 4 & 2 & 3 & \div 2 \\ 2 & 1 & 3 & \div 2 \\ 1 & & 3 & \div 3 \\ 1 & & & \end{array}\right\} \text{mcm} = 2^3 \times 3 = 24$$

Por lo tanto, $\frac{1}{8} = \frac{3}{24}$, $\frac{1}{4} = \frac{6}{24}$, $\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$.

El reparto se hará proporcional a 3, 6 y 8.

A Diego le corresponderán:

$$\frac{200}{\frac{3}{24}+\frac{6}{24}+\frac{8}{24}} \times \frac{3}{24} = \frac{200}{\frac{17}{24}} \times \frac{3}{24} = \frac{200\times 24}{17} \times \frac{3}{24} = \frac{200\times 3}{17} = \$35.5$$

De manera resumida, sería:

$$\frac{200}{3+6+8} \times 3 = \frac{200}{17} \times 3 = \$35.5$$

A Alma le corresponderán: $\frac{200}{3+6+8} \times 6 = \frac{200}{17} \times 6 = \$70.5$

A Daniel le corresponderán: $\frac{200}{3+6+8} \times 8 = \frac{200}{17} \times 8 = \$94.00$

2. Un empresario ha acordado con sus gerentes de las tres áreas principales de la empresa repartir una gratificación de 540 dólares en partes inversamente proporcionales a sus sueldos (menor sueldo, mayor proporción). Los sueldos son de 800,

850 y 900 dólares, respectivamente. ¿Cuánto le corresponderá a cada gerente?

Solución:
Como el reparto es de proporcionalidad inversa, se debe traducir la inversa de los sueldos:

$$\left.\begin{array}{lll|l} 800 & 850 & 900 & \div 2 \\ 400 & 425 & 450 & \div 5 \\ 80 & 85 & 90 & \div 5 \\ 16 & 17 & 18 & \div 2 \\ 8 & 17 & 9 & \div 8 \\ 1 & 17 & 9 & \div 9 \\ & 17 & 1 & \div 17 \\ & 1 & & \end{array}\right\} \text{mcm} = 122,400$$

$$122,400/800 = 153$$
$$122,400/850 = 144$$
$$122,400/800 = 136$$

De esta forma, se buscará la proporcionalidad con respecto a 153, 144 y 136.

$\frac{1}{800} = \frac{153}{122{,}400}$, $\frac{1}{850} = \frac{144}{122{,}400}$, $\frac{1}{900} = \frac{136}{122{,}400}$

Al 1°. $\frac{540}{153+144+136} \times 153 = 1.247113164 \times 153 = 190.81$ dólares

Al 2°. $\frac{540}{153+144+136} \times 144 = 1.247113164 \times 144 = 179.58$ dólares

Al 3°. $\frac{540}{153+144+136} \times 136 = 1.247113164 \times 136 = 169.61$ dólares

Ejercicios. Pon a prueba tus conocimientos resolviendo los planteamientos que se proporcionan a continuación y aplicando las técnicas de la *proporcionalidad directa e inversa.*

1. A Samuel le pidieron en la escuela que llevara tres aros de una varilla de 6 m de longitud. El primero que abarcara $\frac{1}{2}$ de la varilla, el segundo $\frac{1}{3}$ y el tercero el resto de la varilla. Además, le solicitaron que supiera el diámetro de cada aro. Una vez construidos los tres aros, ayuda a Samuel a calcular el diámetro de cada aro.

2. Un tractorista prepara la tierra para la siembra. Si la superficie es de 35 hectáreas y desea tener un avance diario proporcional a las horas que trabaje al día, tiene estimado dejar arada toda la superficie en cinco días, trabajando 6, 5, 4, 3 y 2 horas cada día. ¿Cuántas hectáreas debe arar diariamente?

3. En la cosecha de cítricos, entre Martha, Benito y Celso recibieron \$32 000 de pago por los días trabajados. Los tres estuvieron de acuerdo en que la repartición fuera proporcional a los días que cada uno trabajó. Martha trabajó el doble de días que Benito y Celso trabajó igual a la suma de los días que trabajó Martha y Benito. ¿Qué monto le tocó a cada uno?

4. En su testamento el señor García dejó estipulada una herencia a sus tres hijos: Manuel, Carlos y José, que consistía en \$380 000, los cuales serían repartidos de manera que sus hijos recibieran una cantidad inversamente proporcional a la edad que tuvieran al momento de su fallecimiento. El señor García decidió hacer de esta manera el reparto considerando que quien tendría mayor necesidad sería el menor, por su corta edad, y que los mayores estarían mejor. La edad de sus hijos entonces eran 30, 26 y 21 años, respectivamente. ¿Cuánto deberá recibir cada uno? (Para encontrar el denominador común

de 30, 26 y 21, utiliza el mcm.)

5. En un concurso de matemáticas se entregaron 20 problemas y se premiaron 6. Arturo y Laura compraron una casa en \$1 200 000. Arturo aportó \$300 000 y Laura \$900 000. Posteriormente vendieron la propiedad en \$1 600 000. ¿Cómo se repartirán la cantidad obtenida por la venta de manera que ésta sea proporcional a lo que aportaron?

6. Arturo y Laura compraron una casa en \$1 200 000. Arturo aportó \$300 000 y Laura \$900 000. Posteriormente vendieron la propiedad en \$1 600 000. ¿Cómo se repartirán la cantidad obtenida por la venta de manera que ésta sea proporcional a lo que aportaron?

3.7. La media ponderada

La media ponderada es un promedio en el que cada elemento participante tiene diferente valor, ponderación o peso relativo; así, la diferencia entre la *media ponderada* y la *media aritmética* es que en la primera los datos no tienen el mismo valor, a como sucede en la segunda, donde todos los datos sí tienen el mismo valor (Rubio, 2003).

Una manera fácil de ejemplificar la aplicación de la media ponderada es cuando se calcula el promedio de una materia de un estudiante, donde se califica con criterios que tienen distintos porcentajes.

Ejemplos:

1. El maestro de biología acordó con sus estudiantes calificar de la siguiente manera:

Trabajos $= 20\,\%$

Participación/disciplina = 10 %
Prácticas = 50 %
Exámenes = 20 %

Los promedios alcanzados por un estudiante en cada criterio fueron los siguientes:

Trabajos = 8.5
Participación = 8.0
Prácticas = 10
Exámenes = 9.3

Como puede observarse, se cuenta con dos datos diferentes: el promedio y el porcentaje correspondiente a cada uno de ellos. La expresión que permite calcular la media ponderada se representa de la siguiente manera:

$$\mathrm{MP} = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + \ldots + x_n P_n$$

Donde:

x = representa los valores sobre los cuales se calcula la media ponderada.

i = es el orden de los valores en cuestión; por ejemplo: a los trabajos se le da el 1, a la participación el 2, y así sucesivamente.

n = representa el número o la cantidad de valores sobre los cuales se calcula la media ponderada.

P = representa el porcentaje o la ponderación de cada valor.

Así: $MP = (8.5 \times 0.2) + (8.0 \times 0.1) + (10 \times 0.5) + (9.3 \times 0.2) = 9.36$

En este ejemplo hay que considerar que cada producto $(8.5 \times 0.2) + \ldots$ (*el promedio por el porcentaje*), expresado en decimales, arroja un puntaje, al trabajar la calificación en escala de 10, cuya la sumatoria en la media ponderada no puede ser mayor a 10; si se trabajara en escala a 100, la sumatoria no podría ser mayor a 100.

2. A Pablo le interesa saber con qué calificación aprobará la asignatura de habilidades de pensamiento, ya que en algunos temas no le fue muy bien. Además, dice que su profesor y el grupo tomaron el acuerdo de evaluar con los criterios y los porcentajes que se presentan en la tabla 19:

Tabla 19. *Criterios y porcentajes de evaluación*

Criterios a evaluar	Porcentaje de ponderación	Calificación obtenida
Exposición	10	6
Diario de vida y aprendizaje	20	8.7
Elaboración y presentación de video en equipo	30	6.5
Portafolio de evidencias	40	10

Solución:

Promedio de Pablo $= (6 \times 0.10) + (8.7 \times 0.20) + (6.5 \times 0.30) + (10 \times 0.40) = 8.29$

3. La Tabla 20 muestra los porcentajes de la fuerza laboral desempleada y su magnitud en cinco estados de la República

mexicana, donde se ha agudizado la pobreza de la población. El Instituto Nacional de Estadística y Geografía desea dar a conocer la tasa de desempleo que podría estar afectando de manera severa a toda la región.

TABLA 20. *Porcentajes de desempleo y fuerza laboral*

Estado	Porcentaje de desempleo	Fuerza laboral desempleada
Campeche	4.5	30500
Chiapas	8.0	32340
Tabasco	11.2	25890
Oaxaca	9.3	85492
Guerrero	4.8	9890

Solución:

$$\mathrm{MP} = \frac{(30500\times4.5)+(32340\times8)+(25890\times11.2)+(85492\times9.3)+(9890\times4.8)}{30500+32340+25890+85492+9890}$$

$$= \frac{1{,}528{,}485.6}{184{,}112} = 8.3 \text{ Tasa de desempleo en la región.}$$

En este caso fue necesario dividir entre la suma de la población que representa esos porcentajes, ya que se solicita el porcentaje o la tasa promedio de desempleo.

4. En junio, un empresario compró 300 acciones a una compañía a precio de 200 dólares cada una; en octubre compró 400 acciones más a 250 dólares cada una, y en diciembre adquirió otras 400 acciones al costo de 230 dólares cada acción. ¿Cuál es el precio medio ponderado por acción?

Solución:

$$MP = \frac{300(200)+400(250)+400(230)}{300+400+400} = \frac{252{,}000}{1100} = 229.1 \text{ dólares}$$

5. En una tienda de ropa se adquirieron blusas para la temporada. Dicha compra se hizo a tres diferentes proveedores. El primero surtió 100 unidades a \$150 cada una; el segundo, 140 unidades a \$180 cada una, y el tercero 80 unidades a \$190 cada una. ¿Cuál es el precio promedio que ha pagado el administrador del negocio por cada blusa?

Solución:

$$\text{Precio de las blusas} = \frac{100(150)+140(180)+80(190)}{100+140+80} = \frac{55{,}400}{320} = \$173.13$$

> NOTA: la importancia de esta estimación radica en que cuando se solicite el promedio, la media, la tasa, la razón de cambio, etc., se tendrá que hacer la división entre la suma de los totales, a diferencia de una media ponderada simple.

Por otro lado, es importante distinguir la diferencia entre ***media aritmética*** y ***media ponderada***, ya que ambos cálculos pertenecen a las medidas de tendencia central; sin embargo, son diferentes debido a que en la *media ponderada* se considera el peso (%) de cada criterio a evaluar.

Por ejemplo, las calificaciones de Luis, un estudiante de secundaria, de tres exámenes parciales y el final, se reportan en la Tabla 21, junto con el porcentaje de ponderación de cada uno.

TABLA 21. *Resultados de los exámenes de Luis*

Exámenes	Primer examen (10 %)	Segundo examen (20 %)	Tercer examen (20 %)	Examen final (50 %)
Calificación obtenida	9.2	8.8	10	9.5

Solución:

Media aritmética o promedio $= \frac{9.2+8.8+10+9.5}{4} = 9.38$ Media sin considerar el peso que tiene cada examen.

Media ponderada $= (9.2 \times 0.10) + (8.8 \times 0.20) + (10 \times 0.20) + (9.5 \times 0.50) = 9.43$ La diferencia la hace el porcentaje que tiene cada examen, principalmente el de mayor ponderación, que es el examen final.

3.8. Porcentaje o tanto por ciento

El profesor de la Facultad de Química platicó con sus estudiantes y les dijo que la "basura espacial" aumentó 20 % en 2009 con respecto a lo que se reportó en 2008. Se estima que en este último año había aproximadamente unas 15 100 piezas de escombro volando (restos de aparatos dañados, lanzadores, cohetes, pinzas espaciales, etc.) (informe de la Oficina del Programa de la National Aeronautics and Space Administration (NASA). Por su parte, un experto de la NASA estimó que había 10 000 objetos mayores de 10 cm y 500 000 menores a 10 cm, que conforman la chatarra espacial en órbita.

El profesor pidió a los estudiantes que concentraran esa información en un cuadro y que calcularan el aumento de esa basura espacial de 2008 a 2009. Los alumnos presentaron la información en la Tabla 22.

TABLA 22. *Objetos en órbita en el espacio según estimaciones de 2008 y 2009*

Clasificación	Cantidad en 2008	Cantidad en 2009
Objetos mayores de 10 cm	500 000	600 000
Objetos menores de 10 cm	10 000	12 000
Escombro espacial	15100	18120
Basura espacial total	525 100	630 120

Fuente: *Libro de matemáticas 2. Recursos didácticos*, Santillana (Martínez et al, 2013).

Luego les explicó que si de 2009 a 2010 aumentara 3.5 %, y en 2011 el 1.4 %, ¿cuál sería la cantidad de basura espacial que tendríamos. Sin embargo, el profesor aclaró que se considera que el aumento de cada año será constante de 1.28 % de 2011 hasta llegar a 2055. Por lo que solicitó a sus estudiantes que calcularan esos aumentos para 2010, 2011 y 2055. Por lo tanto, los alumnos presentaron un cuadro completa con todos los cálculos, pero... se encontraron con el detalle de que estimar los porcentajes de 2011 a 2055 no fue posible. Sólo explicaron que para los otros años se debía multiplicar la cantidad anterior por la unidad (1) y luego sumar el porcentaje de aumento, es decir:

Para 2009: 500 000 (1 + 20 %) = 500 000 (1.20) = 600 000
Para 2010: 600 000 (1 + 3.5 %) = 600 000 (1.035) = 621 000
Para 2011: 621 000 (1 + 1.4 %) = 621 000 (1.014) = 629 694...

Y así sucesivamente. Véase sus cálculos en la tabla 23.

TABLA 23. *Cálculo porcentual de los objetos orbitando en el espacio hasta el 2011*

Clasificación	Cantidad 2008	Cantidad 2009 (20 %)	Cantidad 2010 (3.5 %)	Cantidad 2011 (1.4 %)	Cantidad 2055 (1.28 %)
Objetos mayores a 10 cm	500000	600000	621000	629694	
Objetos menores a 10 cm	10000	12000	12420	12594	
Escombro espacial	15100	18120	18754.2	19057.3	
Basura espacial total	525100	630120	652174.2	661304.6	

FUENTE: *Libro de matemáticas 2*, Recursos didácticos, Santillana (Martínez et al., 2013).

El maestro pidió a los estudiantes que indagaran cómo realizar estos cálculos y éstos descubrieron que realizar un cálculo para varios años en que el porcentaje de aumento es constante y acumulativo para cada año, consistía en multiplicar la cantidad por n veces el porcentaje sumado con la unidad. Por ejemplo, el *escombro espacial* en 2008 era de 15 100; si hubiera aumentado de manera constante 5 % hasta 2011, entonces se calcularía:

$15100(1.05)(1.05)(1.05) = 15100(1.05)^3 =$ **17 480.14** porque:
15 100 (1.05) = 15 855
15 855 (1.05) = 16 647.75
16 647.75 (1.05) = **17 480.14** (Se verá con mayor precisión en el tema de interés compuesto).

Por lo tanto, los cálculos hasta 2055 quedarían de la siguiente manera: • Objetos mayores de $10cm$: $\underline{694(1.0128)^{44}} = 1101975.74$ • Objetos menores de $10cm$: $\underline{12594(1.0128)^{44}} = 22039.72$ • Escombro espacial: $\underline{19057.3(1.0128)^{44}} = 33350.62$ • Basura espacial total: $\underline{661304.6(1.0128)^{44}} = 1157294.85$ (Tabla 24)

TABLA 24. *Cálculos finales de los objetos en órbita, reportados hasta 2055*

Clasificación	Cantidad **2008**	Cantidad **2009** (20 %)	Cantidad **2010** (3.5 %)	Cantidad **2011** (1.4 %)	Cantidad **2055** (1.28 %)
Objetos mayores de 10 cm	500 000	600 000	621 000	629 694	1 101 975.74
Objetos menores de 10 cm	10 000	12 000	12 420	12 594	22 039.72
Escombro espacial	15 100	18 120	18 754.2	19 057.3	33 350.62
Basura espacial total	525 100	630 120	652 174.2	661 304.6	1 157 294.85

FUENTE: Elaboración propia.

A continuación abordaremos los temas de *interés simple*, *interés compuesto* y *anualidades,* con el fin de entender el cálculo de los porcentajes.

3.8.1. Interés simple

Se denomina *interés simple* al interés que se aplica siempre sobre el capital inicial, debido a que los intereses generados no se capitalizan. Dicho de otra forma, que transcurrido el periodo los intereses no se reinvierten ni se suman al monto original, mientras que en el *interés compuesto* los intereses pasan a sumarse al saldo original y en el próximo periodo los intereses se calculan sobre el capital original, más los intereses que ya devengó en los periodos anteriores (Soler et al., 2004. Véase https://bit.ly/4ikdmCc).

Por ejemplo, un depósito de \$1 000 al 10 % mensual, por un periodo de dos meses, generará:

- Al primer mes: \$1 000 × 0.10 = \$100
- Al segundo mes: \$1 000 × 0.10 = \$100

Lo que quiere decir que se generaron \$100 de intereses por mes, pero los intereses del primer mes no se sumaron a los \$1 000 para el siguiente mes, sino que la base del dinero siguieron siendo los mismos \$1 000. Esto quiere decir que en los dos meses se habrán generado \$200 de intereses (\$100 cada mes). De aquí resulta que “el interés I sobre un capital P con una tasa de interés r durante t años”, sea:

$$I = P \cdot r \cdot t \text{ Interés simple}$$

Así, el interés simple en los dos meses de los \$1 000 depositados, fueron:

$$I = 1000 \times 0.10 \times 2 = \$200.00$$

De esta forma, una *cantidad acumulada* X en un tiempo de t años, estará dada por:

$X = P + I$

$X = P + P \cdot r \cdot t$

$X = P(1 + r \cdot t)$ Cantidad acumulada

Por ejemplo, los \$1 000 al 10 % mensual de manera acumulada serán:

$$X = 1000(1 + 0.10 \cdot 2) = \$1,200$$

Los siguientes **ejemplos** son casos de interés simple:

1. La institución bancaria Bancomer ofrece a sus clientes interés simple a razón de 7 % anual en sus cuentas de inversión. Un cliente apertura una cuenta con \$17 200 a un periodo de dos años, sin realizar retiros durante ese lapso de tiempo.

a) ¿Qué cantidad se acumuló al final de los dos años?
b) ¿Cuáles fueron los intereses ganados?

Solución:

a) $X = 17,200(1 + 0.07 \times 2) = \$19,608$

b) $I = 17,200 \times 0.07 \times 2 = \$2,408$

Por diferencia:

$19,608 - 17,200 = \$2,408$

2. Al final de cinco años, en una cuenta de banco se registra la cantidad de \$17 525, aperturada bajo el interés simple anual de 3.25 %. ¿Con qué cantidad se aperturó la cuenta?

Solución:

$17,525 = \text{P}[1 + (0.0325)(5)]$

$\text{P} = \frac{17{,}525}{1+(0.0325)(5)}$

$P = \$15,075.3$

3. ¿A qué tasa de interés anual fueron invertidos $8 500 si después de 1½ años el estado de cuenta reporta $9,250?
Solución:

$9,250 = 8,500(1 + 1.5 \times r)$

$1 + 1.5\text{r} = \frac{9{,}250}{8{,}500}$

$1.5\text{r} = \frac{9{,}250}{8{,}500} - 1$

$\text{r} = \frac{0.0882353}{1.5}$

$\text{r} = 0.0588$

$\therefore r = 5.88\,\%$ anual

4. En un banco, al cabo de un tiempo se registró una cuenta de $25 500, con un interés de 1.25 %. Después se registró que esa cuenta llegó, de forma acumulativa, a $32 250. ¿Qué tiempo llevaba abierta la cuenta?

Solución:

$32,250 = 25,500(1 + 0.0125t)$

$0.0125\text{t} = \frac{32{,}250}{25{,}500} - 1$

$\text{t} = \frac{0.264705882}{0.0125}$

t = 21.18 años, o 21 años, 2 meses, 5 días, si el interés es anual.

3.8.2. Interés compuesto

Cuando el *interés generado* por una cantidad de dinero invertida *es reinvertido* de modo que también *genere interés*, se le llama *interés Compuesto*. De este modo, el interés ganado es convertido (o compuesto) en principal o monto capital y entonces hay "interés sobre interés", de donde se deduce el *interés compuesto* (Rubio, 2003).

Por ejemplo, supongamos una inversión de \$1 000 (capital) a una tasa de interés de 8 %. anual:

- Al final del primer año, habrá:

  $1,000 + 1,000(0.08) = \$1,080.00$, o:

  $1,000(1 + 0.08) = \$1,080.00$, o más sencillamente:

  $1,000(1.08) = \$1,080.00$

  Ahora el capital por reinvertirse para generar nuevos intereses será: \$1 080.

- Al final del segundo año, habrá:

  $1,080(1.08) = \$1,166.4$

- Al final del tercer año, habrá:

  $1,166.4(1.08) = \$1,259.7$

  Y así sucesivamente...

A esta cantidad que se va generando (\$1 166.4, \$1 259.7...) se le conoce como:

$\Longrightarrow$ Monto acumulado
Monto compuesto
Cantidad compuesta

Al interés generado así: $1 259.7 $1000 = **$259.7**, se le llama *interés compuesto.*

Supongamos un capital P, pesos invertidos, a una tasa de r por ciento, compuesto anualmente.

La *cantidad compuesta* después de un año será:

$$P + Pr$$
$$P(1 + r)$$

La *cantidad compuesta* después del segundo año será:

$$P(1 + r) + [P(1 + r)]r$$
$$P(1 + r)(1 + r)$$
$$P(1 + r)^2$$

La *cantidad compuesta* después del tercer año será:

$$P(1 + r)^2 + \left[P(1 + r)^2\right] r$$
$$P(1 + r)^2(1 + r)$$
$$P(1 + r)^3$$

Generalizando esta idea de la *cantidad compuesta* o *monto compuesto*:

Supongamos el monto compuesto = S
De la cantidad o capital invertida = P
En un tiempo = n años
A una tasa de interés compuesto anual = r

De estos datos se deduce la expresión algebraica que permite su cálculo:

$$S = P(1 + r)^n$$

En esta expresión: $S = f(n)$

$$S = \textit{función potencia de base (1+r)}$$

Diferencia entre *monto compuesto* e *interés compuesto*
Si se invierten \$1 000 a 10 años a 7 % anual:

a) ¿Cuál es el monto compuesto?
b) ¿Cuál es el interés compuesto?
c) Grafique el planteamiento del problema.

Respuesta:
a) $\mathrm{S} = 1{,}000(1 + 0.07)^{10}$

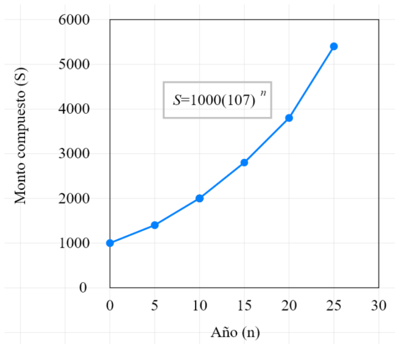
$\mathrm{S} = 1{,}000(1.07)^{10}$

$S = \$1{,}967.15$. Monto compuesto

b) ¿Cuánto ganó ese capital invertido durante un lapso de tiempo determinado?
Interés Compuesto = Monto compuesto – Capital invertido
Interés Compuesto = S−P
Interés Compuesto = 1 967.15−1 000 = \$967.15

c) Gráfica del planteamiento (Figura 13):

Figura 13. *Función potencia*



Ahora, supongamos la misma cantidad $\Rightarrow$ \$1 000

Invertida a la misma tasa anual $\Rightarrow$ 7 %

Al mismo periodo $\Rightarrow$ 10 años

Aquí la diferencia es que en este caso habrá cuatro *periodos de interés,* también llamados *periodos de capitalización* o de *periodos de conversión*, por año.

En éste los intereses serán trimestrales porque son cuatro periodos en el año: $\frac{12}{4} = 3$, y los intereses por trimestre: $\frac{7\,\%\text{ anual}}{4\text{ trimestres}} = \frac{0.07}{4} = 1.75\,\%$, por lo que en un periodo de 10 años habrá $10(4) = 40$ periodos de intereses.

Aplicando la expresión general, el monto compuesto en los 10 años será:

$$\text{S} = 1{,}000\left(1 + \tfrac{0.07}{4}\right)^{10(4)} = \$2{,}001.6$$

Y el interés compuesto será: $2{,}001.6 - 1{,}000 = \$1{,}001.6$

Una tasa de interés por periodo (semanal, quincenal, mensual, bimestral, trimestral, cuatrimestral, etc.), se establece como una tasa anual (siempre). Tomando como ejemplo los datos del ejercicio anterior:

Con una *tasa anual* de 7 % compuesta trimestralmente, resulta que la *tasa periódica* es $\frac{7\,\%}{4} = 1.75\,\%$

$$\text{A la tasa de } 7\,\% \text{ se le llama} \begin{cases} \text{Tasa nominal} \\ \text{Tasa de porcentaje anual} \end{cases}$$

¿Cuál será el *monto compuesto* y el *interés compuesto* de la siguiente forma?:

- Misma cantidad, $1 000
- Misma tasa nominal, 7 %, pero compuesta semanalmente
- Mismo período, 10 años

$$\mathrm{S} = 1{,}000\left(1+\frac{0.07}{52}\right)^{10(52)} = \begin{array}{l} \$2012.8 \text{ Monto compuesto} \\ \\ \$1{,}012.8 \text{ Interés compuesto} \end{array}$$

Aplicaciones

1. ¿Cuál será el saldo después de cinco años de una cuenta de ahorros que se apertura con $3 000 a una tasa anual de 6 % compuesta semestralmente?

Solución:

$$\mathrm{S} = 3{,}000\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{5(2)} = \$4{,}031.75$$

2. Un monto de $5 000 llega a $5 870 en una cuenta de inversión después de tres años. El interés fue capitalizado semestralmente: ¿cuál será la tasa de interés nominal que fue devengada por el dinero?

Solución:

$S = P\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}$ De este modo:

$5,870 = 5,000\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2(3)}$ * La tasa nominal o anual = 5.42 %

$\frac{5,870}{5,000} = \left(1+\frac{r}{2}\right)^{6}$ * La tasa semestral = $\frac{5.42}{2} = 2.71\,\%$

$1+\frac{r}{2} = \sqrt[6]{\frac{5,870}{5,000}}$

$\frac{r}{2} = \sqrt[6]{\frac{5,870}{5,000}} - 1$

r = 0.0271(2) = 5.42 %

3. Después de dos años, en una cuenta de inversión existe un monto compuesto de \$15 525. Si la tasa nominal compuesta trimestralmente a la que fue abierta la cuenta fue de 4.75 %, ¿cuál fue la cantidad invertida?

Solución:

$15,1525 = \mathrm{P}\left(1+\frac{0.0475}{4}\right)^{2(4)}$

$P = \frac{15,525}{\left(1+\frac{0.0475}{4}\right)^{s}}$

P = \$14125.92

4. Una cuenta de inversión fue aperturada con \$250 000 a una tasa nominal de 3.25 %, compuesta cuatrimestralmente. Después de cierto tiempo el titular de la cuenta retiró el dinero y recibió \$262 305. ¿Qué tiempo estuvo el dinero en el banco? Solución:

$262,305 = 250,000\left(1+\frac{0.0325}{3}\right)^{n(3)}$

$(1+0.0108333)^{n(3)} = \frac{262,305}{250,000}$

Aplicando una propiedad de logaritmos: $\ln \mathrm{m}^{\mathrm{r}} = \mathrm{r}(\ln \mathrm{m})$

$\ln(1.0108333)^{3n} = \ln 1.04922$

$3n \ln(1.0108333) = \ln 1.04922$

$3\mathrm{n}(0.004679412) = 0.02086656$

$\mathrm{n} = 1.4864$

$\mathrm{n} \approx 1.5$ años

5. ¿Cuál será el crecimiento poblacional o el tamaño de la población de una ciudad de 20 000 habitantes si crece a razón de 2.25 % anual, dentro de cinco años?

Solución:

$\text{Población} = 20,000(1 + 0.0225)^5 = 22,353.55$

Por lo tanto, la población será = 22 354 habitantes

Ejercicios. Pon a prueba tus conocimientos resolviendo los planteamientos que se proporcionan a continuación y aplicando las técnicas del *interés simple* e *interés compuesto*.

1. Encuentre la tasa de interés nominal de una cuenta que fue aperturada con \$15 000, si después de 1½ años llegó a \$15 755. Los intereses fueron capitalizados trimestralmente.

2. El estado de cuenta de una inversión se reporta en un monto total de \$22 232.75; aperturada hace dos años a una tasa mensual anual de 3.75 %, ¿qué cantidad fue invertida?

3. El estado de cuenta de una inversión se reporta en un monto total de \$22 250; si se aperturó hace tres años a una tasa nominal de 5 %, ¿qué cantidad fue invertida?

4. En la herencia de Ricardo se reporta una cuenta de ahorros con \$87 625.60, aperturada con \$66 700 a una tasa anual de 4.3 %, capitalizada mensualmente. Ricardo desea saber qué tiempo lleva ese dinero en el banco.

5. ¿Cuál será el monto de una inversión de \$8 000 durante tres años al 6.25 % de interés compuesto diariamente? (suponga año no bisiesto).

6. La población de una ciudad de 5,000 habitantes crece a razón de 3 % anual:

a) Determine una ecuación que dé la población P después de n años a partir de ahora.

b) Determine la población tres años después.

7. Actualmente, las ciudades A y B tienen poblaciones de 70 000 y 60 000 habitantes, respectivamente. La ciudad A crece a razón de 4 % anual, y la ciudad B, a razón de 5 % anual. Determine la diferencia entre las poblaciones al final de cinco años.

8. Hay bacterias en un cultivo y su número se incrementa a razón de 5 % cada hora. Al inicio estaban presentes 400 bacterias.

a) Determine una ecuación que dé el número N de bacterias presentes presentes después de t horas.

b) ¿Cuántas bacterias están presentes después de una hora?

c) ¿Cuántas bacterias estarán presentes después de cuatro horas?

3.8.3. Anualidades

Una anualidad es una serie de pagos realizados a intervalos regulares. El periodo en el que se efectúan estos pagos se llama ANUALIDAD. Las anualidades son:

- Depósitos regulares en una cuenta de ahorros.
- Pagos mensuales de una hipoteca.
- Pagos mensuales de un seguro.
- Pagos mensuales de la letra de un crédito Etcétera.

Las anualidades se clasifican según las fechas de pago:

- Si los pagos se realizan al final de cada periodo de pago: anualidad ordinaria.
- Si los pagos se realizan al inicio de cada periodo de pago: anualidad de vencimiento.
- Si los pagos coinciden con la conversión de los intereses: anualidad simple.
- Si los pagos difieren con la conversión de los intereses: anualidad compleja
- Si los pagos se dan en intervalos de tiempo fijo: anualidad cierta.

Ejemplo:

Se deposita una suma de \$200 en una cuenta al final de cada trimestre durante dos años. La cuenta genera intereses sobre el depósito a una tasa de 6 % anual, compuesta trimestralmente.

- El primer pago de \$200 que se hará al final del primer trimestre generará intereses de $\frac{6}{4} = 1.5\,\%$ por trimestre durante los demás siete trimestres. Entonces, usando la fórmula de interés compuesto, resulta:

$200\left(1+\frac{0.06}{4}\right)^7$ o $200(1+0.015)^7$ al final de la anualidad.

- El segundo pago de \$200 que se hará al final del segundo trimestre generará intereses a la misma tasa en los restantes seis trimestres; por lo cual la cantidad acumulada será:

$200(1+0.015)^6$ al final de la anualidad

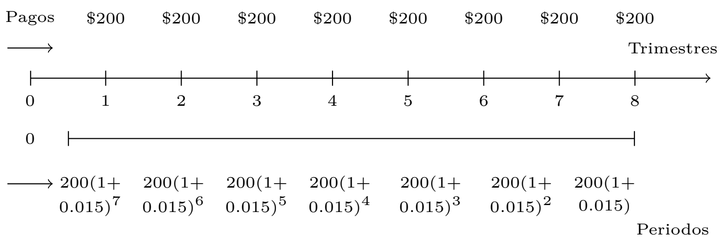
- El tercer pago de \$200 que se hará al final del tercer trimestre generará:

$200(1+0.015)^5$ al final de la anualidad

Y así sucesivamente. . .

Este caso se ejemplifica en la Figura 14:

FIGURA 14. *Descripción de una anualidad*



La cantidad total de la **anualidad** se obtiene sumando todos los períodos; a saber:

$S = 200 + 200(1+0.015) + 200(1+0.015)^2 + 200(1+0.015)^3 + 200(1+0.015)^4 + 200(1+0.015)^5 + 200(1+0.015)^6 + 200(1+0.015)^7$

Pero de manera resumida queda como sigue:

$$S = 200\left[\frac{(1+0.015)^8-1}{0.015}\right] = \$1,686.57$$

Con el fin de obtener una expresión general para calcular la cantidad acumulada de una anualidad, lo haremos con un ejemplo simbólico.

Una cantidad acumulada S de una anualidad se le deposita una suma de *\$P* en una cuenta al final de cada periodo durante n periodos. La cuenta gana intereses a una tasa r por período. Así, se tiene:

$$\mathrm{S = P + P(1+r) + P(1+r)^2 + P(1+r)^3 + \ldots + P(1+r)^{n-1}}$$

En síntesis:

$\mathrm{S = P}\left[\frac{(1+r)^n-1}{r}\right]$, donde r es diferente de cero. Valor futuro de una anualidad.

$\mathrm{R = P}\left[\frac{1-(1+r)^{-\mathrm{n}}}{r}\right]$, donde r es diferente de cero. Valor presente de una anualidad.

Aplicaciones

1. Encontrar el monto de una anualidad ordinaria de 12 pagos mensuales de \$100 que generan un interés de 12 % por año compuesto mensualmente.

Solución:

El interés $\mathrm{r} = \frac{0.12}{12} = 0.01$

$\mathrm{P} = \$100$

$\mathrm{n} = 12$

$S = 100\left[\frac{(1+0.01)^{12}-1}{0.01}\right]$

$S = \$1268.25$

2. Como plan de ahorros para garantizar la educación superior de su hijo, una pareja decide depositar \$300 a finales de

mes en una cuenta bancaria que paga intereses con una tasa de 6 % por año, compuesta mensualmente. Si el plan de ahorro comenzó cuando el niño tenía seis años, ¿cuánto dinero se habrá acumulado cuando cumpla 20 años?

Solución:

Datos: P = \$300

Periodo = mensual

Intereses: $r = \frac{0.06}{12} = 0.005$ por mes

n = 14 años

$\mathrm{S} = 300\left[\frac{(1+0.005)^{14(12)}-1}{0.005}\right]$

$\mathrm{S} = 300\left[\frac{(1.005)^{168}-1}{0.005}\right]$

$S = \$78,691.43$

3. Después de pagar un enganche de \$18 000 por un automóvil, el señor Fernández pagó \$1 200 mensuales durante 24 meses, con un interés de 18 % por año, compuesto mensualmente:

a) ¿Cuál era el costo original del auto? b) ¿Qué proporción de los pagos correspondía a cargos por interés?

Solución:

a) Como se puede observar, el inciso *a)* corresponde al cálculo del valor presente de la anualidad:

Intereses mensuales: $\mathrm{r} = \frac{0.18}{12} = 0.015$

$\mathrm{R} = 1200\left[\frac{1-(1+0.015)^{-24}}{0.015}\right]$

R = $ 24,036.50 Valor presente

Por lo tanto, el costo original del auto era el siguiente:

C = valor presente + el enganche

C = $24 036.50 + $18 000

C = $42 036.50

b) Cargos por interés

(24 mensualidades) ($1 200) Valor presente
28 800 – 24 036.50 = $4 763.50

Bibliografía

1. Aguilar, A., Bravo, V., Gallegos, A., Cerón, M., y Reyes, R. (2008). *Álgebra*. México: Prentice Hall.

2. Aguilar, A., Bravo, V., Gallegos, A., Cerón, M., y Reyes, R. (2009). *Matemáticas simplificadas*, 2ª ed. México: Pearson Educación de Prentice-Hall.

3. Alba, E. (2019a). *Matemáticas 2*. México: Santillana Compartir.

4. Alba, E. (2019b). *Matemáticas 3*. México: Santillana Compartir.

5. Aula Siglo XXI. (2002). Matemáticas y economía. *Curso de orientación escolar*. Madrid: Cultural.

6. Baldor, A. (2019). *Aritmética*, 4ª ed. México: Grupo Editorial Patria.

7. Baldor, A. (2007). *Álgebra*. 2ª ed. México: Grupo Editorial Patria.

8. Bonet, A. (2006). *Ayúdame con la tarea. Secundaria interactiva.* México: Euroméxico.

9. Diccionario enciclopédico (2003). *Larousse multimedia.* Barcelona: España.

10. Eason, G., Coles, C. W., y Gettinby, G. (1986). *Mathematics and Statistics for the Bio-Sciences.* Inglaterra: Ellis Horwood Limited.

11. Echegaray, J. (2001). *Geometría: ángulos, polígonos y circunferencias.* México: Editorial Bruño.

12. Gentile, R. (1996). *Notas de álgebra I.* 2ª ed. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

13. Joaquím, M. (1993). *Introducción al análisis matemático.* 7ª ed. México: Editorial Labor.

14. La Biblia de las Matemáticas (2005). *Aritmética.* México: Programa Educativo Visual.

15. Langdon, N., y Snap, C. (2007). *El fascinante mundo de las matemáticas.* México: Limusa.

16. Martínez, G., Lugo, T., y Villegas, C. (2013). *Matemáticas 2. Recursos didácticos.* México: Santillana.

17. Paredes, P., y Ramírez, M. (2008). *Apuntes de preparación para la prueba de selección universitaria. Matemática.* Chile.

18. Rubio, H. (2003). *Estadística experimental. Práctica, útil y sencilla.* Chihuahua: Letra C.

19. Sánchez, F. (2012). *Matemáticas 1. Construcción del pensamiento.* México: Fernández Editores.

20. Sánchez, F. (2007). *Matemáticas 1. A partir de la solución de problemas.* México: Fernández Editores.

21. Santiago, M., y Rodríguez, T. (2018). *Matemáticas 1.* México: Santillana Compartir.

22. Soler, F., Núñez, R., y Aranda, M. (2004). *Álgebra básica. Fundamentos de cálculo con aplicaciones a ciencias económicas y administrativas.* 2ª ed. México: ECOE Ediciones.

23. Tahan, M. (2005). *El hombre que calculaba.* México: Noriega Editores/Limusa.

24. Tan, S. T. (2007). *Matemáticas para administración y economía.* México: International Thomson Editores/McGraw-Hill.

Consultas en la web

1. Alfeld, P. (2009). Understanding Mathematics. Universidad de Utah. Recuperado el 25 de diciembre de 2019, en `https://`with division by zero. The problem is similar to that with division by zero. No value can be assigned to 0 to the power 0 without running into contradictions. Thus 0 to the power 0 is undefined!

2. Anualidades. Recuperado el 10 de agosto de 2023, en `https://bit.ly/3FP6teO`.

3. El contador de arena. Notación científica. Recuperado el 30 de julio de 2023, en `https://bit.ly/4lcJfiN`.

4. El Estadio Azteca. Recuperado el 15 de mayo de 2023, en `https://www.estadioazteca.com.mx/ficha-tecnica/`.

5. El mínimo común múltiplo y Máximo Común Divisor. (2015). Recuperado el 17 de junio de 2018, en `https://yosoytuprofe.20minutos.es/minimo-comun-multiplo/`.

6. El reparto proporcional. Recuperado el 3 de junio de 2020, en `https://bit.ly/3XJ0E8V`.

7. Fedriani M., E. M., y Tenorio V., A. F. (2004). Lecturas matemáticas. Los sistemas de numeración maya, azteca e inca, vol. 25, pp. 159-190. Recuperado el 22 de septiembre de 2022, en `https://es.slideshare.net/AllXulli/numeracion-maya-azteca-e-inca`.

8. Fernández, J. (2005). Historia del cero. Recuperado el 29 de septiembre de 2019, en `https://soymatematicas.com/la-historia-del-cero/`.

9. Historia del ajedrez y los granos de trigo. Recuperado el 30 de junio de 2023, en `https://goo.su/X3M62p`.

10. Interés simple. Recuperado el 21 de junio 2020, en `https://goo.su/HXxJ0x`.

11. La regla de tres. Recuperado el 31 de mayo de 2020, en `https://goo.su/74CkF`.

12. Los números imaginarios, en `https://goo.su/X1C9pPn`.

13. Los números irracionales. Recuperado el 29 de septiembre de 2019, en `https://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/numerosirracionales.html`.

14. Problemas de proporcionalidad directa e inversa. Recuperado el 31 de mayo de 2020, en `https://goo.su/ts7UNfh`.

15. Racionalización de radicales. Recuperado el 1° de agosto de 2023, en `https://goo.su/3q2qd`.

16. Ranking de los principales productores de trigo en el mundo 2022-2023. Recuperado el 30 de julio de 2023, en `https://shre.ink/Mqa8`.

17. Razonamiento matemático. Recuperado el 3 de noviembre de 2020, en `https://shre.ink/MqaI`.

18. III Carnaval de Matemáticas. Recuperado el 6 de julio de 2023, en `https://shre.ink/Mqaf)`.

19. Regla de tres simple inversa. Recuperado el 10 de agosto de 2023, en `https://shre.ink/Mqap`.

20. Números Irracionales. Recuperado el 10 de junio de 2020, en `https://shre.ink/MqaB`.

Jorge Tetumo García. Ingeniero Agrónomo con especialidad en Irrigación por la Universidad Autónoma Chapingo, Maestría en Ciencias en Ingeniería de Riego por el Colegio de Postgraduados. Experiencia en la docencia es desde nivel secundaria hasta maestría, impartiendo las asignaturas de matemáticas. En su experiencia profesional ha sido instructor del Instituto Mexicano del Petróleo, Evaluador y capacitador en los programas de Evaluación y Capacitación a prestadores de servicios profesionales del gobierno de Tabasco. Actualmente adscrito a la División Académica de Ciencias Agropecuarias de la UJAT, en donde ha impartido las asignaturas de Hidráulica, Algebra y trigonometría, Algebra Lineal, Ecuaciones Diferenciales, entre otras.

Wilfrido Miguel Contreras Sánchez
Secretario de Investigación, Posgrado y Vinculación

Pablo Marín Olán
Director de Difusión y Divulgación
Científica y Tecnológica

Analuisa Kú Ortíz
Jefa del Departamento Editorial
de Publicaciones No Periódicas

Este pequeño texto, *Razón de las matemáticas,* lo conforman tres unidades, en las que se hace un esbozo de los números necesarios en el manejo de las operaciones aritméticas y algebraicas; se desglosan y ejemplifican algunas propiedades de la aritmética, aunadas a leyes y criterios. Se hace énfasis en la aplicación de herramientas aritméticas útiles, en la solución de problemas reales; así como en el tratamiento de las técnicas y métodos que son útiles en el manejo de la geometría elemental, y la razón de ser de las expresiones algebraicas en los cálculos. Es necesario que el estudiante que se inicia en el estudio del álgebra se ubique en los conceptos, términos y lenguaje que cimientan el álgebra; por ejemplo, lo que concierne al lenguaje algebraico y el despeje, por mencionar algunos.

Jorge Tetumo García es Ingeniero Agrónomo con especialidad en Irrigación por la Universidad Autónoma Chapingo. Maestro en Ciencias en Ingeniería de Riego por el Colegio de Postgraduados. En su experiencia profesional ha sido instructor del Instituto Mexicano del Petróleo, así como evaluador y capacitador en los programas de evaluación y capacitación a prestadores de servicios profesionales del gobierno de Tabasco. Actualmente está adscrito a la División Académica de Ciencias Agropecuarias de la UJAT, en donde ha impartido las asignaturas de hidráulica, algebra y trigonometría, algebra lineal, ecuaciones diferenciales, entre otras.

UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"

ISBN 978-607-2628-54-0
9 786072 628540