



UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”

# El problema de máxima desviación en el plano

Raúl Temoltzi Ávila 

# El problema de máxima desviación en el plano



Guillermo Narváez Osorio  
**Rector**

# El problema de máxima desviación en el plano

Raúl Temoltzi Ávila 

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo  
Área Académica de Matemáticas y Física



UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”

Primera edición 2024  
© Universidad Juárez Autónoma de Tabasco  
[www.ujat.mx](http://www.ujat.mx)

ISBN: 978-607-606-664-5

Para su publicación esta obra ha sido dictaminada por el sistema académico de pares ciegos. Los juicios expresados son responsabilidad del autor o autores y fue aprobada para su publicación.

Queda prohibida la reproducción parcial o total del contenido de la presente obra, sin contar previamente con la autorización expresa y por escrito del titular, en términos de la Ley Federal de Derechos de Autor.

**Maquetación:** Raúl Temoltzi Ávila  
**Diseño de portada:** Leidy Gabriela Moreno Olán  
**Corrección de estilo:** Agustín Abreu Cornelio

Hecho en Villahermosa, Tabasco, México

*A mis papás: Gloria Juana y Francisco Luis,  
quienes siempre han apoyado mis decisiones*



# Índice general

Índice general .....	I
Resumen .....	1
<b>1</b> Elementos de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo . . . 3	
1.1 Introducción .....	3
1.2 Soluciones en el sentido de Filippov .....	13
1.3 Intersección transversal y la selección de norma mínima .....	20
1.4 Método de transformaciones puntuales en el plano .....	25
1.4.1 Una aplicación del método de transformaciones puntuales ..	29
<b>2</b> Conjuntos de alcanzabilidad de ecuaciones diferenciales lineales . . . . 39	
2.1 Introducción .....	39
2.2 Método del plano soporte de los conjuntos de alcanzabilidad ..	46
2.2.1 Conjuntos de alcanzabilidad de sistemas oscilatorios .....	49
<b>3</b> Planteamiento del problema de máxima desviación .....	82
3.1 Introducción .....	82
3.2 Formulación del problema de máxima desviación en el plano ..	89
3.3 Conjuntos de alcanzabilidad desde un punto en un semiplano .	94
3.4 Problema de máxima desviación en ecuaciones lineales .....	102
3.4.1 Criterio de estabilidad robusta .....	119
3.5 Una aplicación del problema de máxima desviación .....	123
3.5.1 Criterio de estabilidad robusta .....	139
Bibliografía .....	147
Índice alfabético .....	154



## Resumen

El problema de máxima desviación es un área de estudio que permite establecer problemas de optimización en las soluciones de ecuaciones diferenciales que admiten incertidumbre debido a la presencia de perturbaciones externas. En esta monografía se presenta una breve introducción al estudio del problema de máxima desviación con el objetivo de determinar los conjuntos de alcanzabilidad de ecuaciones diferenciales que se definen en el plano.

El material comprende tres capítulos. En el primer capítulo se presenta una breve introducción a las ecuaciones diferenciales que admiten discontinuidades. En este capítulo se discute el procedimiento para construir soluciones en el sentido de Filippov para tres casos que se presentan sobre una superficie de discontinuidad: movimiento de intersección transversal, movimiento deslizante atractor y movimiento deslizante repulsor. En el segundo capítulo se presenta el método del plano soporte para construir conjuntos de alcanzabilidad de una ecuación diferencial lineal de segundo orden. En el capítulo tres se presenta el problema de máxima desviación para una ecuación diferencial lineal de segundo orden y se muestra la relación con los conjuntos de alcanzabilidad. Los resultados obtenidos se emplean para establecer un criterio de estabilidad robusta.

**Palabras clave:** ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo, problema de máxima desviación, conjuntos de alcanzabilidad, estabilidad robusta.



Uno de los malentendidos más grandes sobre las matemáticas que se cometen en las aulas de la escuela es que el profesor siempre parece saber la respuesta a cada problema que estamos debatiendo. Esto da a los estudiantes la idea de que en algún lugar existe un libro con todas las respuestas correctas a todas las preguntas interesantes. Que los maestros tienen y parecerían tenerlo todo en su lugar. Realmente es lo contrario de la verdadera naturaleza de las matemáticas.

---

---

Leon Albert Henkin (1921–2006)  
Matemático estadounidense

# Elementos de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo

# 1

Aunque el fin sea penetrar en el misterio íntimo de la naturaleza y de ahí a aprender las verdaderas causas de los fenómenos, puede suceder, no obstante, que una determinada hipótesis ficticia pueda ser suficiente para explicar muchos fenómenos.

Leonhard Paul Euler (1707–1783)  
Matemático y físico suizo


## Resumen

Este apartado presenta de forma breve una introducción al concepto de solución de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo en el sentido de Filippov y, en particular, este tipo de soluciones se emplean en el método de transformaciones puntuales para construir soluciones oscilatorias.

## 1.1. Introducción

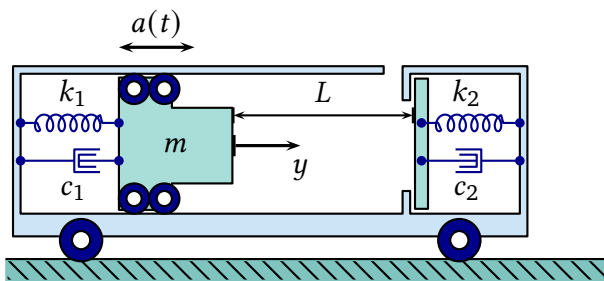
Los sistemas dinámicos que se describen por sistemas de ecuaciones diferenciales que admiten funciones discontinuas tienen diferentes aplicaciones cuando estos se emplean para modelar problemas en áreas como: electrónica, fenómenos con fricción seca o impacto, etc. A diferencia de las ecuaciones diferenciales que contienen en su representación funciones continuas, el problema de determinar soluciones en este tipo de ecuaciones diferenciales requiere un tratamiento especial.

Como ejemplo de un modelo que admite funciones discontinuas, se muestra a continuación un caso particular de un sistema dinámico descrito por una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que posee discontinuidades en sus coeficientes debido a la presencia de impactos. Este modelo es una adaptación de un modelo análogo que se presenta en [Ma et al. \(2006\)](#). Otros casos de estudio similares se pueden consultar en [Shaw y Holmes \(1983\)](#), [Natsiavas \(1990\)](#) y [Dyskin et al. \(2012\)](#).

 **Ejemplo 1.1.** Se considera un sistema mecánico en cuya dinámica existen discontinuidades en las variables de estado debido a la presencia de impactos. En el sistema se halla un bloque móvil de masa  $m$  que se mueve de forma horizontal, el cual se encuentra sujeto a un resorte con coeficiente de elasticidad  $k_1 > 0$ , y que experimenta una fuerza de fricción con coeficiente de fricción  $c_1 > 0$ , como se muestra en la [Figura 1.1](#). Se considera también un segundo móvil que está sujeto en el extremo opuesto por un resorte con coeficiente de elasticidad  $k_2 > 0$  y que experimenta una fuerza de fricción con coeficiente de fricción  $c_2 > 0$ .

El sistema admite una aceleración externa que se supone es descrita por una función  $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Cuando el primer móvil alcanza un valor constante  $L > 0$ , este móvil recibe un impacto debido al segundo móvil. Si es de interés el estado del primer móvil, entonces es claro que el sistema dinámico que describe su movimiento posee discontinuidades en el estado  $y = L$ .



**Figura 1.1.** Dinámica de un sistema mecánico con impactos.

La ecuación diferencial que gobierna la dinámica se obtiene de observar que si ocurre la desigualdad  $y \leq L$ , entonces el estado satisface la ecuación diferencial de segundo orden

$$m\ddot{y} + c_1\dot{y} + k_1y = a(t),$$

donde ( $\cdot$ ) se emplea para denotar diferenciación respecto al tiempo, mientras que si sucede la desigualdad  $y > L$ , el estado satisface la ecuación diferencial

$$m\ddot{y} + (c_1 + c_2)\dot{y} + (k_1 + k_2)y = a(t).$$

Por lo tanto, al definir las funciones continuas a trozos

$$\widehat{\mu}(y) = \begin{cases} \mu_1, & y \leq L, \\ \mu_2, & y > L, \end{cases} \quad \widehat{\omega}(y) = \begin{cases} \omega_1^2, & y \leq L, \\ \omega_2^2, & y > L, \end{cases}$$

donde  $\mu_1 = c_1/2m$ ,  $\mu_2 = (c_1 + c_2)/2m$ ,  $\omega_1^2 = k_1/m$ ,  $\omega_2^2 = (k_1 + k_2)/m$ , la dinámica del sistema se puede determinar por la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$\ddot{y} + 2\widehat{\mu}(y)\dot{y} + \widehat{\omega}(y)y = u(t),$$

con  $u(t) = a(t)/m$ .

El cambio de variables  $y_1 = y$  y  $y_2 = \dot{y}$ , permite expresar la ecuación diferencial en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden


$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\widehat{\omega}(y_1) & -2\widehat{\mu}(y_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t),$$

el cual tiene la forma

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{b}u(t),$$

donde la función del lado derecho  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se describe por las componentes escalares

$$f_1(y_1, y_2) = y_2, \quad f_2(y_1, y_2) = -\widehat{\omega}(y_1)y_1 - 2\widehat{\mu}(y_1)y_2.$$

Como la segunda función es discontinua en  $y_1 = L$ , el análisis que deba realizarse para obtener una solución en el espacio de fases, debe tener en consideración tal discontinuidad. 

Este problema será considerado más adelante en la [Sección 3.5](#).

Cuando en el sistema de ecuaciones diferenciales existen funciones discontinuas, se pueden emplear herramientas adicionales que permiten obtener propiedades sobre las soluciones. A continuación se presentan, con carácter introductorio, tales resultados. Estos resultados son tratados con mayor detalle en [Butennin et al. \(1987\)](#), [Filippov \(1988\)](#) y [Yakubovich et al. \(2004\)](#).

Se considera el problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y} \in \Omega, \quad (1.1 \blacktriangleleft)$$

donde  $\mathbf{f}: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función acotada y continua a trozos. Se supone que el espacio de fases  $\Omega$  es un conjunto abierto y conexo de interior no vacío en  $\mathbb{R}^n$ , es decir, un dominio en  $\mathbb{R}^n$ , y que  $\mathbf{f}$  posee un número finito de discontinuidades en  $\Omega$ , por ejemplo,  $D = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m\}$ .

Cuando  $\mathbf{f}$  es una función continua sobre  $\Omega$ , la existencia y unicidad de soluciones en un intervalo  $[0, \tau]$ , quizá suficientemente pequeño, se obtiene a partir del Teorema de Picard, ver [Sánchez \(1968\)](#), [Sotomayor \(1979\)](#) y [Perko \(2001\)](#). Cuando  $\mathbf{f}$  es una función discontinua, la situación es distinta. En particular, en los [Ejemplos 1.2 a 1.4](#) que se muestran más adelante en las [Páginas 8 a 11](#), en los que se consideran ecuaciones diferenciales de primer orden con lado derecho discontinuo, se muestran las dificultades que se presentan al tratar de hallar una solución.

Las discontinuidades que se suelen considerar en las aplicaciones, surgen de emplear *funciones continuas a trozos* y, en algunos casos, *funciones suaves a trozos*.

Una función  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es *continua a trozos*, si el intervalo  $[a, b]$  admite una partición finita e irreducible  $a = y_0 < y_1 < \dots < y_n < y_{n+1} = b$ , tal que para cada  $j = 1, \dots, n$ , existe una función continua  $g_j: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface  $h(y) = g_j(y)$  para todo  $y \in (y_j, y_{j+1})$ . Se dice entonces que  $h$  posee una *extensión continua* en el intervalo  $[a, b]$ . De manera análoga, una

función  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es *suave a trozos*, si existe una partición finita e irreducible  $a = y_0 < y_1 < \dots < y_n < y_{n+1} = b$  del intervalo  $[a, b]$  tal que para cada  $j = 1, \dots, n$ , existe una función  $g_j: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  con derivada continua tal que se satisface  $h(y) = g_j(y)$  y  $\frac{d}{dy}h(y) = \frac{d}{dy}g_j(y)$  para todo  $y \in (y_j, y_{j+1})$ . Se dice entonces que  $h$  posee una *extensión suave* en el intervalo  $[a, b]$

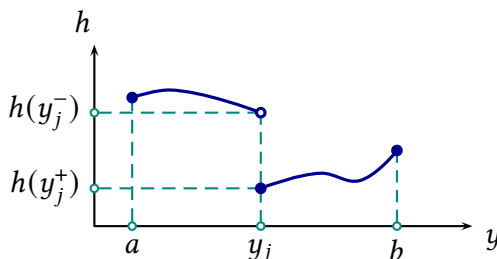
El tipo de discontinuidades de una función  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua a trozos, se caracteriza por su *salto de discontinuidad* en un punto de discontinuidad  $y_j$ , el cual se define por

$$\Delta h(y_j) = h(y_j^+) - h(y_j^-),$$

donde

$$h(y_j^+) = \lim_{y \rightarrow y_j^+} h(y), \quad h(y_j^-) = \lim_{y \rightarrow y_j^-} h(y),$$

existen pero poseen valores distintos, ver la [Figura 1.2](#). De la definición de salto de discontinuidad se sigue que si  $\Delta h(y) = 0$  para todo  $y \in [a, b]$ , entonces necesariamente  $h$  debe ser una función continua.



**Figura 1.2.** Discontinuidad de una función continua a trozos.

El conjunto de funciones continuas a trozos que son definidas en  $A \subset \mathbb{R}$  se denota por  $\mathcal{PC}(A)$ . De la misma manera, el conjunto de funciones suaves a trozos que son definidas en  $A \subset \mathbb{R}$  se denota por  $\mathcal{PC}^1(A)$ .

Una función continua a trozos que se utiliza frecuentemente, y que se obtiene de manera natural en varios sistemas dinámicos en los cuales se exige

cierto comportamiento, es la *función signo*:


$$\text{sign}(y) = \begin{cases} -1, & y < 0, \\ +1, & y > 0. \end{cases}$$

Se observa que la función signo *no* se define en  $y = 0$ . No obstante, más adelante se mostrará que, en algunas ocasiones, es necesario definir esta función en  $y = 0$  de cierta manera conveniente.

Los ejemplos son diez veces más útiles que los preceptos.

Charles James Fox (1749–1806)  
Estadista inglés

En los siguientes ejemplos, los cuales han sido adaptados de **Filippov (1988)**, se muestran algunas dificultades que surgen al tratar de hallar soluciones en ecuaciones diferenciales cuando el lado derecho es una función discontinua.

 **Ejemplo 1.2.** Se considera el problema de valores iniciales

$$\dot{y} = 2 - \text{sign}(y), \quad y(0) = y_0, \quad (1.2 \blacktriangleleft)$$

Si se supone que  $y < 0$ , la ecuación diferencial toma la forma  $\dot{y} = 3$ , cuya solución es definida por  $y(t) = 3t + c_1$ . Si se supone que  $y > 0$ , la ecuación diferencial toma la forma  $\dot{y} = 1$ , cuya solución es  $y(t) = t + c_2$ .

Se pueden discutir los siguientes casos:

- Si  $y_0 > 0$ , entonces la solución de (1.2) es  $y(t) = t + y_0$ , la cual está definida para todo  $t > 0$ , es decir, el sistema (1.2) admite solución única para todo  $t > 0$ .
- Si  $y_0 < 0$ , entonces se considera inicialmente  $y(t) = 3t + y_0$  como parte de la solución de (1.2) para  $0 \leq t < t_0 = -\frac{1}{3}y_0$ , mientras que si  $t > t_0$ , entonces se considera como parte de la solución a  $y(t) = t + \frac{1}{3}y_0$ . Por lo

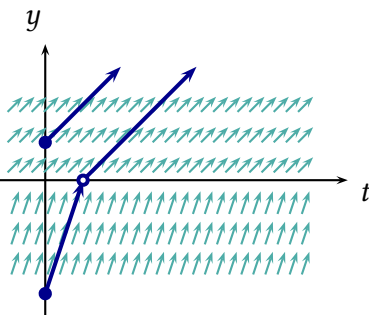
tanto, la solución se puede considerar en la forma

$$y(t) = \begin{cases} 3t + y_0, & t < t_0, \\ t + \frac{1}{3}y_0, & t > t_0. \end{cases}$$

Es claro que se cumple  $y(t_0^-) = y(t_0^+) = 0$ . En consecuencia, se podría definir  $y(t_0) = 0$ , no obstante, la función así definida no es diferenciable y, por lo tanto, no es solución de (1.2).

- En el caso  $y_0 = 0$  no se puede definir una solución, pues la función signo no está definida en el punto  $y = 0$ .

Se concluye que la ecuación diferencial (1.2) no admite solución en el sentido usual en el punto de discontinuidad  $y_0 = 0$ . La representación geométrica de las soluciones se muestra en la [Figura 1.3](#). ▀▀▀▀



**Figura 1.3.** Campo de direcciones del problema de valor inicial del [Ejemplo 1.2](#).

**Ejemplo 1.3.** Se considera ahora el problema de valores iniciales con lado derecho discontinuo

$$\dot{y} = -\text{sign}(y), \quad y(0) = y_0, \quad (1.3 \blacktriangleleft)$$

Si se procede como se hizo en el [Ejemplo 1.2](#), se observa que si  $y < 0$ , entonces la ecuación diferencial toma la forma  $\dot{y} = 1$ , cuya solución se describe



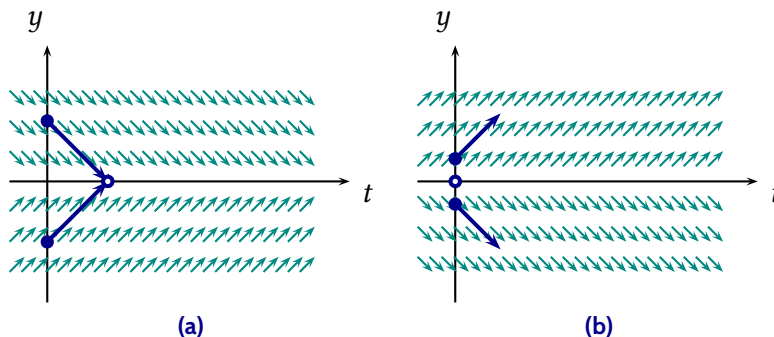
por  $y(t) = t + c_1$ , mientras que si  $y > 0$ , entonces la ecuación diferencial toma la forma  $\dot{y} = -1$ , cuya solución es  $y(t) = -t + c_2$ .

Se tienen entonces los siguientes casos:

- Cuando  $y_0 > 0$ , se considera como solución la función  $y(t) = -t + y_0$  para todo  $t < t_0 = y_0$ .
- En el caso en que  $y_0 < 0$ , la parte que corresponde a la solución de la ecuación diferencial se describe por  $y(t) = t + y_0$ , la cual es definida para todo  $t < t_0 = -y_0$ .
- En el caso  $y_0 = 0$  no podemos definir una solución, ya que la función signo no está definida en el punto  $y = 0$ .

En los primeros dos casos la solución tiende a cero si  $t \rightarrow t_0$ , por lo tanto, sería natural definir  $y(t) = 0$  para todo  $t \geq t_0$ , no obstante, esta función no satisface la ecuación diferencial (1.3) al no estar definida la función signo en  $y = 0$ . Como consecuencia, en ambos casos la solución no se puede extender para todo  $t \geq t_0$ .

En la [Figura 1.4a](#) se muestra el campo de direcciones y algunas soluciones particulares. ▀▀▀▀



**Figura 1.4.** Campo de direcciones del problema de valor inicial de los [Ejemplos 1.3 y 1.4](#).


 **Ejemplo 1.4.** Se considera el problema de valor inicial

$$\dot{y} = \text{sign}(y), \quad y(0) = y_0, \quad (1.4 \blacktriangleleft)$$

Se observa que cuando  $y < 0$ , la ecuación diferencial toma la forma  $\dot{y} = -1$ , cuya solución es  $y(t) = -t + c_1$ , mientras que si  $y > 0$ , la ecuación diferencial toma la forma  $\dot{y} = 1$ , cuya solución es  $y(t) = t + c_2$ .

Tienen lugar los siguientes casos:

- Si se considera el caso  $y_0 > 0$ , entonces se obtiene  $y(t) = t + y_0$  como única solución para todo  $t > 0$ .
- Si  $y_0 < 0$ , entonces la solución es  $y(t) = -t + y_0$ , la cual, al igual que en el caso anterior, es única para todo  $t > 0$ .
- En el caso en que  $y_0 = 0$ , no podemos definir una solución, pues la función signo no está definida en el punto  $y = 0$ .

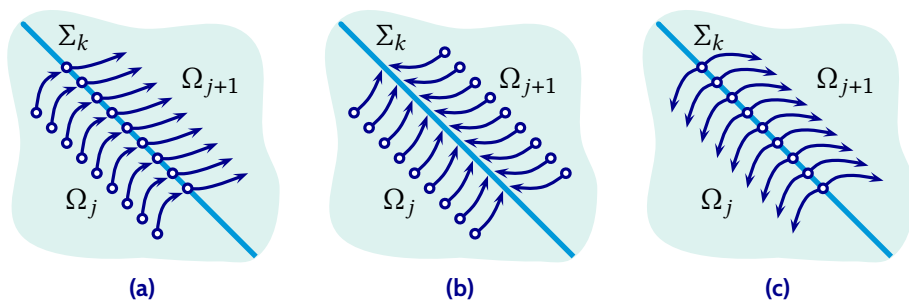
La [Figura 1.4b](#) muestra las soluciones de (1.4) en los primeros dos casos descritos. De acuerdo al campo vectorial asociado a (1.4), no es claro cómo definir una solución en el punto  $y_0 = 0$ . 

Los [Ejemplos 1.2 a 1.4](#) sugieren que no es posible considerar el concepto usual de solución en la ecuación diferencial (1.1) si el lado derecho es discontinuo. Por lo tanto, parece razonable considerar una forma alternativa que permita construir soluciones en tal situación. El siguiente método de construcción, el cual es una adaptación de [Yakubovich et al. \(2004\)](#), se puede tomar en consideración.

Se supone que para  $\mathbf{p}_k \in D$  existe una superficie  $\Sigma_k \subset \Omega$ , llamada *superficie de discontinuidad*, que contiene al punto  $\mathbf{p}_k$  y tal que  $f$  es discontinua en  $\Sigma_k$ . La existencia de estas superficies de discontinuidad permite dividir el espacio de fases  $\Omega$  en  $s$  regiones  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_s$  de interior no vacío, de tal manera que  $\Omega = \bigcup_{k=1}^s \overline{\Omega}_k$  y tales que  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ , donde  $i, j = 1, \dots, s$ , y en cada una de las cuales el lado derecho de la ecuación diferencial (1.1) es continuo. En esta partición, es de interés el tipo de soluciones que se pueden determinar en dos regiones adyacentes  $\Omega_j$  y  $\Omega_{j+1}$  que comparten una

superficie de discontinuidad  $\Sigma_k$ , es decir, regiones en las cuales se cumple la igualdad  $\Sigma_k = \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_{j+1}$ . Se considera la situación en la que, en tales regiones, las soluciones deben tener uno de los tres tipos de comportamiento mostrados en la [Figura 1.5](#), los cuales comprenden, como caso particular, los campos vectoriales considerados en los [Ejemplos 1.2 a 1.4](#).

En la situación mostrada en la [Figura 1.5a](#), si una trayectoria pasa por  $\Sigma_k$ , y la correspondiente solución definida en  $\Omega_j$  alcanza la superficie de discontinuidad en un instante  $T > t_0$ , entonces es posible determinar una única solución en  $\Omega_{j+1}$  para valores  $t > T$  suficientemente cercanos a  $T$ , de tal manera que la correspondiente solución definida en el conjunto  $\overline{\Omega}_j \cup \overline{\Omega}_{j+1}$  es continua. En este caso se dice que la solución tiene un *movimiento de intersección transversal* sobre la superficie de discontinuidad. Con el fin de que esto suceda, es necesario definir de alguna manera el lado derecho de la ecuación diferencial (1.1) en  $\Sigma_k$ , con el objetivo de que la solución pueda transitar de  $\Omega_j$  a  $\Omega_{j+1}$ .



**Figura 1.5.** Tipos de soluciones de la ecuación diferencial (1.1) en una superficie de discontinuidad  $\Sigma_k$  cuando el lado derecho es discontinuo: (a) movimiento de intersección transversal, (b) movimiento deslizante atractor y (c) movimiento deslizante repulsor.

En el caso mostrado en la [Figura 1.5b](#), las trayectorias concurren en puntos de  $\Sigma_k$ . Si una de estas trayectorias alcanza esta superficie en un instante  $t = T$ , entonces no es posible abandonarla, y la única posibilidad de extender la solución para valores  $t > T$ , es que la solución debe continuar a lo largo de la superficie de discontinuidad. Se dice entonces que existe un *desliza-*

mimiento sobre  $\Sigma_k$ , y la solución correspondiente tiene un *movimiento en modo deslizante*. La única posibilidad de determinar trayectorias con movimiento deslizante, requiere de poder definir de manera apropiada el lado derecho de la ecuación diferencial (1.1) sobre la superficie  $\Sigma_k$ .

Finalmente, en el esquema mostrado en la Figura 1.5c, una solución no puede alcanzar la superficie de discontinuidad a menos que esta inicie sobre ella. En este caso, la solución puede dejar la superficie en cualesquiera de sus lados, puede permanecer sobre ella por siempre, o bien, permanecer sobre ella por un tiempo finito y después abandonarla. El último caso es similar al que se describió previamente. Una vez más, a fin de poder construir una solución con movimiento deslizante, se requiere definir de manera apropiada el lado derecho de (1.1) sobre la superficie de discontinuidad  $\Sigma_k$ .

En principio, no es claro cómo definir el lado derecho de la ecuación diferencial (1.1) sobre la superficie de discontinuidad en cada uno de los casos descritos, así como tampoco es claro el concepto de solución que se debe emplear. Un método que resulta útil es el desarrollado por el matemático ruso Aleksei Fedorovich Filippov (1923–2006).

## 1.2. Soluciones en el sentido de Filippov

En este apartado se presenta de forma breve la construcción de las soluciones en el sentido de Filippov. Un análisis completo sobre dicha construcción se puede consultar en Filippov (1988). El concepto involucra funciones *absolutamente continuas*, cuyas propiedades se pueden consultar en Royden y Fitzpatrick (2010).

**Definición 1.1.** Una función  $\mathbf{y}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es *absolutamente continua* si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]$  es una colección finita de intervalos disjuntos dos a dos de  $[a, b]$  tales que  $\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta$ , entonces  $\sum_{k=1}^n \|\mathbf{y}(b_k) - \mathbf{y}(a_k)\| < \epsilon$ .

Un resultado sobre funciones absolutamente continuas que es equivalente a la Definición 1.1 es el siguiente: *una función  $\mathbf{y}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es absoluta-*

mente continua si, y sólo si, existe una función  $\mathbf{h}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  integrable en el sentido de Lebesgue tal que

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(a) + \int_a^t \mathbf{h}(t) dt, \quad t \in [a, b],$$

ver Kolmogorov y Fomín (1975). Por lo tanto, una función absolutamente continua  $\mathbf{y}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable casi en todas partes sobre  $[a, b]$  y, en tal caso, se sigue que  $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{h}(t)$  para casi todo  $t \in [a, b]$ .

Se presenta a continuación la idea geométrica de los conceptos básicos del estudio de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo. La exposición es una adaptación de la referencia Dieci y Lopez (2009).

Se analiza el caso particular en el que existe una única superficie de discontinuidad  $\Sigma$ , de tal manera que el espacio de fases es dividido en dos subconjuntos  $\Omega_-$  y  $\Omega_+$ . Por lo tanto,  $\Omega = \Omega_- \cup \Sigma \cup \Omega_+$  y  $\Omega_- \cap \Omega_+ = \emptyset$ . En este caso, la ecuación diferencial con lado derecho discontinuo se expresa por:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{cases} \mathbf{f}_-(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega_-, \\ \mathbf{f}_+(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega_+, \end{cases} \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad (1.5 \blacktriangleleft)$$

donde  $\mathbf{y}_0 \in \Omega \setminus \Sigma$ . Se supone que la superficie de discontinuidad se define por una función escalar indicadora  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

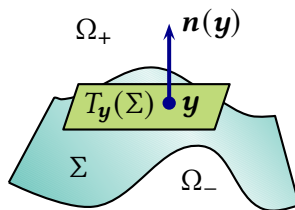
$$\Sigma = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{y}) = 0\},$$

y, por lo tanto,

$$\Omega_- = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{y}) < 0\} \quad \text{y} \quad \Omega_+ = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{y}) > 0\}.$$

La elección de la función escalar indicadora se hace de tal manera que esta sea por lo menos dos veces diferenciable con segunda derivada continua, y tal que  $\nabla h(\mathbf{y}) \neq 0$  para todo  $\mathbf{y} \in \Sigma$ . Bajo este supuesto, el vector normal unitario  $\mathbf{n}(\mathbf{y})$  que es perpendicular al plano tangente  $T_{\mathbf{y}}(\Sigma)$  en  $\mathbf{y} \in \Sigma$  es

$$\mathbf{n}(\mathbf{y}) = \frac{\nabla h(\mathbf{y})}{\|\nabla h(\mathbf{y})\|}, \quad \mathbf{y} \in \Sigma,$$



**Figura 1.6.** Plano tangente a la superficie de discontinuidad.

como se muestra en la [Figura 1.6](#). Se supone que  $\mathbf{n}(\mathbf{y})$  es dirigido hacia  $\Omega_+$ .

Una suposición que se hace sobre las funciones  $f_-$  y  $f_+$  es que estas deben tener derivada continua en  $\Sigma \cup \Omega_-$  y  $\Sigma \cup \Omega_+$ , respectivamente, y que tales funciones no se pueden extender de manera suave en los respectivos complementos  $\Omega_+$  y  $\Omega_-$ . También se supone que  $f_-(\mathbf{y})$  y  $f_+(\mathbf{y})$  no poseen necesariamente punto alguno en común cuando  $\mathbf{y} \in \Sigma$ .

La forma de definir el lado derecho de la ecuación diferencial (1.5) en el punto  $\mathbf{y} \in \Sigma$  depende, en primera instancia, de la situación práctica e interés que describa el modelo, y sobre todo, de la posibilidad de garantizar la *existencia y unicidad de soluciones*. Una forma práctica de hacer esto consiste en reemplazar la función del lado derecho en (1.5) por una extensión a una *función de múltiples valores*, es decir, una función  $F_f: \Omega \rightarrow 2^\Omega$  que asigna a cada punto  $\mathbf{y} \in \Omega$  un conjunto  $F_f(\mathbf{y}) \subset \Omega$  de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{y}} \in F_f(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad (1.6 \blacktriangleleft)$$

con

$$F_f(\mathbf{y}) = \begin{cases} \{f_-(\mathbf{y})\}, & \mathbf{y} \in \Omega_-, \\ \overline{\text{co}}[\{f_-(\mathbf{y}), f_+(\mathbf{y})\}], & \mathbf{y} \in \Sigma, \\ \{f_+(\mathbf{y})\}, & \mathbf{y} \in \Omega_+, \end{cases}$$

y donde  $\overline{\text{co}}[A]$  denota la clausura del menor conjunto convexo cerrado que

contiene a  $A$ , llamado *casco convexo de Filippov*. En el caso actual

$$\overline{\text{co}} \left[ \{f_-(\mathbf{y}), f_+(\mathbf{y})\} \right] = \left\{ \mathcal{F}_f(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{F}_f(\mathbf{y}) = (1 - \alpha)f_-(\mathbf{y}) + \alpha f_+(\mathbf{y}), \alpha \in [0, 1] \right\}. \quad (1.7 \blacktriangleleft)$$

La extensión del sistema (1.5) al sistema (1.6) es conocido como *método de regularización de Filippov*<sup>1</sup>, y el sistema (1.6) es un caso particular de una *inclusión diferencial*, es decir, un sistema dinámico que admite múltiples dinámicas de un estado dado, las cuales se describen por

$$\dot{\mathbf{y}} \in F(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad (1.8 \blacktriangleleft)$$

donde  $\mathbf{y}: [t_0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función absolutamente continua,  $\mathbf{y}_0$  es el estado inicial del sistema dinámico, y  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow 2^\Omega$  es una función de múltiples valores. Un análisis sobre el estudio de inclusiones diferenciales se puede consultar en [Aubin y Celina \(1984\)](#) o [Rios \(2016\)](#).

La inclusión diferencial (1.6), y en general, toda inclusión diferencial de la forma (1.8), posee una riqueza matemática más exquisita que el sistema (1.5), debido a que el lado derecho de una inclusión diferencial brinda la posibilidad de alojar más derivadas por cada estado del sistema y, como consecuencia, una inclusión diferencial puede admitir más de una solución por cada condición inicial. Esta propiedad permite considerar una inclusión diferencial como una herramienta útil en el estudio de sistemas dinámicos no lineales y discontinuos, incluidos los sistemas dinámicos controlables.

<sup>1</sup>En general, el método de regularización de Filippov consiste en aplicar un operador funcional  $F_f: \Omega \rightarrow 2^\Omega$  a una función  $f: \Omega \rightarrow \Omega$  definido por

$$F_f(\mathbf{y}) = \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcap_{\substack{Z \subset \Omega \\ \lambda(Z) = 0}} \overline{\text{co}} [f(B_\epsilon(\mathbf{y}) \setminus Z)],$$

donde  $\lambda$  denota la medida de Lebesgue y  $B_\epsilon(\mathbf{y}) = \{z \in \Omega \mid \|z - \mathbf{y}\| < \epsilon\}$  denota la bola abierta de radio  $\epsilon > 0$  y centro  $\mathbf{y} \in \Omega$ . Cuando la función es definida por el lado derecho de la ecuación diferencial (1.5), la aplicación del operador de Filippov conduce a la función de múltiples valores que define el lado derecho de la inclusión diferencial (1.6), ver [Biles y Spraker \(1992\)](#) y [Spraker y Biles \(1994\)](#). El método de regularización de Filippov también es conocido como *método convexo de Filippov*.

El concepto de solución de la ecuación diferencial con lado derecho discontinuo (1.5) está relacionado con el concepto de solución de la inclusión diferencial (1.6), y este se considera en el sentido de A. F. Filippov:

**Definición 1.2.** Una función  $\mathbf{y}: [t_0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolutamente continua es *solución de la ecuación diferencial (1.5) en el sentido de Filippov*, si para casi todo  $t \in [t_0, \tau]$  se satisface la inclusión  $\dot{\mathbf{y}}(t) \in F(\mathbf{y}(t))$ , donde  $F$  es la función de múltiples valores de la inclusión diferencial (1.8).

De la **Definición 1.2** se sigue que puede existir un subconjunto de medida nula  $N$  de  $[t_0, \tau]$ , en el sentido de Lebesgue, tal que  $\dot{\mathbf{y}}(t) \notin F(\mathbf{y}(t))$  para todo  $t \in N$ .

Las condiciones bajo las cuales existe una solución de (1.5) con condición inicial  $\mathbf{y}_0$  en  $\Omega \setminus \Sigma$ , y con la propiedad de que esta alcance la superficie de discontinuidad en  $\hat{\mathbf{y}} \in \Sigma$  en un instante  $T > t_0$ , se obtienen por elegir apropiadamente de (1.6) un campo de direcciones mediante el cual sea posible definir (1.5) de forma apropiada sobre la superficie de discontinuidad. La forma de hacer esto no es única, en particular, cuando se consideran soluciones en el sentido de Filippov, el método permite decidir qué hacer en tal situación y cómo definir el campo vectorial.

Se elige  $\hat{\mathbf{y}} \in \Sigma$  y se considera el vector  $\mathbf{n}(\hat{\mathbf{y}})$  que posee dirección hacia  $\Omega_+$  y que inicia sobre el plano  $T_{\hat{\mathbf{y}}}(\Sigma)$ . En el punto de discontinuidad  $\hat{\mathbf{y}} \in \Sigma$  se definen los límites laterales

$$f_-(\hat{\mathbf{y}}) = \lim_{\substack{\mathbf{y} \in \Omega_- \\ \mathbf{y} \rightarrow \hat{\mathbf{y}}}} f_-(\mathbf{y}) \quad \text{y} \quad f_+(\hat{\mathbf{y}}) = \lim_{\substack{\mathbf{y} \in \Omega_+ \\ \mathbf{y} \rightarrow \hat{\mathbf{y}}}} f_+(\mathbf{y}),$$

y se supone que

$$\mathbf{n}(\hat{\mathbf{y}})^\top f_-(\hat{\mathbf{y}}) \neq 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{n}(\hat{\mathbf{y}})^\top f_+(\hat{\mathbf{y}}) \neq 0.$$

Lo anterior significa que cada solución de la ecuación diferencial (1.5) no es tangente a la superficie de discontinuidad en todo instante  $t \in [0, \tau]$ .

Se obtienen los siguientes casos particulares.

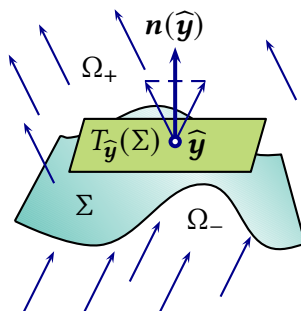


## Movimiento de intersección transversal

Si en el punto de discontinuidad  $\hat{\mathbf{y}} \in \Sigma$  se satisface la desigualdad

$$(\mathbf{n}(\hat{\mathbf{y}})^\top \mathbf{f}_-(\hat{\mathbf{y}})) (\mathbf{n}(\hat{\mathbf{y}})^\top \mathbf{f}_+(\hat{\mathbf{y}})) > 0,$$

entonces se obtiene la situación mostrada en la [Figura 1.7](#) y el [Ejemplo 1.2](#), y se dice que la solución tiene un *movimiento de intersección transversal*. En tal caso, cada solución de la ecuación diferencial (1.5) en el sentido de Filippov que no inicia en  $\Sigma$ , y que alcanza esta superficie en un instante  $T > t_0$ , existe y es única para todo  $t > T$ , a condición de no existir movimientos deslizantes sobre  $\Sigma$ . Esto se sigue de observar que el conjunto  $N = \{t \in [0, \tau] \mid \mathbf{y}(t) \in \Sigma\}$  es de medida nula siempre que no existan deslizamientos sobre  $\Sigma$ , ver la [Figura 1.7](#).



**Figura 1.7.** Intersección de tipo transversal de las soluciones en la superficie de discontinuidad.

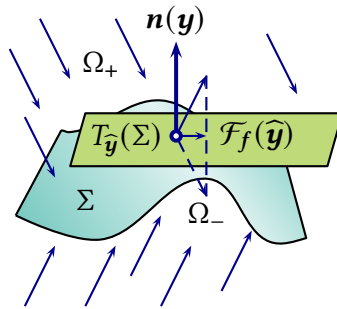
Si la superficie de discontinuidad no se alcanza en un instante finito por una solución de la ecuación diferencial (1.5), entonces esta también es única, de acuerdo al Teorema de Picard, el cual da condiciones sobre existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales con lado derecho continuo, ver [Sotomayor \(1979\)](#).

## Movimientos deslizantes atractor y repulsor

Si en un punto de discontinuidad  $\hat{\mathbf{y}} \in \Sigma$  se satisface la desigualdad

$$(\mathbf{n}(\hat{\mathbf{y}})^\top \mathbf{f}_-(\hat{\mathbf{y}})) (\mathbf{n}(\hat{\mathbf{y}})^\top \mathbf{f}_+(\hat{\mathbf{y}})) < 0,$$

entonces se tiene un modo deslizante en  $\hat{\mathbf{y}}$ . La desigualdad se debe a dos situaciones: movimiento deslizante atractor y/o movimiento deslizante repulsor.



**Figura 1.8.** Atracción de las soluciones a la superficie de discontinuidad.

**Movimiento deslizante atractor.** Si la desigualdad resultante se obtiene como consecuencia de  $\mathbf{n}(\hat{\mathbf{y}})^\top \mathbf{f}_-(\hat{\mathbf{y}}) > 0$  y  $\mathbf{n}(\hat{\mathbf{y}})^\top \mathbf{f}_+(\hat{\mathbf{y}}) < 0$  para  $\hat{\mathbf{y}} \in \Sigma$ , entonces se obtiene un *movimiento deslizante atractor*, ver la [Figura 1.8](#) y el [Ejemplo 1.3](#). En tal caso, toda solución que inicie fuera de la superficie de discontinuidad  $\Sigma$  y la alcance en un instante finito  $T > t_0$ , esta será absorbida por dicha superficie en todo instante posterior. Lo anterior se logra si se define el campo vectorial sobre  $\Sigma$  de acuerdo a la relación (1.7), es decir, por considerar el campo vectorial  $\mathcal{F}_f: \Sigma \rightarrow \Sigma$  en (1.6) definido mediante la expresión

$$\mathcal{F}_f(\hat{\mathbf{y}}) = (1 - \alpha(\hat{\mathbf{y}}))\mathbf{f}_-(\hat{\mathbf{y}}) + \alpha(\hat{\mathbf{y}})\mathbf{f}_+(\hat{\mathbf{y}}), \quad \hat{\mathbf{y}} \in \Sigma,$$

donde  $\alpha(\hat{\mathbf{y}}) \in [0, 1]$  es el valor para el cual  $\mathcal{F}_f(\hat{\mathbf{y}})$  debe estar en el plano tangente  $T_{\hat{\mathbf{y}}}(\Sigma)$  de  $\Sigma$  en  $\hat{\mathbf{y}}$ , es decir, donde  $\mathbf{n}(\hat{\mathbf{y}})^\top \mathcal{F}_f(\hat{\mathbf{y}}) = 0$ . Por lo tanto,

tomando esto en consideración, se obtiene

$$\alpha(\widehat{\mathbf{y}}) = \frac{\mathbf{n}(\widehat{\mathbf{y}})^\top \mathbf{f}_-(\widehat{\mathbf{y}})}{\mathbf{n}(\widehat{\mathbf{y}})^\top (\mathbf{f}_-(\widehat{\mathbf{y}}) - \mathbf{f}_+(\widehat{\mathbf{y}}))}.$$

Bajo tal consideración, se puede definir de manera apropiada el campo vectorial de la ecuación diferencial (1.5) sobre la superficie de discontinuidad, la cual puede ser reemplazada por la nueva ecuación diferencial

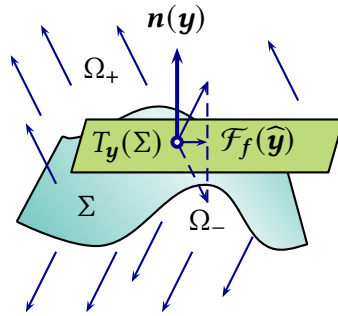
$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{cases} \mathbf{f}_-(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega_-, \\ \mathcal{F}_f(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Sigma, \\ \mathbf{f}_+(\mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega_+, \end{cases} \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0.$$

La solución de la ecuación anterior en el sentido de Filippov es única solamente para todo  $t > t_0$ .

**Movimiento deslizante repulsor.** Como complemento a un modo deslizante atractor, si resultan las desigualdades  $\mathbf{n}(\widehat{\mathbf{y}})^\top \mathbf{f}_-(\widehat{\mathbf{y}}) < 0$  y  $\mathbf{n}(\widehat{\mathbf{y}})^\top \mathbf{f}_+(\widehat{\mathbf{y}}) > 0$  cuando  $\widehat{\mathbf{y}} \in \Sigma$ , entonces se obtiene un *movimiento deslizante repulsor*, ver la [Figura 1.9](#) y el [Ejemplo 1.4](#). Un modo deslizante repulsor no conduce a unicidad de soluciones cuando la solución del sistema comienza sobre la superficie de discontinuidad, tal solución puede ingresar indistintamente a  $\Omega_-$  como a  $\Omega_+$  en cualquier instante. Cuando la solución comienza fuera de la superficie de discontinuidad, la solución del sistema (1.6) es única.

### 1.3. Intersección transversal y la selección de norma mínima

Se observa de los casos descritos que, al considerar soluciones que cruzan una superficie de discontinuidad de forma transversal, el problema se puede abordar de forma práctica e intuitiva, mientras que toda solución en modo deslizante requiere un tratamiento especial. En realidad, la implementación práctica de un método para determinar soluciones en modo deslizante en un sistema dinámico puede no ser una tarea fácil de resolver, tal como se muestra en [Utkin \(1992\)](#).



**Figura 1.9.** Repulsión de las soluciones a la superficie de discontinuidad.

Desde el punto de vista metodológico, todas las soluciones que cruzan una superficie de discontinuidad de forma transversal no presentan ningún problema en determinar una solución en el sentido de Filippov, ya que en tales puntos es suficiente con “pegar” dos soluciones definidas en dos conjuntos adyacentes a una superficie de discontinuidad. El procedimiento de hacer una *selección* en una función de múltiples valores que permita “pegar” tales soluciones, resulta útil en muchos casos, ya que permite definir de manera apropiada el campo vectorial de (1.5) en el punto de discontinuidad. En este apartado se presenta de manera breve este procedimiento y la importancia del mismo.

De acuerdo con el método de regularización en el sentido de Filippov se sigue que  $F(\mathbf{y}) = \{f(\mathbf{y})\}$  para todo  $\mathbf{y} \in \Omega_- \cup \Omega_+$ . Por lo tanto, en el conjunto  $\Omega_- \cup \Omega_+$  las soluciones de (1.5) y (1.6) deben coincidir, mientras que en la superficie de discontinuidad  $\Sigma$ , se puede considerar un nuevo problema de valores iniciales de tal manera que el correspondiente lado derecho debe ser un elemento de la función de múltiples valores (1.7), es decir, tal que la dinámica de este nuevo problema de valores iniciales esté comprendida en el conjunto de dinámicas de la inclusión diferencial (1.6). Se puede suponer que la elección de este nuevo problema de valores iniciales debe cumplir las siguientes dos características:

- El lado derecho de este nuevo problema debe ser una función univaluada y estar definida en el dominio de  $f$ .

■ La solución de este nuevo problema debe ser solución de la inclusión diferencial (1.6) en el sentido de Filippov.

La elección del lado derecho que satisface estas dos propiedades es llamada una *selección* de la función de múltiples valores. De manera más precisa:

**Definición 1.3.** Una función  $g: 2^\Omega \rightarrow \Omega$  se llama *función selección* de la función de múltiples valores  $F: \Omega \rightarrow 2^\Omega$ , si para todo  $\mathbf{y} \in \Omega$  se cumple  $g(\mathbf{y}) \in F(\mathbf{y})$ .

La existencia de selecciones es, en principio, una consecuencia directa del *axioma de elección* y la existencia de una *función de elección*, cuyo resultado se puede enunciar de la siguiente manera, ver Munkres (2002).

**Lema 1.1. (Existencia de una función de elección).** Dada una familia  $\mathcal{B}$  de conjuntos no vacíos (no necesariamente disjuntos), existe  $g: \mathcal{B} \rightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$  tal que se satisface  $g(B) \in B$  para cada  $B \in \mathcal{B}$ .


Una función de múltiples valores  $F: \Omega \rightarrow 2^\Omega$  admite, en general, diferentes selecciones, cada una de las cuales da origen a una ecuación diferencial distinta que posee solución en el sentido de Filippov. Un caso particular que se puede emplear es la *función selección de norma mínima*:

$$m[F](\mathbf{y}) = \left\{ \mathbf{u} \in F(\mathbf{y}) \mid \|\mathbf{u}\| = \min_{z \in F(\mathbf{y})} \|z\| \right\}, \quad (1.9 \blacktriangleleft)$$

ver Marius–Florin (2001). El empleo de la selección de norma mínima permite definir una nueva ecuación diferencial asociada a (1.5):

$$\dot{\mathbf{y}} = m[F](\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \Omega, \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0.$$

Esta ecuación diferencial posee solución única si el campo vectorial cruza de manera transversal una superficie de discontinuidad, de acuerdo a la teoría de regularización de Filippov. El siguiente ejemplo muestra esta situación.

 **Ejemplo 1.5.** Se considera un caso particular de la ecuación diferencial con lado derecho discontinuo discutida en el [Ejemplo 1.2](#):

$$\dot{y} = 2 - \text{sign}(y), \quad y(0) = -1, \quad (1.10 \blacktriangleleft)$$

donde  $\Omega = \mathbb{R}$ . La inclusión diferencial que extiende la ecuación diferencial anterior en el sentido de Filippov es

$$\dot{y} \in F_{\text{sign}}(y) = \begin{cases} \{3\}, & y < 0, \\ [1, 3], & y = 0, \\ \{1\}, & y > 0 \end{cases} \quad y(0) = -1.$$

La selección de norma mínima conduce a la ecuación diferencial con lado derecho discontinuo:


$$\dot{y} = m[F_{\text{sign}}](y) = \begin{cases} 3, & y < 0, \\ 1, & y \geq 0, \end{cases} \quad y(0) = -1. \quad (1.11) \blacktriangleleft$$

Las gráficas de la función de múltiples valores  $F_{\text{sign}}$  y la selección de norma mínima  $m[F_{\text{sign}}]$  se muestran en la [Figura 1.10](#).

Se observa que el empleo de la selección de norma mínima en esta función de múltiples valores implica definir  $\text{sign}(0) = 1$ .

Por otra parte, de acuerdo al análisis que se ha realizado en el [Ejemplo 1.2](#), se puede concluir que la solución en el sentido de Filippov de la ecuación diferencial (1.11) se expresa por

$$y(t) = \begin{cases} 3t - 1, & t < \frac{1}{3}, \\ t - \frac{1}{3}, & t \geq \frac{1}{3}, \end{cases}$$

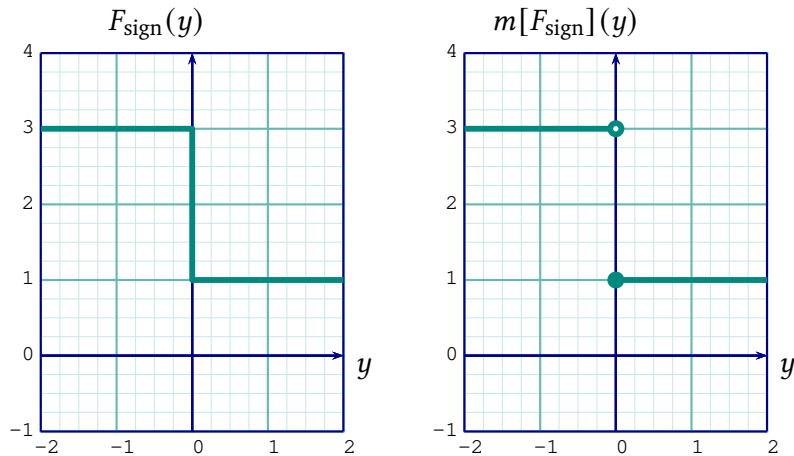
la cual es absolutamente continua y definida para todo  $t \geq 0$ . Además, de manera directa se puede comprobar que esta función es también solución en el sentido de Filippov de la ecuación diferencial (1.10). 

Una mirada hacia atrás vale más que una hacia adelante.

Arquímedes (287–212 a.C.)  
Matemático griego

El procedimiento descrito se puede generalizar al caso en que el lado derecho de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$



**Figura 1.10.** Gráficas de la función de múltiples valores  $F_{\text{sign}}(y)$  y la selección de norma mínima  $m[F_{\text{sign}}](y)$  en el Ejemplo 1.5.

permite determinar soluciones que poseen intersecciones de tipo transversal sobre diferentes superficies de discontinuidad. En tal situación, es posible establecer un método para construir una solución en el sentido de Filippov. El procedimiento se presenta en Pontryagin *et al.* (1962) y se resume como sigue.

Se supone que el lado derecho es una función discontinua en un conjunto finito de puntos  $D = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m\}$  que generan  $m$  superficies de discontinuidad  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$  en  $\Omega$  y  $s$  regiones  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_s \subset \Omega$ . En estas condiciones, existe una única solución definida en  $\Omega_1$  que cruza de forma transversal la superficie  $\Sigma_1$ , y tal que la condición inicial cumple  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{p}_0$ , donde  $\mathbf{p}_0 \in \Omega_1$ . Esta solución es continua y diferenciable en un intervalo  $t_0 < t < t_1$ , donde  $t_1$  es algún instante en el que se satisface la inclusión

$$\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{p}_1 \in \Sigma_1 = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2.$$

Ahora bien, el punto  $\mathbf{p}_1$  se puede considerar como condición inicial para la ecuación diferencial definida en el conjunto  $\Omega_2$ , de manera que es posible determinar una única solución en algún intervalo  $t_1 < t < t_2$ , donde  $t_2$  es

algún instante en el que se cumple

$$\mathbf{y}(t_2) = \mathbf{p}_2 \in \Sigma_2 = \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_3.$$

Luego, esta solución es continua y diferenciable en el intervalo  $t_1 < t < t_2$ , lo cual permite extender la solución definida en el intervalo  $t_0 < t < t_2$  que es continua y diferenciable a trozos. Este procedimiento se puede repetir en todos los puntos de discontinuidad a fin de obtener una solución absolutamente continua.

El procedimiento descrito es de utilidad, en particular, en el estudio sobre la existencia de movimientos periódicos de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo. La posibilidad de tener éxito en esta tarea depende del problema de poder dividir el espacio de fases  $\Omega$  en regiones  $\Omega_1, \dots, \Omega_s$ , en cada una de las cuales, la ecuación diferencial posee soluciones que cruzan de forma transversal las superficies de discontinuidad, y que en cada una de estas regiones, exista al menos una solución que se pueda determinar de tal manera que, durante la transición de un punto de una región a otra, la solución correspondiente definida en una región  $\Omega_k$  se pueda “pegar” con la solución definida en otra región  $\Omega_{k+1}$  adyacente.

En el siguiente apartado se considera una breve descripción de dicha técnica.

#### 1.4. Método de transformaciones puntuales en el plano

Algunos aspectos sobre la estructura de las trayectorias de un sistema dinámico descrito por una ecuación diferencial con lado derecho discontinuo, se pueden analizar al investigar la conducta de los puntos de cruce de las trayectorias con las superficies de discontinuidad. La sucesión de estos puntos define cierta transformación puntual, cuyo estudio proporciona información sobre la conducta de las trayectorias. Esto significa que las propiedades relacionadas con la estructura de las soluciones de la ecuación diferencial, se pueden poner en correspondencia con las propiedades de la estructura de la transformación puntual. El análisis de esta correspondencia es conocido



como *método de las transformaciones puntuales* y, a menudo, se emplea para determinar soluciones periódicas, o ciclos límite, en una ecuación diferencial.

En este apartado se describe de manera breve el método de las transformaciones puntuales para ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo definidas en el plano. La exposición ha sido adaptada principalmente de las referencias: [Andronov y Chaikin \(1949\)](#), [Andronov et al. \(1966\)](#) y [Buttennin et al. \(1987\)](#).

Se considera la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, & y_1(0) &= \alpha, \\ \dot{y}_2 &= g(y_1, y_2, u(t)), & y_2(0) &= \beta, \end{aligned} \tag{1.12} \blacktriangleleft$$

donde  $u(t)$  es una función que pertenece al conjunto

$$\mathcal{U}_\delta = \{u(t) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}) \mid |u(t)| \leq \delta\}.$$

Aquí  $\mathcal{PC}(\mathbb{R})$  denota el conjunto de funciones continuas a trozos definidas en  $\mathbb{R}$  y  $\delta > 0$  es una constante dada.

Se supone que por cada elección  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  que se realice, existe  $s \in \mathbb{N}$  tal que el espacio de fases  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  de la ecuación diferencial (1.12) es dividido por una colección finita de conjuntos abiertos  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_s$  no vacíos tales que, para cada  $k \in \{1, 2, \dots, s\}$ , la restricción de  $g$  al conjunto  $\Omega_k$  es una función continua.

Como caso particular se considera el caso  $s = 2$ . Por lo tanto, se supone que para cierta elección  $\widehat{u}(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , el espacio de fases es dividido por dos conjuntos  $\Omega_-$  y  $\Omega_+$ , cuya frontera en común define una superficie de discontinuidad  $\Sigma \subset \Omega$  en la cual  $g$  es discontinua, pero tal que  $g$  satisface una condición de Lipschitz sobre los conjuntos  $\Omega_-$  y  $\Omega_+$ . Se supone también que bajo la elección de la función  $\widehat{u}(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , la correspondiente ecuación diferencial (1.12) posee soluciones periódicas en el sentido de Filippov y que, por cada condición inicial, las soluciones cruzan la superficie de discontinuidad de forma transversal.

Se elige

$$p_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \in \Sigma$$

como condición inicial para el sistema de ecuaciones diferenciales (1.12), de tal suerte que se obtiene un problema de Cauchy que admite solución única en  $\Omega_+$ , la cual se denota por

$$\widehat{\mathbf{y}}_{\widehat{u}}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Sea  $t_1 > 0$  el instante en el cual la solución satisface  $\widehat{\mathbf{y}}_{\widehat{u}}(t_1) = \mathbf{p}_1 \in \Sigma$ . El punto  $\mathbf{p}_1$  es llamado *sucesor* de  $\mathbf{p}_0$ , como se muestra en la Figura 1.11. Si ahora se considera  $\mathbf{p}_1 \in \Sigma$  como condición inicial de la ecuación diferencial (1.12), entonces se obtiene nuevamente un problema de Cauchy que admite solución única definida en  $\Omega_-$ . Sea ahora  $t_2 > t_1$  el instante en el que la solución cumple por tercera vez la inclusión  $\widehat{\mathbf{y}}_{\widehat{u}}(t_2) = \mathbf{p}_2 \in \Sigma$ . Entonces  $\mathbf{p}_2$  será un sucesor de  $\mathbf{p}_1$ , como se muestra nuevamente en la Figura 1.11. Si durante el movimiento posterior de la solución de (1.12), la trayectoria corta de forma consecutiva la superficie de discontinuidad, se dice que el punto  $\mathbf{p}_0$  tiene sucesores. De acuerdo con el teorema sobre la dependencia continua de la solución con respecto a las condiciones iniciales, ver Sánchez (1968), todos los puntos suficientemente próximos a  $\mathbf{p}_0$  en la superficie de discontinuidad también tienen sucesores.

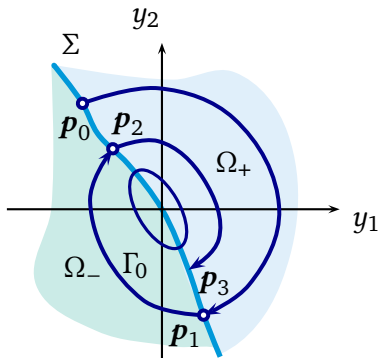


Figura 1.11. Geometría del método de las transformaciones puntuales en el plano.

Este procedimiento permite definir la *función secuencial*  $F: \Sigma \rightarrow \Sigma$  por

medio de la relación de recurrencia

$$\mathbf{p}_{n+1} = F(\mathbf{p}_n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.13) \blacktriangleleft$$

Esta función define una transformación puntual de la superficie de discontinuidad  $\Sigma$  en sí misma, la cual describe la correspondencia que existe entre un punto inicial  $\mathbf{p}_0$  y sus sucesores  $\mathbf{p}_k$  con  $k \geq 1$ .

Si dentro del conjunto de soluciones de la ecuación diferencial (1.12) existe un ciclo límite simple  $\Gamma = \{\widehat{\mathbf{y}}_{\widehat{u}}(t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq \tau_p\} \subset \Omega$  de periodo  $\tau_p > 0$ , es decir, existe una función  $\widehat{\mathbf{y}}_{\widehat{u}}: [0, \tau_p] \rightarrow \Omega$  que satisface la propiedad  $\widehat{\mathbf{y}}_{\widehat{u}}(0) = \widehat{\mathbf{y}}_{\widehat{u}}(\tau_p)$ , y tal que  $\widehat{\mathbf{y}}_{\widehat{u}}(t_1) \neq \widehat{\mathbf{y}}_{\widehat{u}}(t_2)$  siempre que  $0 < t_1 < t_2 < \tau_p$ , y si se elige un punto  $\mathbf{p}^* \in \Gamma \cap \Sigma$  como condición inicial de la ecuación diferencial (1.12), entonces él debe coincidir con su sucesor, y con cada uno de sus  $k$  sucesores, es decir,

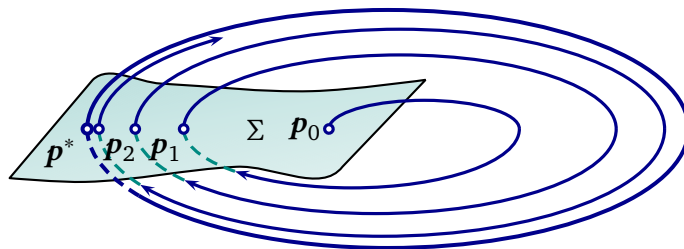
$$\mathbf{p}^* = \underbrace{(F \circ \dots \circ F)}_{k \text{ veces}}(\mathbf{p}^*)$$

Se sigue de esta observación que la búsqueda de trayectorias cerradas, o ciclos límite, se reduce a la búsqueda de puntos fijos de la transformación puntual  $F$ .

En el caso de existir ciclos límite, el tipo de estabilidad del punto fijo determina la estabilidad del correspondiente ciclo límite<sup>2</sup>. En efecto, si se supone que (1.12) posee un ciclo límite asintóticamente estable, entonces la trayectoria solución tiende hacia el ciclo límite cuando  $t \rightarrow \infty$  y, por lo tanto, la correspondiente sucesión  $\{\mathbf{p}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  descrita por (1.13) tendrá como punto límite el punto fijo  $\mathbf{p}^*$ . De manera recíproca, de la convergencia de la sucesión  $\{\mathbf{p}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  hacia el punto fijo  $\mathbf{p}^*$ , se desprende que la trayectoria solución, correspondiente a ella, tenderá hacia el ciclo límite conforme  $t \rightarrow \infty$ . En la Figura 1.12 se muestra el esquema que describe esta correspondencia.

El mismo análisis puede efectuarse en el caso de un punto fijo inestable.

<sup>2</sup>En la teoría de sistemas dinámicos discretos, un punto  $\mathbf{p}^* \in \Sigma$  es llamado estable, si para  $\epsilon > 0$  dado, es posible hallar  $\delta > 0$  tal que si  $\mathbf{p}_0 \in \Sigma$  y  $\|\mathbf{p}^* - \mathbf{p}_0\| < \delta$ , entonces  $\|F^n(\mathbf{p}_0) - \mathbf{p}^*\| < \epsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Si el punto  $\mathbf{p}^* \in \Sigma$  es estable y además  $F^n(\mathbf{p}_0) \rightarrow \mathbf{p}^*$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , el punto  $\mathbf{p}^*$  es llamado asintóticamente estable, ver Elaydi (2005).



**Figura 1.12.** Correspondencia estructural entre la estabilidad de un punto fijo de la función secuencial y la estabilidad de un ciclo límite de una ecuación diferencial.

En muchos problemas es imposible obtener en forma explícita la función secuencial y, por lo tanto, no es fácil determinar la estabilidad de sus puntos fijos y, además, en una situación menos favorable, no siempre es fácil saber si tal transformación posee al menos un punto fijo.

### 1.4.1. Una aplicación del método de transformaciones puntuales

Como aplicación del método de las transformaciones puntuales se considera el estudio de un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden con lado derecho discontinuo, el cual corresponde a una adaptación de un modelo que se discute en Roitemberg (1971):

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 y_1 - 2\mu y_2 + u(t), \end{aligned} \quad (1.14 \blacktriangleleft)$$

donde la perturbación externa corresponde a la función escalón definida por

$$u(t) = \begin{cases} \omega^2, & y_2(t) > 0, \\ 0, & y_2(t) \leq 0. \end{cases}$$

Se observa que bajo la definición de la función  $u(t)$ , el sistema de ecuaciones diferenciales (1.14) posee soluciones en el sentido de Filippov, ya que  $m[F_u](t) = \frac{1}{2}\omega^2(1 + \text{Sign}(y_2(t)))$  describe la selección de norma mínima

para la función  $u(t)$ , donde

$$\text{Sign}(y(t)) = \begin{cases} 1, & y(t) > 0, \\ -1, & y(t) \leq 0, \end{cases}$$

es decir,  $u(t) = \frac{1}{2}\omega^2(1 + \text{Sign}(y_2(t)))$ .

Se elige la desigualdad  $0 < \mu < \omega$  a fin de que el sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo asociado a (1.14) posea soluciones periódicas en el sentido de Filippov.

De la definición de la función escalón, el espacio de fases  $\Omega = \mathbb{R}^2$  se descompone en los conjuntos

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 > 0\}, & \Omega_- &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 < 0\}, \\ \Sigma &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Se observa que esta descomposición define sobre  $\Omega_-$  y  $\Omega_+$  dos sistemas de ecuaciones diferenciales lineales que poseen solución única por cada condición inicial que se elija sobre  $\Omega_-$  u  $\Omega_+$ . Se elige  $\mathbf{p}_0$  como

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde  $\alpha_0 > 0$ . Es claro que  $\mathbf{p}_0 \in \Sigma$ . Si se analiza el vector gradiente de las trayectorias solución  $\mathbf{y}_u(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$  sobre los puntos de cruce con la superficie de discontinuidad, es decir, sobre puntos de la forma

$$\mathbf{p}_n = \begin{pmatrix} y_1(t_n) \\ 0 \end{pmatrix} \in \Sigma,$$

donde  $t_n \geq 0$  es un instante para el cual se cumple  $\mathbf{y}_u(t_n) = \mathbf{p}_n$ , se sigue que el vector gradiente de la trayectoria solución es

$$\nabla \mathbf{y}(t_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 y_1(t_n) \end{pmatrix},$$

lo cual muestra que las soluciones de la ecuación diferencial (1.14) cruzan de forma transversal la superficie de discontinuidad, es decir, no existen soluciones en movimiento deslizante sobre ella.

Se determinan ahora, por separado, las soluciones sobre los conjuntos  $\Omega_-$  y  $\Omega_+$  por considerar de manera apropiada las condiciones iniciales sobre la superficie de discontinuidad.

De acuerdo con las condiciones iniciales  $y_1(0) = \alpha_0$  y  $y_2(0) = 0$ , se sigue que el signo de  $y_2$  es negativo, ya que  $\dot{y}_2(0) = -\omega^2\alpha_0 < 0$ . De esta manera, se considera el sistema de ecuaciones diferenciales (1.14) como el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, & y_1(0) &= \alpha_0, \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 y_1 - 2\mu y_2, & y_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

La solución de este sistema es definida en  $\Omega_-$  y, dado que esta es oscilatoria, se espera que tal solución intersekte nuevamente la superficie de discontinuidad en algún  $t_1 > 0$ . En efecto, ya que la forma paramétrica de esta solución se expresa por

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \alpha_0 e^{-\mu t} \left( \cos(\vartheta t) + \frac{\mu}{\vartheta} \sin(\vartheta t) \right), \\ y_2(t) &= - \left( \frac{\mu^2}{\vartheta} + \vartheta \right) \alpha_0 e^{-\mu t} \sin(\vartheta t), \end{aligned} \tag{1.15} \blacktriangleleft$$

donde

$$\vartheta = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}.$$

La segunda expresión en (1.15) muestra que  $y_2(t) < 0$  para todo  $t \in (0, t_1)$ , donde

$$t_1 = \frac{\pi}{\vartheta}.$$

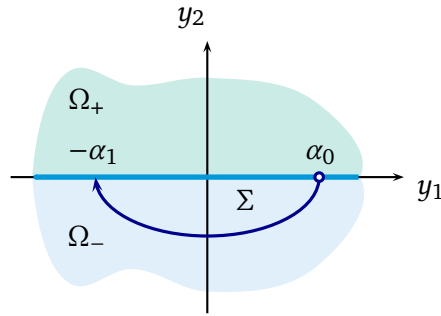
Se observa que en el instante  $t = t_1$  se satisfacen las siguientes condiciones de contorno  $y_1(t_1) = -\alpha_1 < 0$  y  $y_2(t_1) = 0$ , donde

$$\alpha_1 = A\alpha_0, \quad A = \exp\left(-\frac{\pi\mu}{\vartheta}\right), \tag{1.16} \blacktriangleleft$$

como se muestra en la [Figura 1.13](#).

Por lo tanto, si se define

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$



**Figura 1.13.** Trayectoria solución en el plano de fases.

entonces  $\mathbf{p}_1 \in \Sigma$ . Este nuevo punto se puede considerar como condición inicial de la ecuación diferencial definida en  $\Omega_+$ . Se procede de manera análoga para hallar la solución de (1.14) en esta región.

Para valores  $t \geq t_1$  pertenecientes a un intervalo específico, el signo de la coordenada  $y_2$  es positivo, por lo tanto, de (1.14) se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, & y_1(t_1) &= -\alpha_1 \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 y_1 - 2\mu y_2 + \omega^2, & y_2(t_1) &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución definida en el conjunto  $\Omega_+$  se expresa en la forma

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -(\alpha_1 + 1)e^{-\mu(t-t_1)} \left( \cos(\vartheta(t-t_1)) + \frac{\mu}{\vartheta} \sin(\vartheta(t-t_1)) \right) + 1, \\ y_2(t) &= \frac{\omega^2}{\vartheta} (\alpha_1 + 1) e^{-\mu(t-t_1)} \sin(\vartheta(t-t_1)). \end{aligned} \quad (1.17 \blacktriangleleft)$$

Se puede observar que  $y_2(t) > 0$  para todo  $t \in (t_1, t_2)$ , donde

$$t_2 = \frac{2\pi}{\vartheta}.$$

En este caso, para el instante  $t_2$  se satisface  $y_1(t_2) = \alpha_2 > 0$  y  $y_2(t_2) = 0$ , donde

$$\alpha_2 = A\alpha_1 + 1 + A. \quad (1.18 \blacktriangleleft)$$

Las expresiones (1.15) y (1.17) describen un periodo de la trayectoria solución, tal como se muestra en la Figura 1.14, cuya dependencia sobre las amplitudes  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se describe por las ecuaciones (1.16) y (1.18). De las ecuaciones (1.15) y (1.17) se observa que para periodos posteriores, dicha dependencia sobre la solución se seguirá presentando para amplitudes posteriores.

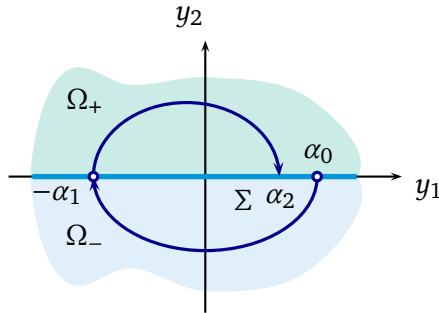


Figura 1.14. Trayectoria solución en el plano de fases.

Si se designa

$$F_1(\alpha_0, \alpha_1) = \alpha_1 - A\alpha_0, \quad (1.19 \blacktriangleleft)$$

$$F_2(\alpha_2, \alpha_1) = A\alpha_1 - \alpha_2 + 1 + A,$$

entonces las ecuaciones (1.17) y (1.20) corresponden a las soluciones del sistema simultáneo

$$F_1(\alpha_0, \alpha_1) = 0, \quad (1.20 \blacktriangleleft)$$

$$F_2(\alpha_2, \alpha_1) = 0.$$

El sistema de ecuaciones (1.20) representa el método de transformaciones puntuales  $\mathbf{p}_{2n+2} = F(\mathbf{p}_{2n})$  para la ecuación diferencial (1.14), el cual ayuda a transformar cada punto  $\mathbf{p}_n = (\alpha_{2n}, 0)^\top \in \Sigma$  en un nuevo punto  $\mathbf{p}_{n+1} = (\alpha_{2n+2}, 0)^\top \in \Sigma$  en cada  $n$ -ésimo periodo de oscilación que es descrito por las expresiones (1.15) y (1.17), en las cuales se deben sustituir las constantes  $\alpha_0$  y  $\alpha_2$  por  $\alpha_{2n}$  y  $\alpha_{2n+2}$ , respectivamente.

Las ecuaciones del sistema (1.20) se pueden considerar como rectas sobre los planos  $\alpha_0\alpha_1$  y  $\alpha_2\alpha_1$  tal como se muestran en la Figura 1.15. Estas rectas,



junto con la transposición de los planos  $\alpha_0\alpha_1$  y  $\alpha_2\alpha_1$ , se intersectan en el punto de coordenadas  $\alpha_0^* = \alpha_2^* = p$  y  $\alpha_1^* = q$ , donde  $p$  y  $q$  son las soluciones del sistema (1.20), es decir,

$$p = \frac{1}{1-A}, \quad q = \frac{A}{1-A}. \quad (1.21 \blacktriangleleft)$$

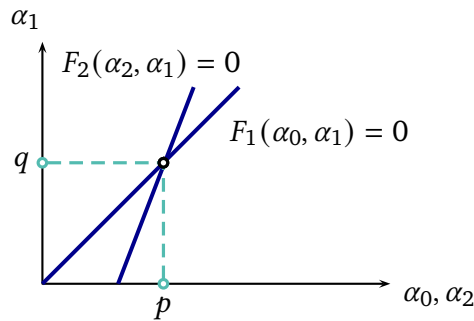


Figura 1.15. Diagrama de Lamerais del sistema (1.19).

El valor  $p$  es el punto invariante del método de las transformaciones puntuales, es decir, si  $\alpha_0 = p$ , entonces el valor de la amplitud después de completar un ciclo de la solución será nuevamente  $\alpha_2 = p$ , es decir, se describe una trayectoria cerrada en el plano de fases. La solución del sistema de ecuaciones diferenciales (1.14) describirá entonces una función periódica cuyo periodo es  $t_2 = 2t_1$ . Se destaca que las cantidades  $p$  y  $q$  dependen sólo de los parámetros del sistema y no de las condiciones iniciales.

Se analiza ahora el comportamiento de la trayectoria en una vecindad por considerar una variación  $\alpha_0 = p + \delta_{\alpha_0}$  con  $\delta_{\alpha_0}$  finito. Se tiene que  $\alpha_1 = q + \delta_{\alpha_1}$  y  $\alpha_2 = p + \delta_{\alpha_2}$ , donde  $\delta_{\alpha_1}$  y  $\delta_{\alpha_2}$  son también finitos.

Como el sistema de ecuaciones (1.20) describe una sucesión de amplitudes, se obtiene

$$\begin{aligned} F_1(p + \delta_{\alpha_0}, q + \delta_{\alpha_1}) &= 0, \\ F_2(p + \delta_{\alpha_2}, q + \delta_{\alpha_1}) &= 0. \end{aligned}$$

Después de desarrollar este sistema en una serie de Taylor alrededor del

punto  $(p, q)^\top$  se obtiene

$$\begin{aligned} F_1(p, q) + \delta_{\alpha_0} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_0}(p, q) + \delta_{\alpha_1} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_1}(p, q) + \dots &= 0, \\ F_2(p, q) + \delta_{\alpha_2} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_2}(p, q) + \delta_{\alpha_1} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_1}(p, q) + \dots &= 0. \end{aligned}$$

Ahora bien, ya que las transformaciones  $F_1$  y  $F_2$  son lineales y cumplen la siguiente igualdad:  $F_1(p, q) = F_2(p, q) = 0$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha_0} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_0}(p, q) + \delta_{\alpha_1} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_1}(p, q) + \dots &= 0, \\ \delta_{\alpha_2} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_2}(p, q) + \delta_{\alpha_1} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_1}(p, q) + \dots &= 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, de (1.19) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_0}(p, q) &= -A, & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_1}(p, q) &= 1, \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_2}(p, q) &= -1, & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_1}(p, q) &= A, \end{aligned}$$

y, por lo tanto, el sistema anterior se reduce a

$$\begin{aligned} -A\delta_{\alpha_0} + \delta_{\alpha_1} &= 0, \\ -\delta_{\alpha_2} + A\delta_{\alpha_1} &= 0, \end{aligned}$$

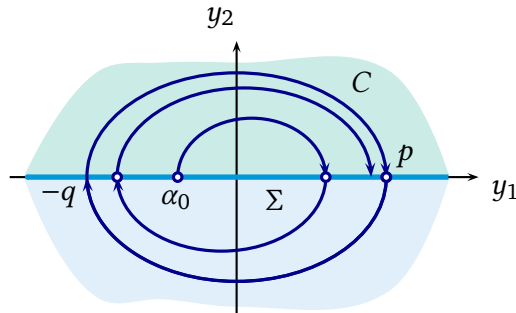
de donde se desprende que  $\delta_{\alpha_2} = A^2\delta_{\alpha_0}$ . Después de iterar esta relación por  $n$  periodos se obtiene la relación de recurrencia

$$\delta_{\alpha_{2n+2}} = A^{2n+2}\delta_{\alpha_0},$$

y debido a que  $0 < A < 1$ , finalmente resulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{\alpha_{2n+2}} = 0, \tag{1.22} \blacktriangleleft$$

lo cual muestra que la sucesión de amplitudes de las oscilaciones tienden a los valores descritos en (1.21).



**Figura 1.16.** Ilustración del ciclo límite del sistema de ecuaciones diferenciales (1.14).

Como conclusión, se puede observar que el método de las transformaciones puntuales muestra que la trayectoria solución de la ecuación diferencial (1.14), obtenida al considerar, por ejemplo, las condiciones iniciales invariantes

$$\mathbf{p}^* = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix},$$

describe un ciclo límite  $C$  que es asintóticamente y orbitalmente estable, como se muestra en la [Figura 1.16](#), y cuya representación paramétrica a trozos se describe por

$$\mathbf{h}(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2t_1], \quad (1.23 \blacktriangleleft)$$

donde

$$h_1(t) = \begin{cases} pf_1(t), & t \in [0, t_1), \\ -(q+1)f_1(t-t_1) + 1, & t \in [t_1, 2t_1], \end{cases}$$

$$h_2(t) = \begin{cases} -pf_2(t), & t \in [0, t_1), \\ (q+1)f_2(t-t_1), & t \in [t_1, 2t_1]. \end{cases}$$

$$f_1(t) = e^{-\mu t} \left( \cos(\vartheta t) + \frac{\mu}{\vartheta} \sin(\vartheta t) \right), \quad f_2(t) = \frac{\omega^2}{\vartheta} e^{-\mu t} \sin(\vartheta t).$$

La función  $\mathbf{h}$  definida en (1.23) es continua y suave a trozos en  $[0, 2t_1]$ , ya que no es diferenciable en  $t_1$ .

Resulta de la definición de la sucesión  $\{\delta_{\alpha_{2n+2}}\}_{n \in \mathbb{N}}$  y de la relación (1.22), que la región de atracción de la trayectoria cerrada  $C$  coincide con el plano de fases. Por lo tanto, el ciclo límite  $C$  parametrizado por (1.23) es asintóticamente y orbitalmente estable. El siguiente ejemplo muestra de forma numérica los resultados.

**Ejemplo 1.6.** Como caso particular para el sistema (1.14) se suponen los valores de los parámetros  $\mu = 0.1$  y  $\omega = 0.8$ . Para estos valores se obtiene  $\vartheta \approx 0.793725$ ,  $p \approx 3.059400$  y  $q \approx 2.059400$ .

En la Figura 1.17 se muestran las trayectorias solución con condiciones iniciales  $\mathbf{p}_0 = (1, 0)^\top$  y  $\widehat{\mathbf{p}}_0 = (4, 0)^\top$ , las cuales convergen asintóticamente y orbitalmente al ciclo límite  $C$ .

El periodo de oscilación de la función  $h$  cumple el estimado  $2t_1 \approx 7.91607$ . Finalmente, resulta que el ciclo límite no es simétrico respecto al eje  $y_1 = 0$ , lo cual se sigue de observar que los puntos  $\mathbf{p}_-^* = (-q, 0)^\top$  y  $\mathbf{p}_+^* = (p, 0)^\top$  no son simétricos.

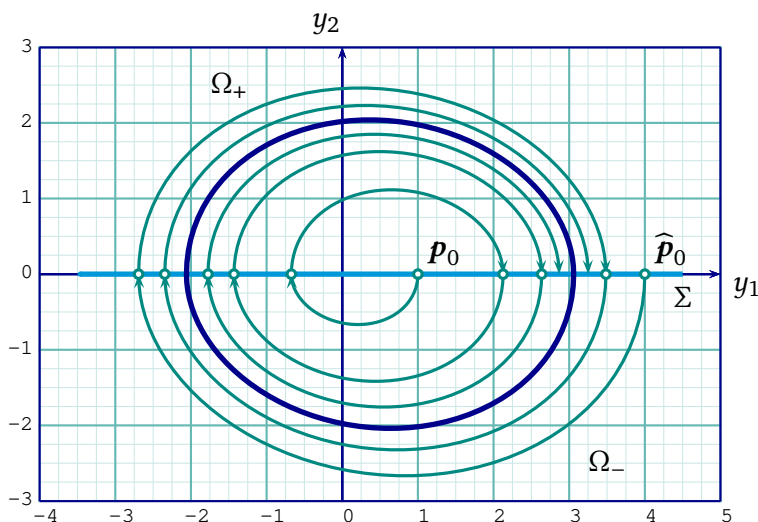


Figura 1.17. Trayectorias del Ejemplo 1.6 que convergen al único ciclo límite  $C$ .

Las semillas son invisibles. Duermen en el secreto de la tierra hasta que a una de ellas se le ocurre despertarse... Entonces se estira y, tímidamente al comienzo, crece hacia el sol una encantadora briznilla inofensiva. Si se trata de una briznilla de rabinito o de rosal, se la puede dejar crecer como ella quiera.

*El Principito*

---

---

Antoine de Saint-Exupéry (1900–1944)  
Aviador y escritor francés

# Conjuntos de alcanzabilidad de ecuaciones diferenciales lineales

## 2

Estoy cada vez más convencido de que la necesidad de nuestra geometría no puede ser demostrada por el intelecto humano.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)  
Matemático, físico y astrónomo alemán

### Resumen

Se presenta un método que permite determinar de forma explícita la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $Q(T)$  de una ecuación diferencial de orden dos en la que existe incertidumbre debido a la presencia de perturbaciones externas. Se muestra que la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $Q(T)$  converge a un ciclo límite máximo  $C$  cuando se toma el límite  $T \rightarrow \infty$ .

## 2.1. Introducción

Se supone definida una familia de sistemas de ecuaciones diferenciales que admite una perturbación externa  $u(t)$ :

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1 \blacktriangleleft)$$

donde  $A = (a_{ij})$  es una matriz constante de tamaño  $n \times n$ ,  $\mathbf{b} = (b_i)$  es un vector constante de tamaño  $n \times 1$ , y  $u(t)$  es una función que satisface la *inclusión funcional*:  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , donde

$$\mathcal{U}_\delta = \{u(t) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}) \mid |u(t)| \leq \delta\}, \quad (2.2 \blacktriangleleft)$$

y donde  $\delta > 0$  es una constante. Un interés particular al considerar un análisis sobre las soluciones de los elementos de la familia de ecuaciones diferenciales (2.1)–(2.2) es el siguiente.

Se supone el sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales

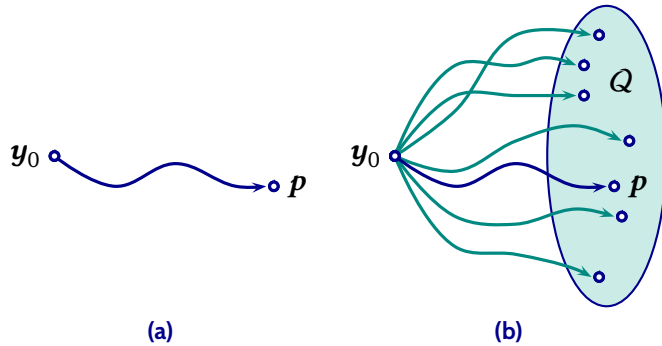
$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad (2.3 \blacktriangleleft)$$

con la característica de que su solución debe satisfacer algún requerimiento deseado. Por ejemplo, se puede requerir que la solución  $\mathbf{y}(t)$  del sistema de ecuaciones diferenciales (2.3) tome algún valor dado  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  en un instante  $T_k > 0$ , el cual puede ser fijo o no, es decir, tal que  $\mathbf{y}(T_k) = \mathbf{p}$ . En tal situación, se puede considerar perturbar el sistema de ecuaciones diferenciales (2.3) con alguna función  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  que permita efectuar dicha tarea, y así, obtener un caso particular del sistema de ecuaciones diferenciales (2.1), con ayuda del cual, la solución asociada a la perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  cumpla la tarea requerida:  $\mathbf{y}_u(T_k) = \mathbf{p}$ . Los elementos (2.1) que se obtienen al considerar cada perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , conforman la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.1)–(2.2). La función  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  se llama *perturbación externa* y el conjunto  $\mathcal{U}_\delta$  se llama *conjunto de perturbaciones externas admisibles*.

El concepto de *controlabilidad* permite determinar si la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (2.1)–(2.2) tiene la propiedad de poder ser trasladada, con la ayuda de alguna perturbación  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , desde un estado inicial  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  a un estado final  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  en un instante finito, como se muestra en la [Figura 2.1a](#). Se observa que, en general, para cada elección  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  distinta, el estado final al que se llega es también distinto, tal como se muestra en la [Figura 2.1b](#).

Existe un criterio que permite determinar cuándo un sistema puede ser transferido desde un punto inicial a un punto dado. Este criterio hace uso de la *matriz de controlabilidad*, la cual desempeña un papel importante en la teoría de los *sistemas controlables*<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Una introducción a los sistemas controlables se puede consultar en Pontryagin *et al.* (1962), Lee y Markus (1967) y Macki y Strauss (1982).



**Figura 2.1.** Esquema del concepto de controlabilidad.

**Definición 2.1.** La matriz  $U = (\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b})$  es llamada *matriz de controlabilidad* de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.1)–(2.2).

Dos preguntas surgen de forma natural respecto al concepto de controlabilidad: ¿si  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  es fijo, cuáles son los puntos  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  a los que se puede llegar utilizando soluciones  $\mathbf{y}_u(t)$  que son asociadas a alguna perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ ?, y ¿cuáles son las propiedades que tiene el conjunto resultante? A dicho conjunto se le conoce como *conjunto de alcanzabilidad* de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.1)–(2.2) y se define como:

$$Q = \{\mathbf{y}_u(\tau) \in \mathbb{R}^n \mid u(t) \in \mathcal{U}_\delta \text{ y } \tau > 0\}.$$

Este conjunto se puede ver como la unión de conjuntos disjuntos a pares. En efecto, si para cada  $T > 0$  fijo se considera el conjunto

$$Q(T) = \{\mathbf{y}_u(\tau) \in \mathbb{R}^n \mid u(t) \in \mathcal{U}_\delta \text{ y } \tau \in [0, T]\}.$$

llamado *conjunto de alcanzabilidad* definido en el instante  $T > 0$ , entonces se tiene que

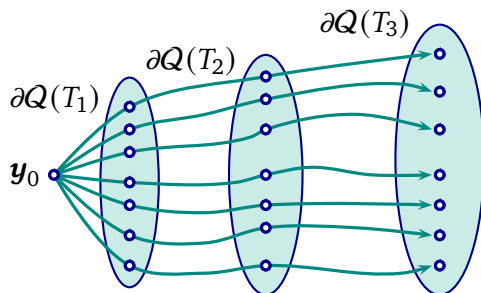
$$Q = \bigcup_{T>0} Q(T),$$



donde

$$\partial Q(T) = \{ \mathbf{y}_u(T) \in \mathbb{R}^n \mid u(t) \in \mathcal{U}_\delta \}.$$

El conjunto  $\partial Q(T)$  describe la frontera del conjunto  $Q(T)$  asociado a la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.1)–(2.2). En la Figura 2.2 se ilustra esta construcción.



**Figura 2.2.** Interpretación geométrica de las fronteras de los conjuntos de alcanzabilidad  $\partial Q(T_k)$  en instantes  $T_k > 0$ .

A partir de las definiciones se observa que

$$Q(T) = \bigcup_{0 \leq \tau \leq T} \partial Q(\tau).$$

Algunas propiedades geométricas que caracterizan a los conjuntos  $Q$  y  $Q(T)$  para la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.1)–(2.2), las cuales son una adaptación de Aleksandrov *et al.* (2005), se describen a continuación.

Con el fin de simplificar la exposición se supone que  $\mathbf{y}_0 = 0$ . Se observa primero que el conjunto de alcanzabilidad  $Q(T)$  para la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.1)–(2.2) es simétrico respecto al origen de coordenadas del espacio de fases  $\mathbb{R}^n$ , pues si  $\mathbf{p}$  pertenece al conjunto de alcanzabilidad  $Q(T)$ , entonces existen  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  y  $T > 0$  tales que se satisface la igualdad  $\mathbf{p} = \mathbf{y}_u(T)$ , donde

$$\mathbf{y}_u(T) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) \, d\tau,$$

de acuerdo con la fórmula de Cauchy<sup>2</sup>, ver [Sánchez \(1968\)](#), donde  $e^{At}$  denota la *matriz exponencial* de la matriz  $A$  definida por

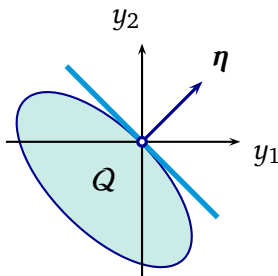
$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Es claro de la expresión anterior que  $-\mathbf{p} = -\mathbf{y}_u(T)$  está en  $Q(T)$  bajo la perturbación  $-u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ .

Por otra parte, ya que la perturbación externa nula  $\bar{u}(t) \equiv 0$  pertenece a  $\mathcal{U}_\delta$ , se sigue que  $\mathbf{y}_{\bar{u}}(T) \equiv 0 \in Q(T)$ .

El siguiente lema muestra condiciones bajo las cuales el conjunto de alcanzabilidad  $Q$  es un conjunto convexo de dimensión  $n$ . El concepto de dimensión que se emplea se sobreentiende en el sentido de que el menor subespacio que contiene al conjunto de alcanzabilidad es de dimensión  $n$ .

**Lema 2.1.** Si  $\text{rang } U = n$ , entonces el conjunto de alcanzabilidad  $Q$  de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.1)–(2.2) es un conjunto convexo de dimensión  $n$ .



**Figura 2.3.** Ilustración del plano tangente al conjunto de alcanzabilidad  $Q$  en  $\mathbb{R}^2$ .

**Demostración.** Se muestra primero que el conjunto  $Q$  es convexo. Para ver que esto es así, se observa que  $\mathcal{U}_\delta$  es un conjunto convexo, ya que si  $u_1$  y  $u_2$  son funciones en  $\mathcal{U}_\delta$ , entonces  $u = \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2$  pertenece a  $\mathcal{U}_\delta$

<sup>2</sup>La fórmula de Cauchy también es conocida en la literatura como *fórmula de variación de parámetros* para sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos.

para cada  $\lambda \in [0, 1]$ , con lo cual,  $|u(t)| \leq \lambda |u_1(t)| + (1 - \lambda) |u_2(t)| \leq \delta$ .

Sean ahora  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  puntos en  $\mathcal{Q}$  y  $\lambda \in [0, 1]$ . Entonces existen perturbaciones externas  $u_1(t), u_2(t) \in \mathcal{U}_\delta$  e instantes  $T_1, T_2 > 0$  para los cuales  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{y}_{u_1}(T_1)$  y  $\mathbf{p}_2 = \mathbf{y}_{u_2}(T_2)$ . Se supone sin pérdida de generalidad que  $T_2 \geq T_1$  y se define

$$\tilde{u}_1(t) = \begin{cases} u_1(t), & 0 \leq t \leq T_1, \\ 0, & T_1 < t \leq T_2. \end{cases}$$

Resulta que  $\tilde{u}_1(t) \in \mathcal{U}_\delta$  y, de acuerdo con la observación anterior, se sigue que la perturbación  $u(t) = \lambda \tilde{u}_1(t) + (1 - \lambda)u_2(t)$  pertenece también a  $\mathcal{U}_\delta$ . Luego, debido a que se satisface la igualdad  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{y}_{u_1}(T_1) = \mathbf{y}_{\tilde{u}_1}(T_2)$ , se concluye que

$$\mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{p}_2 = \int_0^{T_2} e^{A(T_2-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau$$

pertenece a  $\mathcal{Q}$ , lo cual muestra que  $\mathcal{Q}$  es un conjunto convexo.

Para obtener la segunda parte, basta con verificar que  $\dim \mathcal{Q}(T) = n$  para cada  $T > 0$ , puesto que  $\mathcal{Q}(T) \subset \mathcal{Q}$ .

Se procede por contradicción, por lo tanto, se supone que  $\text{rang } U = n$  y que  $\dim \mathcal{Q}(T) = m < n$ . Como  $0 \in \mathcal{Q}(T)$ , existe un plano tangente que forma un subespacio propio de  $\mathbb{R}^n$ . Se mostrará que  $0$  está en el interior de  $\mathcal{Q}(T)$ , lo cual implica que  $m = n$ . Ya que  $\dim \mathcal{Q}(T) = m < n$ , el punto  $0$  está en la frontera de  $\mathcal{Q}(T)$ . El plano tangente divide a  $\mathbb{R}^n$  en dos semiespacios, de tal manera que  $\mathcal{Q}(T)$  está completamente contenido en uno de ellos, como se ilustra en la [Figura 2.3](#).

Sea  $\boldsymbol{\eta} \neq 0$  el vector normal del plano tangente que se halla en el semiespacio que no contiene a  $\mathcal{Q}(T)$ . Entonces

$$\boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{p} \leq 0 \text{ para todo } \mathbf{p} \in \mathcal{Q}(T).$$

Además, como

$$0 = \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{Q}} \boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{p} = \max_{u(t) \in \mathcal{U}_\delta} \int_0^T \boldsymbol{\eta}^\top e^{A(T-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau. \quad (2.4 \blacktriangleleft)$$

La igualdad (2.4) es posible si, y sólo si,

$$\boldsymbol{\eta}^\top e^{A(T-t)} \mathbf{b} = 0 \quad \text{para todo } t \in [0, T]. \quad (2.5 \blacktriangleleft)$$

Para  $t = T$  se tiene  $\boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{b} = 0$ . La función del lado izquierdo de la igualdad (2.5) se puede diferenciar  $n - 1$  veces con respecto a  $t$ , obteniendo las siguientes  $n - 1$  igualdades para  $t = T$ :

$$\boldsymbol{\eta}^\top A^k \mathbf{b} = 0, \quad k = 1, \dots, n - 1,$$

de donde se tiene

$$\boldsymbol{\eta}^\top (\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}) = \boldsymbol{\eta}^\top U = 0.$$

Se sigue que las  $n$  columnas de la matriz de controlabilidad son linealmente dependientes, es decir, su rango es menor que  $n$ , lo cual contradice la hipótesis. Esto muestra que  $0 \in \mathring{Q}(T)$  y, por lo tanto, se debe tener que  $\dim Q(T) = n$ .  $\square$

Empleando un argumento similar al que se utilizó en la demostración del Lema 2.1 se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 2.1.** Si  $\text{rang } U = n$ , entonces para cada  $T > 0$  el conjunto de alcanzabilidad  $Q(T)$  de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.1)–(2.2) es un conjunto convexo y  $\dim Q(T) = n$ .

El estudio de la estructura del conjunto de alcanzabilidad  $Q$ , o del conjunto de alcanzabilidad  $Q(T)$  en un instante  $T > 0$ , depende de las soluciones de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.1)–(2.2) y, por consiguiente, de la matriz  $A$  y del conjunto de perturbaciones externas  $\mathcal{U}_\delta$ . No obstante, ya que no siempre es posible hacer un análisis cualitativo de las soluciones de cada elemento de esta familia, no es una tarea sencilla el determinar el conjunto de puntos a los cuales una solución puede acceder. Cuando el conjunto  $Q(T)$  es un conjunto acotado, resulta que es suficiente con analizar la frontera de los conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T)$  para obtener

cierta información de tales conjuntos. Existen diferentes métodos destinados a determinar tal aproximación, ver [Kurzanski y Valyi \(1999\)](#).

## 2.2. Método del plano soporte de los conjuntos de alcanzabilidad

En este apartado se muestra una adaptación de [Formal'skii \(1974\)](#) y [Bugrov y Formal'skii \(2017\)](#) sobre un método que permite determinar los conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T)$ . El método es aplicado a una familia de sistemas de ecuaciones diferenciales en el plano, con el fin de describir algunas propiedades geométricas de estos conjuntos.

Se toma en consideración el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{y}(0) = 0, \quad u(t) \in \mathcal{U}_\delta, \quad (2.6 \blacktriangleleft)$$

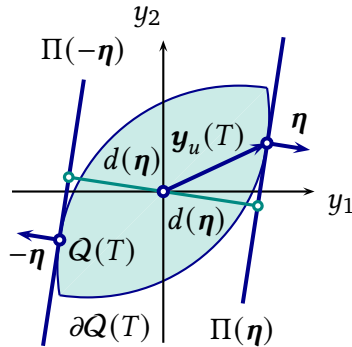
donde  $A = (a_{ij})$  es una matriz constante de tamaño  $2 \times 2$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^\top$  es un vector constante de tamaño  $2 \times 1$ , y  $\delta > 0$  es una constante. Se observa que la conjunción de la ecuación diferencial (2.6) y la inclusión  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , donde  $\mathcal{U}_\delta$  se define en (2.2), permite obtener una familia de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden indexada por el conjunto de perturbaciones externas. La solución de cada elemento de esta familia en un instante  $T$  se describe por

$$\mathbf{y}_u(T) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau = \int_0^T e^{A\tau} \mathbf{b}u(T-\tau) d\tau. \quad (2.7 \blacktriangleleft)$$

De acuerdo a la definición de conjunto de alcanzabilidad  $Q(T)$ , se supone que cada solución de la forma (2.7) asociada a una perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  satisface la inclusión  $\mathbf{y}_u(T) \in Q(T)$ .

Un método que permite aproximar la frontera del conjunto de alcanzabilidad se conoce como *método del plano soporte*, cuya formulación es como sigue.

Dado que  $Q(T)$  es un conjunto convexo, existe una recta  $\Pi(\boldsymbol{\eta})$  que es tangente a  $\partial Q(T)$  en el punto  $\mathbf{y}_u(T)$  y cuyo vector normal se denota por  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ , ver la [Figura 2.4](#). Por la simetría de  $Q(T)$  se observa que



**Figura 2.4.** Esquema de construcción del conjunto de accesibilidad  $Q(T)$ .

existe otra recta tangente  $\Pi(-\boldsymbol{\eta})$  de la misma pendiente que  $\Pi(\boldsymbol{\eta})$  y cuyo vector normal es  $-\boldsymbol{\eta}$ .

Se define la distancia de la recta  $\Pi(\boldsymbol{\eta})$  al origen de coordenadas por

$$d(\boldsymbol{\eta}) = \inf_{z \in \Pi(\boldsymbol{\eta})} \sqrt{z_1^2 + z_2^2}.$$

Se supone, sin pérdida de generalidad, que cada vector  $\boldsymbol{\eta}$  ortogonal a la recta  $\Pi(\boldsymbol{\eta})$  pertenece al disco unitario  $S = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2 \mid \eta_1^2 + \eta_2^2 = 1\}$ . Por consiguiente, cada vector  $\boldsymbol{\eta} \in S$  admite la parametrización  $\eta_1(\theta) = \cos(\theta)$  y  $\eta_2(\theta) = \sin(\theta)$ , donde  $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$  con  $\underline{\theta}$  y  $\bar{\theta}$  parámetros que se deben elegir de manera apropiada con la propiedad evidente:  $\bar{\theta} - \underline{\theta} = 2\pi$ .

De acuerdo con el esquema que se muestra en la **Figura 2.4**, si se fija  $\boldsymbol{\eta} \in S$ , entonces cada punto  $\mathbf{y}_u(T) \in \partial Q(T)$  satisface la desigualdad

$$|\boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{y}_u(T)| \leq d(\boldsymbol{\eta}),$$

donde la igualdad se alcanza cuando  $\mathbf{y}_u(T)$  tiene la máxima proyección sobre  $\boldsymbol{\eta}$ , es decir, cuando  $\mathbf{y}_u(T)$  corresponde al punto de tangencia de  $\Pi(\boldsymbol{\eta})$  con  $\partial Q(t)$ . Esta última observación permite escribir de forma equivalente la definición de  $d(\boldsymbol{\eta})$  como sigue:

$$d(\boldsymbol{\eta}) = \max_{\mathbf{y}_u(T) \in \partial Q(T)} |\boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{y}_u(T)| = \max_{u(t) \in \mathcal{U}_\delta} \int_0^T \boldsymbol{\eta}^\top e^{A\tau} \mathbf{b} u(T - \tau) \, d\tau,$$

y ya que esta integral toma su mayor valor cuando el integrando resulta ser positivo, se desprende que la perturbación externa  $u_{\text{máx}}(t) \in \mathcal{U}_\delta$  que permite alcanzar la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $Q(T)$ , se describe necesariamente por

$$u_{\text{máx}}(T-t) = \delta \operatorname{sign}(\boldsymbol{\eta}^\top e^{At} \mathbf{b}). \quad (2.8 \blacktriangleleft)$$

Luego, se sigue que

$$d(\boldsymbol{\eta}) = \delta \int_0^T |\boldsymbol{\eta}^\top e^{A\tau} \mathbf{b}| \, d\tau.$$

Se observa en sí, que el argumento de la función definida en (2.8) no solo depende de los valores del tiempo  $t \in [0, T]$ , sino que también depende de cada vector  $\boldsymbol{\eta} \in S$ .

Las relaciones (2.7) y (2.8) permiten determinar los puntos  $\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(T)$  de la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $Q(T)$ , los cuales son definidos por

$$\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(T) = \int_0^T e^{A\tau} \mathbf{b} u_{\text{máx}}(T-\tau) \, d\tau = \delta \int_0^T \operatorname{sign}(\boldsymbol{\eta}^\top e^{A\tau} \mathbf{b}) e^{A\tau} \mathbf{b} \, d\tau,$$

y que dependen de los vectores  $\boldsymbol{\eta} \in S$ . Del supuesto realizado sobre la parametrización  $\boldsymbol{\eta}(\theta)$ , cada punto  $\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(T)$  de la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $Q(T)$  se puede considerar como la imagen de una transformación definida sobre el conjunto de vectores  $\boldsymbol{\eta}(\theta) \in S$ , es decir, por una transformación no lineal  $\mathbf{h}: [\theta, \bar{\theta}] \rightarrow Q(T)$  definida por

$$\mathbf{h}(\theta) = \delta \int_0^T \operatorname{sign}(\boldsymbol{\eta}(\theta)^\top e^{A\tau} \mathbf{b}) e^{A\tau} \mathbf{b} \, d\tau. \quad (2.9 \blacktriangleleft)$$

El dominio  $[\theta, \bar{\theta}]$  de esta transformación se debe elegir de tal manera que  $\mathbf{h}$  sea una función periódica.

El valor de la integral en (2.9) depende del signo de la función escalar

$$\boldsymbol{\eta}(\theta)^\top e^{At} \mathbf{b} = \varphi_1(t) \cos(\theta) + \varphi_2(t) \sin(\theta), \quad t \in [0, T],$$

donde la función  $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))^\top$  es definida por  $\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{At} \mathbf{b}$ . Por lo tanto, si la función  $\boldsymbol{\eta}(\theta)^\top e^{At} \mathbf{b}$  no cambia de signo para todo  $t \in [0, T]$  y todo

$\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ , entonces la función (2.9) es una función continua y diferenciable que sólo depende del valor constante  $T > 0$ . En caso contrario, si la función  $\boldsymbol{\eta}(\theta)^\top e^{At} \mathbf{b}$  cambia de signo para al menos un  $\theta_0 \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ , entonces la función (2.9) es continua pero no necesariamente diferenciable. Este caso es de interés particular, ya que es necesario determinar todos los puntos  $\theta$  en  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$  para los cuales  $\boldsymbol{\eta}(\theta)^\top e^{At} \mathbf{b} = 0$ , lo cual no siempre es posible realizar de forma analítica. Se observa que de existir puntos  $\theta$  en  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$  para los cuales  $\boldsymbol{\eta}(\theta)^\top e^{At} \mathbf{b} = 0$ , el número de ellos es finito, debido a la analiticidad de la función  $e^{At} \mathbf{b}$ .

### 2.2.1. Conjuntos de alcanzabilidad de sistemas oscilatorios

A la luz de los resultados que se obtuvieron en el apartado anterior, se considera ahora, como caso particular, el problema de determinar los conjuntos de alcanzabilidad  $\mathcal{Q}(T)$  definidos en un instante  $T > 0$ , para el caso de la familia de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con una perturbación externa y condiciones iniciales nulas:

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega^2 y = u(t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad u(t) \in \mathcal{U}_\delta,$$

donde  $0 < \mu < \omega$  y  $\delta > 0$  son constantes. Los resultados que se presentan corresponden a una extensión de los que se obtuvieron en [Temoltzi-Ávila y Zhermolenko \(2021\)](#).

Por considerar el cambio de coordenadas  $y_1 = y$  y  $y_2 = \dot{y}$ , el sistema de ecuaciones diferenciales propuesto describe un caso particular de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.6):

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, & y_1(0) &= 0, \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 y_1 - 2\mu y_2 + u(t), & y_2(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.10 \blacktriangleleft)$$

Debido a que la matriz de controlabilidad  $U = (\mathbf{b}, A\mathbf{b})$  es no singular, si se considera la transformación lineal no singular

$$\mathbf{y} = C\mathbf{z},$$



donde

$$C = \frac{1}{\omega^2} \begin{pmatrix} \vartheta & -\mu \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \vartheta = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}, \quad (2.11 \blacktriangleleft)$$

se obtiene como caso particular de (2.6) la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con una perturbación externa

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\mu z_1 + \vartheta z_2 + \frac{\mu}{\vartheta} u(t), & z_1(0) &= 0, \\ \dot{z}_2 &= -\vartheta z_1 - \mu z_2 + u(t), & z_2(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.12 \blacktriangleleft)$$

La solución  $z(t) = (z_1(t), z_2(t))^\top$  del sistema de ecuaciones diferenciales (2.12) definida en un instante  $T > 0$  dado se describe como

$$z(T) = \int_0^T e^{A\tau} \mathbf{b} u(T - \tau) d\tau,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -\mu & \vartheta \\ -\vartheta & -\mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \frac{1}{\vartheta} \begin{pmatrix} \mu \\ \vartheta \end{pmatrix},$$

y  $e^{At}$  denota la matriz exponencial de la matriz  $A^3$ , la cual se describe por:

$$e^{At} = e^{-\mu t} \begin{pmatrix} \cos(\vartheta t) & \sin(\vartheta t) \\ -\sin(\vartheta t) & \cos(\vartheta t) \end{pmatrix}.$$

Para  $\eta(\theta)$ , se obtiene

$$\begin{aligned} u_{\max}(T - t) &= \delta \operatorname{sign}(\eta(\theta)^\top e^{At} \mathbf{b}) = \delta \operatorname{sign} \left( \frac{\mu}{\vartheta} \cos(\vartheta t + \theta) + \sin(\vartheta t + \theta) \right) \\ &= \delta \operatorname{sign}(\cos(\vartheta t + \theta - m)), \end{aligned}$$

donde

$$m = \arctan \left( \frac{\vartheta}{\mu} \right),$$

---

<sup>3</sup>Un algoritmo que permite determinar la matriz exponencial  $e^{At}$  de una matriz  $A$  con coeficientes constantes, llamado *método de Putzer*, se presenta en Putzer (1966). Adicionalmente, en Waltman (2004) se pueden consultar algunos detalles y ejemplos sobre el método de Putzer.

y, por consiguiente, la transformación  $\mathbf{h}(\theta) = (h_1(\theta), h_2(\theta))^T$  definida en (2.9) es determinada de tal manera que:

$$\mathbf{h}(\theta) = \delta \int_0^T \text{sign}(\cos(\vartheta\tau + \theta - m)) \boldsymbol{\varphi}(\tau) d\tau, \quad \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]. \quad (2.13 \blacktriangleleft)$$

donde  $\boldsymbol{\varphi}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una función vectorial  $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))^T$  cuyas componentes son definidas por

$$\varphi_1(t) = e^{-\mu t} \left( \frac{\mu}{\vartheta} \cos(\vartheta t) + \sin(\vartheta t) \right), \quad \varphi_2(t) = e^{-\mu t} \left( \cos(\vartheta t) - \frac{\mu}{\vartheta} \sin(\vartheta t) \right).$$

Los valores de  $h_1$  y  $h_2$  dependen de la función  $\text{sign}(\cos(\vartheta\tau + \theta - m))$ , la cual no es definida en aquellos valores  $\tau \in [0, T]$  y  $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$  para los cuales se cumple la ecuación  $\cos(\vartheta\tau + \theta - m) = 0$ , es decir, aquellos puntos de la forma  $(\tau, \theta)$  que se hallan en la colección de rectas

$$\ell_j : \vartheta\tau + \theta - m = \frac{1}{2}(2j + 1)\pi, \quad j \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (2.14 \blacktriangleleft)$$

En tal situación, es necesario analizar el conjunto de rectas que caracterizan la menor región rectangular  $\Omega = [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \times [0, T]$  con el fin de hallar el dominio de definición  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$  de la función vectorial (2.13).

En los siguientes apartados se estudia este problema para la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.12) al determinar de forma explícita la función  $\mathbf{h}$  y su intervalo de periodicidad  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ , considerando diferentes instantes  $T > 0$ . En esta tarea se hará uso recurrente de las funciones  $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que son definidas por

$$f_1(t) = \exp(-\mu t) \cos(\vartheta t), \quad f_2(t) = \exp(-\mu t) \sin(\vartheta t), \quad t \in \mathbb{R},$$

y la sucesión de intervalos  $\{J_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  definidos por

$$J_\nu = \left[ \frac{(\nu - 1)\pi}{\vartheta}, \frac{\nu\pi}{\vartheta} \right], \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

De forma adicional se define

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{\pi\mu}{2\vartheta}\right).$$

Si surgiesen conflictos de opiniones, dos filósofos no disutirían más que dos contables: bastaría con que cogiesen papel y lápiz, se sentaran y se dijeran el uno al otro: «Calculemos».

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)  
Matemático y filósofo alemán

### Conjuntos de alcanzabilidad $Q(T)$ para $T \in J_1$

Se considera el esquema en el plano cartesiano  $(\theta, \tau)$  que se muestra en la **Figura 2.5**, el cual se obtiene de las rectas

$$\ell_0 : \vartheta\tau + \theta = m + \frac{1}{2}\pi, \quad \ell_1 : \vartheta\tau + \theta = m + \frac{3}{2}\pi, \quad \ell_2 : \vartheta\tau + \theta = m + \frac{5}{2}\pi.$$

El conjunto  $\Omega$  se describe por una región rectangular que admite la representación  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$ , donde  $\Omega_k = [\theta_{k-1}, \theta_k] \times [0, T]$  y

$$\begin{aligned} \theta_0 = m + \frac{1}{2}\pi, \quad \theta_1 = m + \frac{3}{2}\pi - \vartheta T, \quad \theta_2 = m + \frac{3}{2}\pi, \\ \theta_3 = m + \frac{5}{2}\pi - \vartheta T, \quad \theta_4 = m + \frac{5}{2}\pi, \end{aligned} \quad (2.15 \blacktriangleleft)$$

de donde se observa que  $0 < \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4$ . Es claro que los intervalos  $[\theta_0, \theta_1]$  y  $[\theta_2, \theta_3]$  se reducen a los puntos  $\theta_0$  y  $\theta_2$  si  $\vartheta T \rightarrow \pi^-$ .

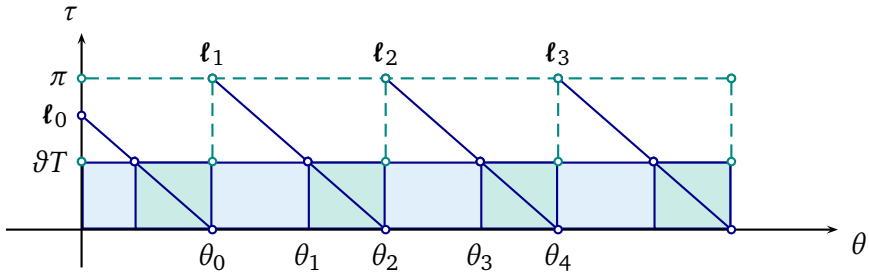
Sobre las rectas  $\ell_1$  y  $\ell_2$  se eligen puntos de la forma  $(\theta, T_1(\theta))$  y  $(\theta, T_2(\theta))$  en los cuales se describe la transición de signo de la función  $\cos(\vartheta\tau + \theta - m)$ . Esto permite obtener

$$T_1(\theta) = \frac{m + \frac{3}{2}\pi - \theta}{\vartheta}, \quad T_2(\theta) = \frac{m + \frac{5}{2}\pi - \theta}{\vartheta}.$$

Se determina ahora, para este caso particular, la función  $h$  definida en (2.13) y el intervalo de definición  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$  de esta función.

Se observa primero que  $\text{sign}(\cos(\vartheta\tau + \theta - m)) = -1$  para todo par ordenado  $(\theta, \tau)$  que satisface las desigualdades  $\theta_0 < \theta < \theta_1$  y  $0 < \vartheta\tau < \vartheta T$ . Por consiguiente, en la región  $\Omega_1$  se obtiene la representación

$$h(\theta) = -\delta \int_0^T \varphi(\tau) \, d\tau, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_1].$$



**Figura 2.5.** Construcción de la región  $\Omega$  en el plano  $(\theta, \tau)$  en el caso  $0 < \vartheta T < \pi$ .

En  $\Omega_2$  se halla definida la recta  $\ell_1$ , la cual divide esta región en dos subconjuntos en los que se debe analizar el signo de la función  $\cos(\vartheta\tau + \theta - m)$ . Si se elige  $(\theta, \tau)$  tal que  $\theta_1 < \theta < \theta_2$  y  $0 < \vartheta\tau < m + \frac{3}{2}\pi - \theta$ , se observa que  $\text{sign}(\cos(\vartheta\tau + \theta - m)) = -1$ , ya que en tal caso resulta la desigualdad  $\frac{1}{2}\pi < \vartheta\tau + \theta - m < \frac{3}{2}\pi$ . Ahora bien, si se elige el par ordenado  $(\theta, \tau)$  tales que  $\theta_1 < \theta < \theta_2$  y  $m + \frac{3}{2}\pi - \theta < \vartheta\tau < \vartheta T$ , entonces se debe cumplir que  $\text{sign}(\cos(\vartheta\tau + \theta - m)) = +1$ , ya que en ese caso tiene validez la desigualdad  $\frac{3}{2}\pi < \vartheta\tau + \theta - m < \frac{5}{2}\pi$ . Por lo tanto, la función  $h$  definida en la región  $\Omega_2$  se expresa como

$$h(\theta) = \delta \left( - \int_0^{T_1(\theta)} \varphi(\tau) d\tau + \int_{T_1(\theta)}^T \varphi(\tau) d\tau \right), \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2].$$

Después de integrar las expresiones anteriores para  $0 < \vartheta T < \pi$ , se obtiene

$$h(\theta) = \frac{\delta}{\vartheta} \begin{pmatrix} h_1(\theta) \\ h_2(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_2],$$

donde  $h_1$  y  $h_2$  son funciones escalares definidas por trozos:

$$h_1(\theta) = \begin{cases} -1 + f_1(T), & \theta_0 \leq \theta < \theta_1, \\ -1 - f_1(T) + 2\Lambda^3 f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_1 \leq \theta < \theta_2, \end{cases} \quad (2.16) \blacktriangleleft$$

$$h_2(\theta) = \begin{cases} -f_2(T), & \theta_0 \leq \theta < \theta_1, \\ f_2(T) + 2\Lambda^3 f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_1 \leq \theta < \theta_2. \end{cases}$$

En el conjunto  $\Omega_3$  no existe definida ninguna recta. Por lo tanto, si se elige el par ordenado  $(\theta, \tau)$ , se concluye que  $\text{sign}(\cos(\vartheta\tau + \theta - m)) = +1$ , debido a que sobre este conjunto se satisface  $\frac{3}{2}\pi < \vartheta\tau + \theta - m < \frac{5}{2}\pi$ . De esto se obtiene que la función  $\mathbf{h}$  definida en  $\Omega_3$  es descrita por:

$$\mathbf{h}(\theta) = \delta \int_0^T \boldsymbol{\varphi}(\tau) d\tau, \quad \theta \in [\theta_2, \theta_3).$$

En la región  $\Omega_4$  se halla la recta  $\ell_2$ , la cual divide a este conjunto en dos subconjuntos. Se analiza el signo de  $\cos(\vartheta\tau + \theta - m)$  en cada uno de ellos. Si el par  $(\theta, \tau)$  se elige tal que  $\theta_3 < \theta < \theta_4$  y  $0 < \vartheta\tau < m + \frac{5}{2}\pi - \theta$ , entonces resulta que  $\text{sign}(\cos(\vartheta\tau + \theta - m)) = +1$ , ya que  $\frac{3}{2}\pi < \vartheta\tau + \theta - m < \frac{5}{2}\pi$ . Si  $(\theta, \tau)$  es tal que  $\theta_3 < \theta < \theta_4$  y  $m + \frac{5}{2}\pi - \theta < \vartheta\tau < \vartheta T$ , entonces  $\text{sign}(\cos(\vartheta\tau + \theta - m)) = -1$ , debido a que bajo esas condiciones se cumple  $\frac{5}{2}\pi < \vartheta\tau + \theta - m < \frac{7}{2}\pi$ . Por lo tanto, en  $\Omega_4$  se obtiene

$$\mathbf{h}(\theta) = \delta \left( \int_0^{T_2(\theta)} \boldsymbol{\varphi}(\tau) d\tau - \int_{T_2(\theta)}^T \boldsymbol{\varphi}(\tau) d\tau \right), \quad \theta \in [\theta_3, \theta_4].$$

Así

$$\mathbf{h}(\theta) = \frac{\delta}{\vartheta} \begin{pmatrix} h_1(\theta) \\ h_2(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [\theta_2, \theta_4],$$

donde

$$\begin{aligned} h_1(\theta) &= \begin{cases} 1 - f_1(T), & \theta_2 \leq \theta < \theta_3, \\ 1 + f_1(T) + 2\Lambda^5 f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4, \end{cases} \\ h_2(\theta) &= \begin{cases} f_2(T), & \theta_2 \leq \theta < \theta_3, \\ -f_2(T) + 2\Lambda^5 f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.17 \blacktriangleleft)$$

Como resumen de las expresiones (2.16) y (2.17), se sigue que para cada instante  $T > 0$  tal que  $\vartheta T \in (0, \pi)$ , la función  $\mathbf{h}: [\theta_0, \theta_4] \rightarrow \mathcal{Q}(T)$  se define por

$$\mathbf{h}(\theta) = \frac{\delta}{\vartheta} \begin{pmatrix} h_1(\theta) \\ h_2(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_4], \quad (2.18 \blacktriangleleft)$$

con  $h_1$  y  $h_2$  funciones definidas por tramos, cuyas representaciones son:

$$h_1(\theta) = \begin{cases} -1 + f_1(T), & \theta_0 \leq \theta < \theta_1, \\ -1 - f_1(T) + 2\Lambda^3 f_2\left(\frac{m-\theta}{9}\right), & \theta_1 \leq \theta < \theta_2, \\ 1 - f_1(T), & \theta_2 \leq \theta < \theta_3, \\ 1 + f_1(T) + 2\Lambda^5 f_2\left(\frac{m-\theta}{9}\right), & \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4, \end{cases}$$

$$h_2(\theta) = \begin{cases} -f_2(T), & \theta_0 \leq \theta < \theta_1, \\ f_2(T) + 2\Lambda^3 f_1\left(\frac{m-\theta}{9}\right), & \theta_1 \leq \theta < \theta_2, \\ f_2(T), & \theta_2 \leq \theta < \theta_3, \\ -f_2(T) + 2\Lambda^5 f_1\left(\frac{m-\theta}{9}\right), & \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4, \end{cases}$$

donde  $\theta_k$  son los parámetros definidos en (2.15).

La definición de los parámetros  $\theta_0$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_4$  permite verificar directamente que la función (2.18) satisface las igualdades  $\mathbf{p}_0^-(T) = \mathbf{h}(\theta_0) = \mathbf{h}(\theta_4)$  y  $\mathbf{p}_0^+(T) = \mathbf{h}(\theta_2)$ , donde

$$\mathbf{p}_0^\pm(T) = \pm \frac{\delta}{9} \begin{pmatrix} 1 - f_1(T) \\ f_2(T) \end{pmatrix}, \quad T \in J_1. \quad (2.19 \blacktriangleleft)$$

Se puede comprobar directamente que el conjunto  $\mathbf{h}([\theta_0, \theta_4])$  representa una trayectoria cerrada y simple que es suave a trozos y, por lo tanto, se puede verificar también que la función vectorial  $\mathbf{h}: [\theta_0, \theta_4] \rightarrow \mathcal{Q}(T)$  es continua en  $[\theta_0, \theta_4]$  y diferenciable en  $(\theta_0, \theta_1) \cup (\theta_1, \theta_2) \cup (\theta_2, \theta_3) \cup (\theta_3, \theta_4)$  para cada  $T > 0$  tal que  $\vartheta T \in (0, \pi)$ . Se obtienen de forma adicional las siguientes propiedades.

La imagen de los intervalos cerrados  $[\theta_0, \theta_1]$  y  $[\theta_2, \theta_3]$  bajo  $\mathbf{h}$  para cada  $T > 0$  tal que  $\vartheta T \in (0, \pi)$ , y en los cuales  $\mathbf{h}$  es constante, pertenecen a las imágenes  $\mathbf{p}_0^\pm: J_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Por otra parte, los puntos en los cuales no es diferenciable  $\mathbf{h}: [\theta_0, \theta_4] \rightarrow \mathcal{Q}(T)$ , son precisamente los puntos que se describen por  $\mathbf{p}_0^\pm(T)$  para cada  $T > 0$  que satisface la desigualdad  $0 < \vartheta T < \pi$ . Finalmente, se sigue de la definición de las funciones  $h_1$  y  $h_2$  que si se eligen instantes  $T_1, T_2 > 0$  tal que  $0 < \vartheta T_1 < \vartheta T_2 < \pi$ , entonces  $\partial \mathcal{Q}(T_1) \cap \partial \mathcal{Q}(T_2) = \emptyset$ .

Como consecuencia de lo anterior, resulta que el intervalo de definición de la función vectorial  $\mathbf{h}: [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow \mathcal{Q}(T)$  que describe cada conjunto de alcanzabilidad  $\mathcal{Q}(T)$  para cada  $T > 0$  tal que  $\vartheta T \in (0, \pi)$  es

$$[\underline{\theta}, \bar{\theta}] = [m + \frac{1}{2}\pi, m + \frac{5}{2}\pi].$$

Esta función se puede extender a una función periódica definida sobre la recta real  $\mathbb{R}$ , cuyo periodo de oscilación debe ser  $2\pi$ .


Se observa además que

$$\alpha_0 = \lim_{T \rightarrow 0^+} \mathbf{p}_0^\pm(T) = 0,$$

mientras que

$$\pm \alpha_1 = \lim_{T \rightarrow \frac{\pi}{\vartheta}} \mathbf{p}_0^\pm(T) = \pm \frac{\delta}{\vartheta} \begin{pmatrix} 1 + \Lambda^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En el siguiente ejemplo se ilustran de forma numérica los resultados.

 **Ejemplo 2.1.** Como caso particular, para la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.10), se consideran los parámetros  $\omega = 1.0$  y  $\mu = 0.2$ . Se supone también que las perturbaciones externas tienen como cota el valor  $\delta = 1.0$ . Con estos valores se obtienen las aproximaciones:  $\Lambda \approx 0.7256$ ,  $m \approx 1.3694$ ,  $\vartheta \approx 0.9797$ .

En la Figura 2.6 se muestran diferentes conjuntos de alcanzabilidad  $\mathcal{Q}(T_k)$  que se han obtenido a partir de la función  $\mathbf{h}$  definida en (2.18), en los cuales se han empleado los valores

$$T_k = \frac{k}{5} \cdot \frac{\pi}{\vartheta}, \quad k = 1, 2, \dots, 5.$$

En tal caso, se tiene  $T_1 \approx 0.6412$ ,  $T_2 \approx 1.2825$ ,  $T_3 \approx 1.9238$ ,  $T_4 \approx 2.5651$  y  $T_5 \approx 3.2063$ . En la Figura 2.6 se presentan también las trayectorias descritas por las funciones  $\mathbf{p}_0$  y  $-\mathbf{p}_0$  sobre las cuales no es diferenciable la función  $\mathbf{h}$ . En tal caso, para los valores dados se obtiene el punto

$$\alpha_1 \approx \begin{pmatrix} 1.5581 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

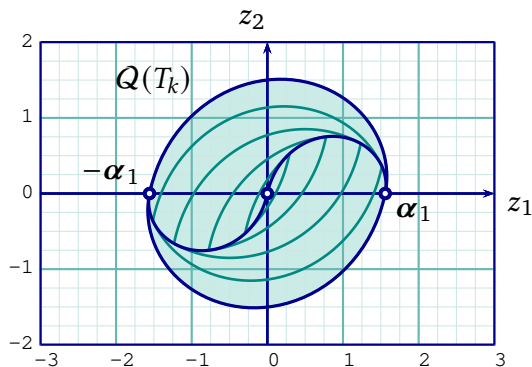


Figura 2.6. Conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T_k)$  del Ejemplo 2.1 cuando  $0 < \vartheta T_k < \pi$ .

Por otra parte, empleando la transformación  $\mathbf{y} = C\mathbf{z}$ , donde  $C$  es la matriz que se define en (2.11), se obtienen los conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T_k)$  para la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.10), cuyas gráficas se muestran en la Figura 2.7. Bajo esta transformación se obtiene ahora

$$\widehat{\alpha}_1 = C\alpha_1 \approx \begin{pmatrix} 1.5266 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

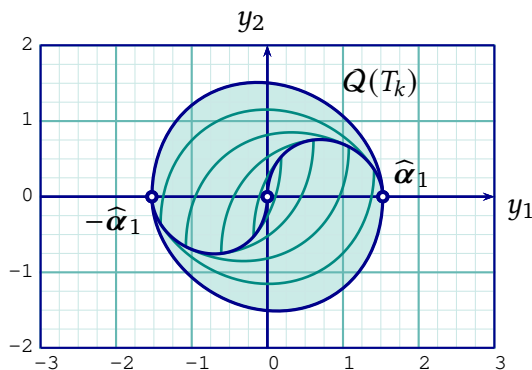



Figura 2.7. Conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T_k)$  del Ejemplo 2.1 cuando  $0 < \vartheta T_k < \pi$ .



Las Figuras 2.6 y 2.7 muestran la relación que existe entre los conjuntos de alcanzabilidad de la familias de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.10) y (2.12): si  $T_{j+1} > T_j > 0$  son instantes tales que  $\vartheta T_j, \vartheta T_{j+1} \in (0, \pi)$ , entonces los conjuntos de alcanzabilidad cumplen  $\mathcal{Q}(T_j) \subset \mathcal{Q}(T_{j+1})$ . Por consiguiente, si se considera una sucesión monótona creciente no negativa  $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tales que  $\vartheta T_k \in (0, \pi)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , entonces la sucesión  $\{\mathcal{Q}(T_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  define una sucesión creciente de conjuntos de alcanzabilidad, en el sentido de que  $\mathcal{Q}(T_k) \subset \mathcal{Q}(T_{k+1})$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . 

### Conjuntos de alcanzabilidad $\mathcal{Q}(T)$ para $T \in J_2$

Se procede de forma análoga al caso descrito anteriormente, y se considera el esquema que se muestra en la Figura 2.8, el cual se obtiene a partir de las rectas:

$$\begin{aligned} \ell_0 : \vartheta\tau + \theta &= m + \frac{1}{2}\pi, & \ell_1 : \vartheta\tau + \theta &= m + \frac{3}{2}\pi, & \ell_2 : \vartheta\tau + \theta &= m + \frac{5}{2}\pi, \\ \ell_3 : \vartheta\tau + \theta &= m + \frac{7}{2}\pi. \end{aligned}$$

El conjunto  $\Omega$  describe una región rectangular que admite la descomposición  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$ , con  $\Omega_k = [\theta_{k-1}, \theta_k] \times [0, T]$  y parámetros  $\theta_k$ :

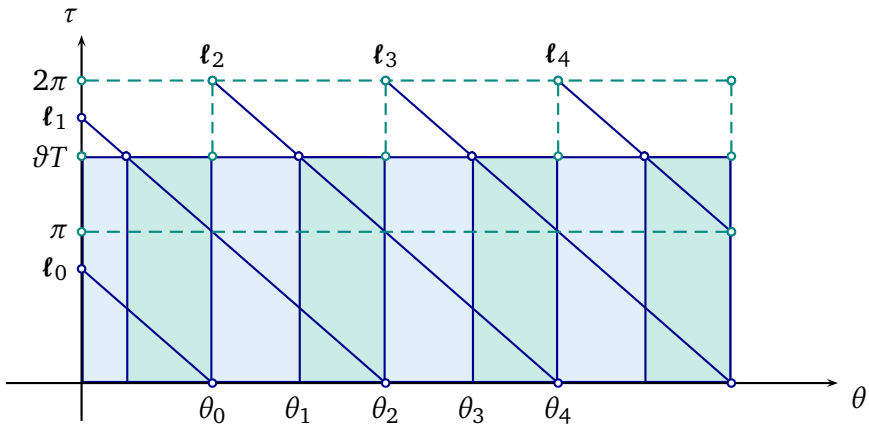
$$\begin{aligned} \theta_0 &= m + \frac{1}{2}\pi, & \theta_1 &= m + \frac{5}{2}\pi - \vartheta T, & \theta_2 &= m + \frac{3}{2}\pi, \\ \theta_3 &= m + \frac{7}{2}\pi - \vartheta T, & \theta_4 &= m + \frac{5}{2}\pi. \end{aligned} \quad (2.20 \blacktriangleleft)$$

Sobre cada una de las rectas  $\ell_1, \ell_2$  y  $\ell_3$  se eligen puntos de la forma  $(\theta, T_1(\theta)), (\theta, T_2(\theta))$  y  $(\theta, T_3(\theta))$ , a partir de los cuales se definen los instantes

$$T_1(\theta) = \frac{m + \frac{3}{2}\pi - \theta}{\vartheta}, \quad T_2(\theta) = \frac{m + \frac{5}{2}\pi - \theta}{\vartheta}, \quad T_3(\theta) = \frac{m + \frac{7}{2}\pi - \theta}{\vartheta},$$

los cuales permiten hallar la función (2.13).

Se observa primero que sobre la región  $\Omega_1$  se halla definida la recta  $\ell_1$ , quien divide a este conjunto en dos subconjuntos. Por lo tanto, existe una única transición de signo de la función  $\cos(\vartheta\tau + \theta - m)$ . Así, si se elige un punto  $(\theta, \tau)$  en la región  $\Omega_1$ , entonces  $\theta_0 < \theta < \theta_1$  y  $0 < \vartheta\tau < m + \frac{3}{2}\pi - \theta$ ,



**Figura 2.8.** Construcción de la región  $\Omega$  en el plano  $(\theta, \tau)$  en el caso  $\pi < \vartheta T < 2\pi$ .

lo cual a su vez, implica que  $\frac{1}{2}\pi < \vartheta\tau + \theta - m < \frac{3}{2}\pi$  y, por consiguiente,  $\text{sign}(\cos(\vartheta\tau + \theta - m)) = -1$ . Por el contrario, si el par  $(\theta, \tau)$  se elige tal que  $\theta_0 < \theta < \theta_1$  y  $m + \frac{3}{2}\pi - \theta < \vartheta\tau < \vartheta T$ , entonces  $\text{sign}(\cos(\vartheta\tau + \theta - m)) = +1$ , ya que bajo tales condiciones se cumple la desigualdad  $\frac{3}{2}\pi < \vartheta\tau + \theta - m < \frac{5}{2}\pi$ . Por lo tanto, sobre  $\Omega_1$  se obtiene

$$h(\theta) = \delta \left( - \int_0^{T_1(\theta)} \varphi(\tau) d\tau + \int_{T_1(\theta)}^T \varphi(\tau) d\tau \right), \quad \theta \in [\theta_0, \theta_1].$$

En el conjunto  $\Omega_2$  se hallan las rectas  $l_1$  y  $l_2$ , quienes dividen a este conjunto en tres regiones sobre las cuales se debe determinar el signo de la función  $\cos(\vartheta\tau + \theta - m)$ . Si en  $\Omega_2$  se elige el par ordenado  $(\theta, \tau)$  de tal manera que  $\theta_1 < \theta < \theta_2$  y  $0 < \vartheta\tau < m + \frac{3}{2}\pi - \theta$ , entonces  $\text{sign}(\cos(\vartheta\tau + \theta - m)) = -1$ , ya que en tal situación  $\frac{1}{2}\pi < \vartheta\tau + \theta - m < \frac{3}{2}\pi$ . Por el contrario, si el par ordenado  $(\theta, \tau)$  se elige de tal manera que sus componentes satisfacen las desigualdades  $\theta_1 < \theta < \theta_2$  y  $m + \frac{3}{2}\pi - \theta < \vartheta\tau < m + \frac{5}{2}\pi - \theta$ , entonces  $\text{sign}(\cos(\vartheta\tau + \theta - m)) = +1$ . Finalmente, si son válidas las desigualdades  $\theta_1 < \theta < \theta_2$  y  $m + \frac{5}{2}\pi - \theta < \vartheta\tau < \vartheta T$ , entonces nuevamente se obtiene la expresión  $\text{sign}(\cos(\vartheta\tau + \theta - m)) = -1$ . Las transiciones de signo muestran

que (2.13) posee la siguiente representación sobre  $\Omega_2$ :

$$\mathbf{h}(\theta) = \delta \left( - \int_0^{T_1(\theta)} \boldsymbol{\varphi}(\tau) d\tau + \int_{T_1(\theta)}^{T_2(\theta)} \boldsymbol{\varphi}(\tau) d\tau - \int_{T_2(\theta)}^T \boldsymbol{\varphi}(\tau) d\tau \right), \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2].$$

Los casos descritos sobre la región  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ , permiten obtener parcialmente la función  $\mathbf{h}$  que describe los conjuntos de alcanzabilidad de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.12) sobre el intervalo  $[\theta_0, \theta_2]$ . Después de integrar las correspondientes expresiones, se halla que

$$\mathbf{h}(\theta) = \frac{\delta}{\vartheta} \begin{pmatrix} h_1(\theta) \\ h_2(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_2], \quad (2.21 \blacktriangleleft)$$

donde

$$h_1(\theta) = \begin{cases} -1 - f_1(T) + 2\Lambda^3 f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_0 \leq \theta < \theta_1, \\ -1 + f_1(T) + 2(\Lambda^3 + \Lambda^5) f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \end{cases}$$

$$h_2(\theta) = \begin{cases} f_2(T) + 2\Lambda^3 f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_0 \leq \theta < \theta_1, \\ -f_2(T) + 2(\Lambda^3 + \Lambda^5) f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2. \end{cases}$$

Si el par  $(\theta, \tau)$  se elige tal que  $\theta_2 < \theta < \theta_3$  y  $0 < \vartheta\tau < m + \frac{5}{2}\pi - \theta$ , entonces  $\text{sign}(\cos(\vartheta\tau + \theta - m)) = +1$ , mientras que si se elige tales que  $\theta_2 < \theta < \theta_3$  y  $m + \frac{5}{2}\pi - \theta < \vartheta\tau < \vartheta T$ , entonces  $\text{sign}(\cos(\vartheta\tau + \theta - m)) = -1$ . De esta manera, se obtiene que (2.13) es descrita por

$$\mathbf{h}(\theta) = \delta \left( \int_0^{T_2(\theta)} \boldsymbol{\varphi}(\tau) d\tau - \int_{T_2(\theta)}^T \boldsymbol{\varphi}(\tau) d\tau \right), \quad \theta \in [\theta_2, \theta_3].$$

En  $\Omega_3 \cup \Omega_4$  se obtiene el siguiente análisis. Si se elige  $(\theta, \tau)$  con  $\theta_3 < \theta < \theta_4$  y  $0 < \vartheta\tau < m + \frac{5}{2}\pi - \theta$ , entonces  $\text{sign}(\cos(\vartheta\tau + \theta - m)) = +1$ , no obstante, si se satisface  $\theta_3 < \theta < \theta_4$  y  $m + \frac{5}{2}\pi - \theta < \vartheta\tau < m + \frac{7}{2}\pi - \theta$ , entonces resulta que  $\text{sign}(\cos(\vartheta\tau + \theta - m)) = -1$ , finalmente, si las coordenadas de  $(\theta, \tau)$  se eligen de tal manera que  $\theta_3 < \theta < \theta_4$  y  $m + \frac{7}{2}\pi - \theta < \vartheta\tau < \vartheta T$ , entonces nuevamente

$\text{sign}(\cos(\vartheta\tau + \theta - m)) = +1$ . De esta manera, se obtiene de (2.13):

$$\mathbf{h}(\theta) = \delta \left( \int_0^{T_2(\theta)} \boldsymbol{\varphi}(\tau) d\tau - \int_{T_2(\theta)}^{T_3(\theta)} \boldsymbol{\varphi}(\tau) d\tau + \int_{T_3(\theta)}^T \boldsymbol{\varphi}(\tau) d\tau \right), \quad \theta \in [\theta_3, \theta_4].$$

De las expresiones anteriores válidas en la región  $\Omega_3 \cup \Omega_4$ , se sigue que las parametrizaciones  $h_1$  y  $h_2$  de la función

$$\mathbf{h}(\theta) = \frac{\delta}{\vartheta} \begin{pmatrix} h_1(\theta) \\ h_2(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [\theta_2, \theta_4], \quad (2.22 \blacktriangleleft)$$

se describen por las expresiones

$$h_1(\theta) = \begin{cases} 1 + f_1(T) + 2\Lambda^5 f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_2 < \theta < \theta_3, \\ 1 - f_1(T) + 2(\Lambda^5 + \Lambda^7) f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4, \end{cases}$$

$$h_2(\theta) = \begin{cases} -f_2(T) + 2\Lambda^5 f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_2 < \theta < \theta_3, \\ f_2(T) + 2(\Lambda^5 + \Lambda^7) f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4. \end{cases}$$

Como consecuencia del análisis que se realizó, se sigue de las expresiones (2.21) y (2.22) que, para cada instante  $T > 0$  que satisface  $\vartheta T \in (\pi, 2\pi)$ , la parametrización de la función vectorial  $\mathbf{h}: [\theta_0, \theta_2] \rightarrow \mathcal{Q}(T)$  es definida por

$$\mathbf{h}(\theta) = \frac{\delta}{\vartheta} \begin{pmatrix} h_1(\theta) \\ h_2(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_4], \quad (2.23 \blacktriangleleft)$$

donde

$$h_1(\theta) = \begin{cases} -1 - f_1(T) + 2\Lambda^3 f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_0 \leq \theta < \theta_1, \\ -1 + f_1(T) + 2(\Lambda^3 + \Lambda^5) f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \\ 1 + f_1(T) + 2\Lambda^5 f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_2 < \theta < \theta_3, \\ 1 - f_1(T) + 2(\Lambda^5 + \Lambda^7) f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4, \end{cases}$$

$$h_2(\theta) = \begin{cases} f_2(T) + 2\Lambda^3 f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_0 \leq \theta < \theta_1, \\ -f_2(T) + 2(\Lambda^3 + \Lambda^5) f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \\ -f_2(T) + 2\Lambda^5 f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_2 < \theta < \theta_3, \\ f_2(T) + 2(\Lambda^5 + \Lambda^7) f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4, \end{cases}$$

donde  $\theta_k$  son los parámetros definidos en (2.20).

Se puede verificar a partir de la función (2.23) y los parámetros  $\theta_0, \theta_2$  y  $\theta_4$ , que se satisfacen las igualdades  $\mathbf{p}_1^-(T) = \mathbf{h}(\theta_0) = \mathbf{h}(\theta_4)$  y  $\mathbf{p}_1^+(T) = \mathbf{h}(\theta_2)$ , donde

$$\mathbf{p}_1^\pm(T) = \pm \frac{\delta}{\vartheta} \begin{pmatrix} 1 + 2\Lambda^2 + f_1(T) \\ -f_2(T) \end{pmatrix}, \quad T \in J_2, \quad (2.24 \blacktriangleleft)$$

mientras que  $\mathbf{q}_1^-(T) = \mathbf{h}(\theta_1)$  y  $\mathbf{q}_1^+(T) = \mathbf{h}(\theta_3)$ , donde

$$\mathbf{q}_1^\pm(T) = \pm \frac{\delta}{\vartheta} \begin{pmatrix} 1 + (1 + 2\Lambda^{-2})f_1(T) \\ -(1 + 2\Lambda^{-2})f_2(T) \end{pmatrix}, \quad T \in J_2. \quad (2.25 \blacktriangleleft)$$

Se puede comprobar que  $\mathbf{h}([\theta_0, \theta_4])$  describe una trayectoria suave a trozos que es cerrada y simple. Se puede comprobar además que la función  $\mathbf{h}: [\theta_0, \theta_4] \rightarrow \mathcal{Q}(T)$  describe una trayectoria cerrada en el plano de fases que es continua en  $[\theta_0, \theta_4]$  y diferenciable en  $(\theta_0, \theta_1) \cup (\theta_1, \theta_2) \cup (\theta_2, \theta_3) \cup (\theta_3, \theta_4)$  para cada instante  $T > 0$  tal que  $\vartheta T \in (\pi, 2\pi)$ .

Como conclusión de las propiedades enunciadas, resulta que el intervalo de definición de la función vectorial  $\mathbf{h}: [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow \mathcal{Q}(T)$  que describe cada conjunto de alcanzabilidad  $\mathcal{Q}(T)$  para cada  $T > 0$  que satisface  $\vartheta T \in (\pi, 2\pi)$ , es definido por

$$[\underline{\theta}, \bar{\theta}] = [m + \frac{1}{2}\pi, m + \frac{5}{2}\pi].$$

La función  $\mathbf{h}: [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow \mathcal{Q}(T)$  se puede extender a una función periódica definida en  $\mathbb{R}$  cuyo periodo de oscilación es  $2\pi$ , con la propiedad de que tal extensión es continua en  $\mathbb{R}$  y no diferenciable en un conjunto numerable de puntos, entre los cuales se hallan los elementos del conjunto  $\{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ .

De la definición de  $h_1$  y  $h_2$  se infiere que si  $\pi < \vartheta T_1 < \vartheta T_2 < 2\pi$ , entonces  $\partial\mathcal{Q}(T_1) \cap \partial\mathcal{Q}(T_2) = \emptyset$ . Además, el conjunto de puntos en los cuales la función  $\mathbf{h}: [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow \mathcal{Q}(T)$  no es diferenciable, son los puntos que se describen por  $\mathbf{p}_1^\pm(T)$  y  $\mathbf{q}_1^\pm(T)$  para cada  $T > 0$  que satisface  $\vartheta T \in (\pi, 2\pi)$ .


Se observa además que

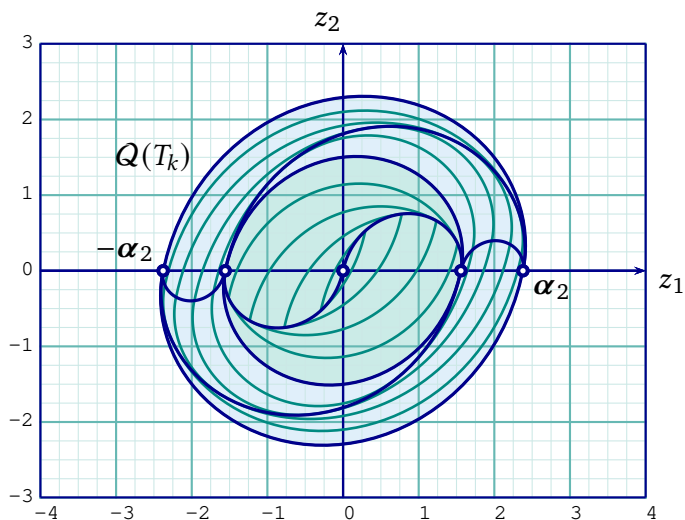
$$\pm \boldsymbol{\alpha}_1 = \lim_{T \rightarrow \frac{\pi}{\vartheta}^+} \mathbf{p}_1^\pm(T) = \lim_{T \rightarrow \frac{\pi}{\vartheta}^+} \mathbf{q}_1^\mp(T) = \pm \frac{\delta}{\vartheta} (1 + \Lambda^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mientras que

$$\pm\alpha_2 = \lim_{T \rightarrow \frac{2\pi}{\vartheta}} p_1^\pm(T) = \lim_{T \rightarrow \frac{2\pi}{\vartheta}} q_1^\pm(T) = \pm \frac{\delta}{\vartheta} (1 + \Lambda^2)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En el siguiente ejemplo se extienden los resultados del [Ejemplo 2.1](#).

 **Ejemplo 2.2.** Se considera nuevamente la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.12) en la que se toma  $\omega = 1.0$  y  $\mu = 0.2$ , mientras que la cota de las perturbaciones externas se elige como  $\delta = 1.0$ . Para estos valores se obtuvo en el [Ejemplo 2.1](#):  $\Lambda \approx 0.7256$ ,  $m \approx 1.3694$  y  $\vartheta \approx 0.9797$ .



**Figura 2.9.** Fronteras de alcanzabilidad  $Q(T_k)$  del [Ejemplo 2.2](#) cuando  $0 < \vartheta T_k < 2\pi$ .

En la [Figura 2.9](#) se presentan los conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T_k)$  que se obtuvieron en el [Ejemplo 2.1](#) bajo la función (2.18), ver la [Figura 2.6](#), así como las que se obtienen ahora a partir de la función definida en (2.23) para los instantes

$$T_{k+5} = \left(1 + \frac{k}{5}\right) \cdot \frac{\pi}{\vartheta}, \quad k = 1, 2, \dots, 5,$$


de donde resultan:  $T_6 = 3.8476$ ,  $T_7 = 4.4889$ ,  $T_8 = 5.1302$ ,  $T_9 = 5.7714$  y  $T_{10} = 6.4127$ . Se muestran también en la [Figura 2.9](#) las trayectorias que describen las funciones  $p_1^\pm$  y  $q_1^\pm$  sobre las cuales no es diferenciable la función  $h$ . Para estos valores se observa que las superficies de discontinuidad  $p_1^-$  y  $q_1^-$  tienden al punto  $-\alpha_2$  cuando  $T \rightarrow (2\pi/\vartheta)^+$ , mientras que  $p_1^+$  y  $-q_1^+$  convergen a  $\alpha_2$  cuando  $T \rightarrow (2\pi/\vartheta)^+$ , donde

$$\alpha_2 \approx \begin{pmatrix} 2.3786 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto muestra la extensión natural de los resultados numéricos que se obtuvieron en el [Ejemplo 2.1](#).

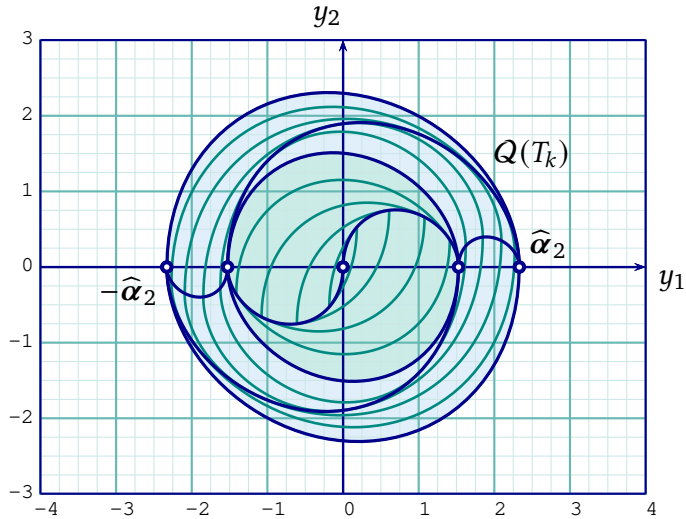
Empleando la transformación  $y = Cz$ , donde  $C$  es la matriz que se define en (2.11), se obtienen los conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T_k)$  para la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.10), cuyas gráficas se muestran en la [Figura 2.10](#). Bajo esta transformación resulta

$$\widehat{\alpha}_2 = C\alpha_2 \approx \begin{pmatrix} 2.3305 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se observa una vez más que los conjuntos de alcanzabilidad para las familias de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.10) y (2.12) es topológicamente equivalente al caso en que  $\vartheta T \in (\pi, 2\pi)$ . En particular, si se elige una sucesión  $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  monótona creciente de términos no negativos tales que  $\vartheta T_k \in (0, 2\pi)$  para cada  $k \in \mathbb{N}$  y tal que  $\vartheta T_k \rightarrow 2\pi$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , entonces la sucesión de conjuntos de alcanzabilidad  $\{Q(T_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  es creciente y acotada. 

### Conjuntos de alcanzabilidad $Q(T)$ para $T \in J_3$

En los apartados anteriores se ha mostrado un método que permite determinar de forma explícita los conjuntos de alcanzabilidad en instantes  $T > 0$  para los cuales se cumple la desigualdad  $0 < \vartheta T < 2\pi$ . Esta construcción sugiere que el método se puede extender empleando el mismo argumento



**Figura 2.10.** Conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T_k)$  del Ejemplo 2.2 cuando  $0 < \vartheta T_k < 2\pi$ .

cuando  $2\pi < \vartheta T < 3\pi$ . En este apartado se muestra de forma muy breve que este método conduce a resultados similares a los expuestos.

Se supone que  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$  es como se muestra en la Figura 2.11, donde  $\Omega_k = [\theta_{k-1}, \theta_k] \times [0, T]$ . Luego,  $\Omega$  queda determinado por las rectas

$$\begin{aligned} \ell_0 : \vartheta\tau + \theta &= m + \frac{1}{2}\pi, & \ell_1 : \vartheta\tau + \theta &= m + \frac{3}{2}\pi, & \ell_2 : \vartheta\tau + \theta &= m + \frac{5}{2}\pi, \\ \ell_3 : \vartheta\tau + \theta &= m + \frac{7}{2}\pi, & \ell_4 : \vartheta\tau + \theta &= m + \frac{9}{2}\pi, \end{aligned}$$

y, por consiguiente, a partir de estas rectas se obtienen los puntos

$$\begin{aligned} \theta_0 &= m + \frac{1}{2}\pi, & \theta_1 &= m + \frac{7}{2}\pi - \vartheta T, & \theta_2 &= m + \frac{3}{2}\pi, \\ \theta_3 &= m + \frac{9}{2}\pi - \vartheta T, & \theta_4 &= m + \frac{5}{2}\pi. \end{aligned}$$

Sobre cada recta  $\ell_1, \dots, \ell_4$  se eligen puntos  $(\theta, T_1(\theta)), \dots, (\theta, T_4(\theta))$  mediante los cuales es posible determinar la función (2.13), lo cual permite



obtener

$$T_1(\theta) = \frac{m + \frac{3}{2}\pi - \theta}{\vartheta}, \quad T_2(\theta) = \frac{m + \frac{5}{2}\pi - \theta}{\vartheta}, \quad T_3(\theta) = \frac{m + \frac{7}{2}\pi - \theta}{\vartheta},$$

$$T_4(\theta) = \frac{m + \frac{9}{2}\pi - \theta}{\vartheta}.$$

Se determina la función vectorial  $\mathbf{h}$  que describe las fronteras de los conjuntos de alcanzabilidad de la familia de ecuaciones diferenciales (2.12).

En el conjunto  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  se obtiene

$$\mathbf{h}(\theta) = \delta \sum_{k=0}^2 (-1)^{k+1} \int_{A_k} \boldsymbol{\varphi}(\tau) \, d\tau, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_1],$$

donde  $A_0 = [0, T_1(\theta)]$ ,  $A_1 = [T_1(\theta), T_2(\theta)]$  y  $A_2 = [T_2(\theta), T]$ , mientras que

$$\mathbf{h}(\theta) = \delta \sum_{k=0}^3 (-1)^{k+1} \int_{B_k} \boldsymbol{\varphi}(\tau) \, d\tau, \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2],$$

cuyos intervalos de integración son:  $B_0 = [0, T_1(\theta)]$ ,  $B_1 = [T_1(\theta), T_2(\theta)]$ ,  $B_2 = [T_2(\theta), T_3(\theta)]$  y  $B_3 = [T_3(\theta), T]$ . De igual manera, en el conjunto  $\Omega_3 \cup \Omega_4$  se obtiene la representación

$$\mathbf{h}(\theta) = \delta \sum_{k=0}^2 (-1)^k \int_{C_{k+1}} \boldsymbol{\varphi}(\tau) \, d\tau, \quad \theta \in [\theta_2, \theta_3],$$

donde  $C_1 = [0, T_2(\theta)]$ ,  $C_2 = [T_2(\theta), T_3(\theta)]$  y  $C_3 = [T_3(\theta), T]$ , mientras que

$$\mathbf{h}(\theta) = \delta \sum_{k=0}^3 (-1)^k \int_{D_{k+1}} \boldsymbol{\varphi}(\tau) \, d\tau, \quad \theta \in [\theta_3, \theta_4],$$

en cuyo caso, los intervalos de integración se definen de la siguiente manera:  $D_1 = [0, T_2(\theta)]$ ,  $D_2 = [T_2(\theta), T_3(\theta)]$ ,  $D_3 = [T_3(\theta), T_4(\theta)]$  y  $D_4 = [T_4(\theta), T]$ .

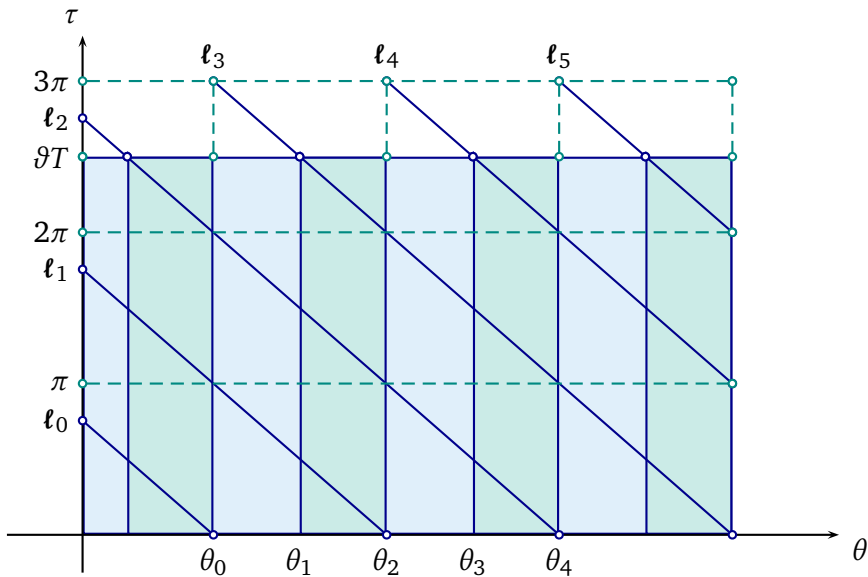
Las integrales correspondientes conducen a la expresión que define la función vectorial

$$\mathbf{h}(\theta) = \frac{\delta}{\vartheta} \begin{pmatrix} h_1(\theta) \\ h_2(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_4] \quad (2.26 \blacktriangleleft)$$

donde

$$h_1(\theta) = \begin{cases} -1 + f_1(T) + 2(\Lambda^3 + \Lambda^5)f_2\left(\frac{m-\theta}{9}\right), & \theta_0 \leq \theta < \theta_1, \\ -1 - f_1(T) + 2(\Lambda^3 + \Lambda^5 + \Lambda^7)f_2\left(\frac{m-\theta}{9}\right), & \theta_1 \leq \theta < \theta_2, \\ 1 - f_1(T) + 2(\Lambda^5 + \Lambda^7)f_2\left(\frac{m-\theta}{9}\right), & \theta_2 \leq \theta < \theta_3, \\ 1 + f_1(T) + 2(\Lambda^5 + \Lambda^7 + \Lambda^9)f_2\left(\frac{m-\theta}{9}\right), & \theta_3 \leq \theta < \theta_4, \end{cases}$$

$$h_2(\theta) = \begin{cases} -f_2(T) + 2(\Lambda^3 + \Lambda^5)f_1\left(\frac{m-\theta}{9}\right), & \theta_0 \leq \theta < \theta_1, \\ f_2(T) + 2(\Lambda^3 + \Lambda^5 + \Lambda^7)f_1\left(\frac{m-\theta}{9}\right), & \theta_1 \leq \theta < \theta_2, \\ f_2(T) + 2(\Lambda^5 + \Lambda^7)f_1\left(\frac{m-\theta}{9}\right), & \theta_2 \leq \theta < \theta_3, \\ -f_2(T) + 2(\Lambda^5 + \Lambda^7 + \Lambda^9)f_1\left(\frac{m-\theta}{9}\right), & \theta_3 \leq \theta < \theta_4. \end{cases}$$



**Figura 2.11.** Construcción de la región  $\Omega$  en el plano  $(\theta, \tau)$  en el caso  $2\pi < \vartheta T < 3\pi$ .

Se puede comprobar de manera directa que la función (2.26) es continua en el intervalo  $[\theta_0, \theta_4]$  y diferenciable en  $(\theta_0, \theta_1) \cup (\theta_1, \theta_2) \cup (\theta_2, \theta_3) \cup (\theta_3, \theta_4)$ ,

y que satisface  $\mathbf{p}_2^-(T) = \mathbf{h}(\theta_0) = \mathbf{h}(\theta_4)$  y  $\mathbf{p}_2^+(T) = \mathbf{h}(\theta_2)$ , donde

$$\mathbf{p}_2^\pm(T) = \pm \frac{\delta}{\vartheta} \begin{pmatrix} 1 + 2\Lambda^2 + 2\Lambda^4 - f_1(T) \\ f_2(T) \end{pmatrix}, \quad T \in J_3, \quad (2.27 \blacktriangleleft)$$

mientras que  $\mathbf{q}_2^+(T) = \mathbf{h}(\theta_1)$  y  $\mathbf{q}_2^-(T) = \mathbf{h}(\theta_3)$ , donde

$$\mathbf{q}_2^\pm(T) = \pm \frac{\delta}{\vartheta} \begin{pmatrix} -1 + (1 + 2\Lambda^{-2} + 2\Lambda^{-4})f_1(T) \\ -(1 + 2\Lambda^{-2} + 2\Lambda^{-4})f_2(T) \end{pmatrix}, \quad T \in J_3. \quad (2.28 \blacktriangleleft)$$

De lo anterior se sigue que la imagen del intervalo  $[\theta_0, \theta_4]$  bajo la función  $\mathbf{h}$  describe en el plano de fases una trayectoria cerrada simple que es suave a trozos para cada  $T > 0$  tal que  $\vartheta T \in (2\pi, 3\pi)$ . Se sigue también de la definición de las componentes  $h_1$  y  $h_2$  que si  $2\pi < \vartheta T_1 < \vartheta T_2 < 3\pi$ , entonces  $\partial Q(T_1) \cap \partial Q(T_2) = \emptyset$ . Finalmente, resulta que el conjunto de puntos en los cuales no es diferenciable la trayectoria que describe el conjunto de alcanzabilidad  $Q(T)$  para cada  $2\pi < \vartheta T < 3\pi$ , son los puntos  $\mathbf{p}_2^\pm(T)$  y  $\mathbf{q}_2^\pm(T)$ . Por consiguiente, se afirma que el dominio de definición de la función vectorial  $\mathbf{h}: [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow Q(T)$  que describe los conjuntos de alcanzabilidad para cada  $T > 0$  tal que  $\vartheta T \in (2\pi, 3\pi)$  es

$$[\underline{\theta}, \bar{\theta}] = [m + \frac{1}{2}\pi, m + \frac{5}{2}\pi].$$

La definición de las funciones  $\mathbf{p}_2^\pm$  y  $\mathbf{q}_2^\pm$  satisfacen los siguientes límites laterales

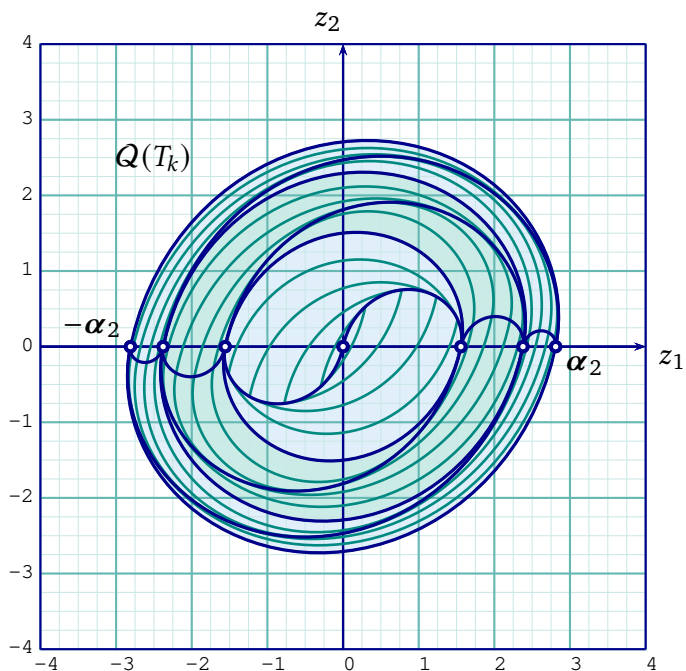
$$\pm \alpha_1 = \lim_{T \rightarrow \frac{2\pi}{\vartheta}^+} \mathbf{p}_2^\pm(T) = \lim_{T \rightarrow \frac{2\pi}{\vartheta}^+} \mathbf{q}_2^\pm(T) = \pm \frac{\delta}{\vartheta} (1 + \Lambda^2)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mientras que

$$\pm \alpha_2 = \lim_{T \rightarrow \frac{3\pi}{\vartheta}^-} \mathbf{p}_2^\pm(T) = \lim_{T \rightarrow \frac{3\pi}{\vartheta}^-} \mathbf{q}_2^\mp(T) = \pm \frac{\delta}{\vartheta} (1 + \Lambda^2)(1 + \Lambda^2 + \Lambda^4) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El ejemplo que sigue extiende los resultados de los [Ejemplos 2.1 y 2.2](#) a este caso particular.

**Ejemplo 2.3.** Se considera una vez más la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.12) en la que se supuso  $\omega = 1.0$  y  $\mu = 0.2$ , mientras que la cota de las perturbaciones externas se supone es  $\delta = 1.0$ . Con tales valores se obtuvo en el Ejemplo 2.1:  $\Lambda \approx 0.7256$ ,  $m \approx 1.3694$  y  $\vartheta \approx 0.9797$ .



**Figura 2.12.** Conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T_k)$  del Ejemplo 2.2 cuando  $0 < \vartheta T_k < 3\pi$ .

En la Figura 2.12 se muestran los conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T_k)$  que se obtuvieron en los Ejemplos 2.1 y 2.2, así como las que se obtienen de la función definida en (2.26) para los instantes

$$T_{k+10} = \left(2 + \frac{k}{5}\right) \cdot \frac{\pi}{\vartheta}, \quad k = 1, 2, \dots, 5,$$

de donde se obtiene:  $T_{11} = 7.0540$ ,  $T_{12} = 7.6953$ ,  $T_{13} = 8.3365$ ,  $T_{14} = 8.9778$  y  $T_{15} = 9.6191$ .

Las trayectorias que describen las funciones  $p_2^\pm$  y  $q_2^\pm$  sobre las cuales no es diferenciable la función  $h$  se muestran también en la [Figura 2.12](#).


Para estos valores se observa que las superficies de discontinuidad  $p_2^+$  y  $g_2^-$  tienden al punto  $\alpha_2$  cuando  $T \rightarrow (3\pi/\vartheta)^-$ , mientras que  $p_2^-$  y  $q_2^+$  convergen a  $-\alpha_2$  cuando  $T \rightarrow (3\pi/\vartheta)^+$ , donde

$$\alpha_2 \approx \begin{pmatrix} 2.8107 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lo anterior muestra la extensión natural de los resultados numéricos que se obtuvieron en los [Ejemplos 2.1](#) y [2.2](#).

De la transformación  $y = Cz$ , donde  $C$  es la matriz que se define en [\(2.11\)](#), se obtienen los conjuntos de alcanzabilidad para la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales [\(2.10\)](#) cuyas gráficas se muestran en la [Figura 2.13](#). Bajo esta transformación resulta que

$$\widehat{\alpha}_2 = C\alpha_2 \approx \begin{pmatrix} 2.7539 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La estructura de los conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T)$  para las familias de sistemas de ecuaciones diferenciales [\(2.10\)](#) y [\(2.12\)](#) es topológicamente equivalente al caso en que  $\vartheta T \in (0, \pi)$  y  $\vartheta T \in (\pi, 2\pi)$ . 

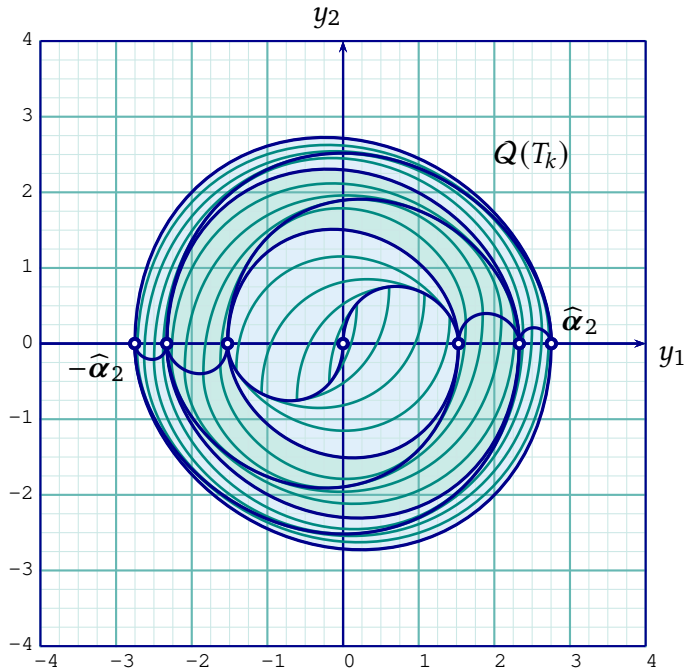
El principio es la mitad de todo.

Pitágoras de Samos (571–497 a.C.)

Filósofo griego

## Conjuntos de alcanzabilidad $Q(T)$ para $T \in J_{n+1}$

El procedimiento que se analizó de forma explícita en los apartados anteriores, se puede repetir de forma indefinida para obtener aproximaciones de la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $Q$  de la familia de ecuaciones diferenciales [\(2.12\)](#) empleando los conjuntos  $Q(T)$  cuando  $T \rightarrow \infty$ . En realidad, si se supone que el parámetro  $T$  satisface el conjunto de desigualdades



**Figura 2.13.** Conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T_k)$  del Ejemplo 2.2 cuando  $0 < \vartheta T_k < 3\pi$ .

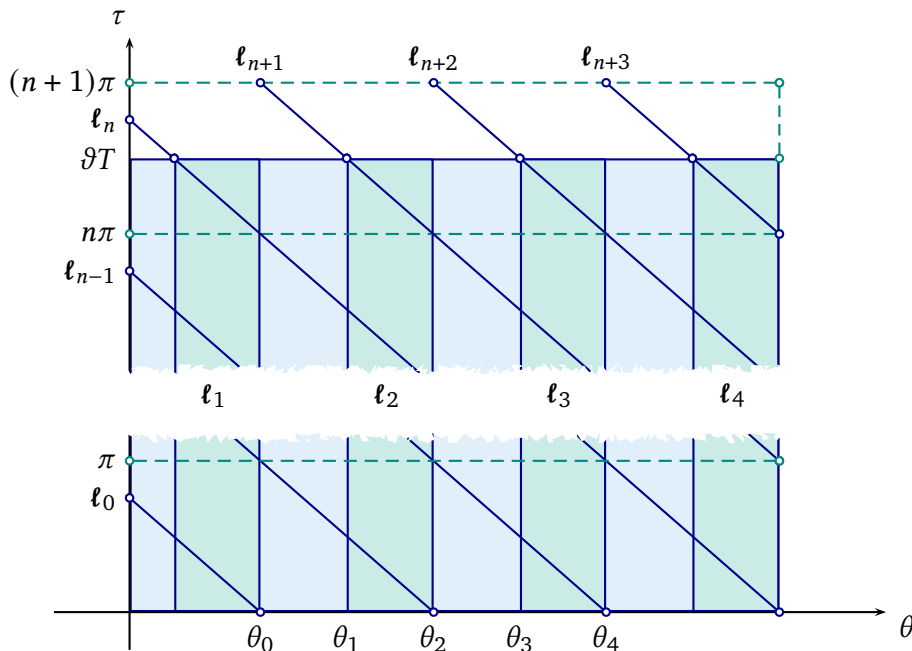
$n\pi < \vartheta T < (n+1)\pi$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces es suficiente tomar  $n \rightarrow \infty$ . En este proceso es necesario analizar las trayectorias que definen los conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T)$  en cada instante  $T > 0$  que satisface la desigualdad  $n\pi < \vartheta T < (n+1)\pi$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . En este apartado se generaliza de forma inductiva el método que se empleó en los apartados anteriores.

Se supone que la región  $\Omega$  en la que se determina  $\mathbf{h}: [\theta, \bar{\theta}] \rightarrow Q(T)$  para cada  $T > 0$  que satisface la desigualdad  $n\pi < \vartheta T < (n+1)\pi$ , es como se muestra en la Figura 2.14, la cual es caracterizada por el conjunto de rectas

$$\begin{aligned} \ell_0 : \vartheta\tau + \theta &= m + \frac{1}{2}\pi, & \ell_1 : \vartheta\tau + \theta &= m + \frac{3}{2}\pi, & \ell_2 : \vartheta\tau + \theta &= m + \frac{5}{2}\pi, & \dots, \\ \ell_{n+1} : \vartheta\tau + \theta &= m + \frac{2n+3}{2}\pi, & \ell_{n+2} : \vartheta\tau + \theta &= m + \frac{2n+5}{2}\pi, \end{aligned}$$

y, por consiguiente, a partir de estas rectas se obtienen los puntos

$$\begin{aligned} \theta_0 &= m + \frac{1}{2}\pi, & \theta_1 &= m + \frac{2n+3}{2}\pi - \vartheta T, & \theta_2 &= m + \frac{3}{2}\pi, \\ \theta_3 &= m + \frac{2n+5}{2}\pi - \vartheta T, & \theta_4 &= m + \frac{5}{2}\pi. \end{aligned}$$



**Figura 2.14.** Construcción de la región  $\Omega$  en el plano  $(\theta, \tau)$  en el caso  $n\pi < \vartheta T < (n+1)\pi$ .

Sobre cada recta  $\ell_k$  que se ha definido en la región  $\Omega$  se determina un punto  $T_k(\theta)$  con el fin de determinar los puntos  $(\tau, \theta)$  en los cuales la función  $\cos(\vartheta\tau + \theta - m)$  posee una transición de signo. Tales instantes son:

$$\begin{aligned} T_1(\theta) &= \frac{m + \frac{3}{2}\pi - \theta}{\vartheta}, & T_2(\theta) &= \frac{m + \frac{5}{2}\pi - \theta}{\vartheta}, & T_3(\theta) &= \frac{m + \frac{7}{2}\pi - \theta}{\vartheta}, & \dots, \\ T_{n+1}(\theta) &= \frac{m + \frac{2n+3}{2}\pi - \theta}{\vartheta}, & T_{n+2}(\theta) &= \frac{m + \frac{2n+5}{2}\pi - \theta}{\vartheta}. \end{aligned}$$

De acuerdo al esquema que se muestra en la [Figura 2.14](#) se observa que, en el conjunto  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ , la función  $\mathbf{h}: [\theta_0, \theta_4] \rightarrow \mathcal{Q}(T)$  obtiene la representación

$$\mathbf{h}(\theta) = \delta \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \int_{A_k} \boldsymbol{\varphi}(\tau) \, d\tau, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_1],$$

con intervalos:  $A_0 = [0, T_1(\theta)]$ ,  $A_1 = [T_1(\theta), T_2(\theta)]$ ,  $A_2 = [T_2(\theta), T_3(\theta)]$ ,  $\dots$ ,  $A_{n-1} = [T_{n-1}(\theta), T_n(\theta)]$  y  $A_n = [T_n(\theta), T]$ , mientras que

$$\mathbf{h}(\theta) = \delta \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{k+1} \int_{B_k} \boldsymbol{\varphi}(\tau) \, d\tau, \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2],$$

con intervalos de integración dados por:  $B_0 = [0, T_1(\theta)]$ ,  $B_1 = [T_1(\theta), T_2(\theta)]$ ,  $B_2 = [T_2(\theta), T_3(\theta)]$ ,  $\dots$ ,  $B_n = [T_n(\theta), T_{n+1}(\theta)]$  y  $B_{n+1} = [T_{n+1}(\theta), T]$ . De igual manera, en el conjunto  $\Omega_3 \cup \Omega_4$  se obtiene la función  $\mathbf{h}: [\theta, \bar{\theta}] \rightarrow \mathcal{Q}(T)$  definida por

$$\mathbf{h}(\theta) = \delta \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_{C_{k+1}} \boldsymbol{\varphi}(\tau) \, d\tau, \quad \theta \in [\theta_2, \theta_3],$$

con intervalos de integración que son definidos en la manera:  $C_1 = [0, T_2(\theta)]$ ,  $C_2 = [T_2(\theta), T_3(\theta)]$ ,  $\dots$ ,  $C_n = [T_n(\theta), T_{n+1}(\tau)]$  y  $C_{n+1} = [T_{n+1}(\theta), T]$ , mientras que

$$\mathbf{h}(\theta) = \delta \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \int_{D_{k+1}} \boldsymbol{\varphi}(\tau) \, d\tau, \quad \theta \in [\theta_3, \theta_4],$$

con  $D_1 = [0, T_2(\theta)]$ ,  $D_2 = [T_2(\theta), T_3(\theta)]$ ,  $\dots$ ,  $D_{n+1} = [T_{n+1}(\theta), T_{n+2}(\theta)]$  y  $D_{n+2} = [T_{n+2}(\theta), T]$ .

Después de efectuar las integrales y realizar las simplificaciones, se obtiene la siguiente expresión que define la función vectorial

$$\mathbf{h}(\theta) = \frac{\delta}{\vartheta} \begin{pmatrix} h_1(\theta) \\ h_2(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_4], \quad (2.29 \blacktriangleleft)$$



donde

$$h_1(\theta) = \begin{cases} -1 + (-1)^n f_1(T) + 2 \sum_{k=1}^n \Lambda^{2k+1} f_2\left(\frac{m-\theta}{g}\right), & \theta_0 \leq \theta < \theta_1, \\ -1 + (-1)^{n+1} f_1(T) + 2 \sum_{k=1}^{n+1} \Lambda^{2k+1} f_2\left(\frac{m-\theta}{g}\right), & \theta_1 \leq \theta < \theta_2, \\ 1 + (-1)^{n+1} f_1(T) + 2 \sum_{k=1}^n \Lambda^{2k+3} f_2\left(\frac{m-\theta}{g}\right), & \theta_2 \leq \theta < \theta_3, \\ 1 + (-1)^n f_1(T) + 2 \sum_{k=1}^{n+1} \Lambda^{2k+3} f_2\left(\frac{m-\theta}{g}\right), & \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4, \end{cases}$$

$$h_2(\theta) = \begin{cases} (-1)^{n+1} f_2(T) + 2 \sum_{k=1}^n \Lambda^{2k+1} f_1\left(\frac{m-\theta}{g}\right), & \theta_0 \leq \theta < \theta_1, \\ (-1)^n f_2(T) + 2 \sum_{k=1}^{n+1} \Lambda^{2k+1} f_1\left(\frac{m-\theta}{g}\right), & \theta_1 \leq \theta < \theta_2, \\ (-1)^n f_2(T) + 2 \sum_{k=1}^n \Lambda^{2k+3} f_1\left(\frac{m-\theta}{g}\right), & \theta_2 \leq \theta < \theta_3, \\ (-1)^{n+1} f_2(T) + 2 \sum_{k=1}^{n+1} \Lambda^{2k+3} f_1\left(\frac{m-\theta}{g}\right), & \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4. \end{cases}$$

La definición de la función  $\mathbf{h}: [\theta_0, \theta_4] \rightarrow \mathcal{Q}(T)$  se debe reducir a los casos ya analizados cuando  $n \in \{0, 1, 2\}$ . En efecto, se comprueba directamente que la función definida en (2.29) se reduce a la definición que se presentó en (2.18) en el caso en que  $n = 0$ , que esta se reduce a la definición que se presenta en (2.23) si  $n = 1$ , y que esta toma la forma particular que se muestra en (2.26) cuando  $n = 2^4$ . Por consiguiente, se sigue que la función (2.29) extiende los casos presentados previamente.

La definición de los parámetros  $\theta_0$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_4$  permite verificar de forma directa que la función  $\mathbf{h}: [\theta_0, \theta_4] \rightarrow \mathcal{Q}(T)$  satisface las siguientes igualdades:  $\mathbf{p}_n^-(T) = \mathbf{h}(\theta_0) = \mathbf{h}(\theta_4)$  y  $\mathbf{p}_n^+(T) = \mathbf{h}(\theta_2)$ , donde

$$\mathbf{p}_n^\pm(T) = \pm \frac{\delta}{g} \begin{pmatrix} 1 + 2 \sum_{k=1}^n \Lambda^{2k} + (-1)^{n+1} f_1(T) \\ (-1)^n f_2(T) \end{pmatrix}, \quad T \in J_{n+1}, \quad (2.30 \blacktriangleleft)$$

mientras que  $\mathbf{q}_n^+(T) = \mathbf{h}(\theta_1)$  y  $\mathbf{q}_n^-(T) = \mathbf{h}(\theta_3)$ , donde

$$\mathbf{q}_n^\pm(T) = \pm \frac{\delta}{g} \begin{pmatrix} -1 + (-1)^n (1 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \Lambda^{2(k-n)}) f_1(T) \\ (-1)^{n+1} (1 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \Lambda^{2(k-n)}) f_2(T) \end{pmatrix}, \quad T \in J_{n+1}. \quad (2.31 \blacktriangleleft)$$

Se espera también que la definición de las funciones  $\mathbf{p}_n^\pm$  y  $\mathbf{q}_n^\pm$  que se muestran respectivamente en (2.30) y (2.31) se deben reducir a los casos previos

<sup>4</sup>Se adopta el convenio particular válido sobre sumatorias: si  $j < i$ , entonces  $\sum_{k=i}^j \xi_k = 0$ .

cuando  $n \in \{0, 1, 2\}$ . En efecto, se comprueba directamente que las definiciones en (2.30) se reducen a las funciones  $\mathbf{p}_0^\pm$  que se muestran en (2.19) cuando  $n = 0$ , estas se reducen a las expresiones  $\mathbf{p}_1^\pm$  dadas en (2.24) cuando se elige  $n = 1$ , y que estas se transforman en las expresiones  $\mathbf{p}_2^\pm$  que se presentan en (2.27) cuando  $n = 2$ . De igual manera, se observa que las funciones  $\mathbf{q}_n^\pm$  definidas en (2.31) se reducen a las funciones  $\mathbf{p}_0^\mp$  de (2.19) cuando se elige  $n = 0$ , se reducen a las expresiones  $\mathbf{q}_1^\mp$  definidas en (2.25) cuando  $n = 1$ , y que estas se transforman en las funciones  $\mathbf{q}_2^\pm$  cuando se elige  $n = 2$ . Por consiguiente, se sigue que las funciones (2.30) y (2.31) extienden los casos presentados previamente.

Las observaciones anteriores muestran que la imagen del intervalo  $[\theta_0, \theta_4]$  bajo la función  $\mathbf{h}$  define una trayectoria cerrada simple que es suave a trozos para cada  $T > 0$  tal que  $\vartheta T \in [n\pi, (n+1)\pi]$ , la cual a su vez, es continua en  $[\theta_0, \theta_4]$  y diferenciable en  $(\theta_0, \theta_1) \cup (\theta_1, \theta_2) \cup (\theta_2, \theta_3) \cup (\theta_3, \theta_4)$ . Además, debido a la definición de  $h_1$  y  $h_2$ , se sigue que si  $T_1, T_2 > 0$  son tal que  $n\pi < \vartheta T_1 < \vartheta T_2 < (n+1)\pi$ , entonces  $\partial Q(T_1) \cap \partial Q(T_2) = \emptyset$ .

Como consecuencia de lo anterior, resulta que el intervalo de definición de la trayectoria  $\mathbf{h}: [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow Q(T)$  que describe cada conjunto de alcanzabilidad  $Q(T)$  para cada instante  $T > 0$  tal que  $\vartheta T \in [n\pi, (n+1)\pi]$  es

$$[\underline{\theta}, \bar{\theta}] = [m + \frac{1}{2}\pi, m + \frac{5}{2}\pi].$$

Es claro que la función  $\mathbf{h}: [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow Q(T)$  se puede extender a una función periódica de periodo  $2\pi$  definida sobre todo  $\mathbb{R}$  con la propiedad de que, para cada instante  $T > 0$  tal que  $n\pi < \vartheta T < (n+1)\pi$ , la imagen de esta función coincide con el conjunto de alcanzabilidad  $Q(T)$ .

Se observa además que las funciones  $\mathbf{p}_n^\pm$  y  $\mathbf{q}_n^\pm$  satisfacen los siguientes límites laterales

$$\pm \alpha_n = \lim_{T \rightarrow \frac{n\pi}{\vartheta}^+} \mathbf{p}_n^\pm(T) = \lim_{T \rightarrow \frac{n\pi}{\vartheta}^+} \mathbf{q}_n^\pm(T) = \pm \frac{\delta}{\vartheta} (1 + \Lambda^2) \sum_{k=0}^{n-1} \Lambda^{2k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mientras que

$$\pm \alpha_{n+1} = \lim_{T \rightarrow \frac{(n+1)\pi}{g}^-} \mathbf{p}_n^\pm(T) = \lim_{T \rightarrow \frac{(n+1)\pi}{g}^-} \mathbf{q}_n^\mp(T) = \pm \frac{\delta}{g} (1 + \Lambda^2) \sum_{k=0}^n \Lambda^{2k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.32 \blacktriangleleft)$$

Los resultados que se han obtenido permiten determinar cada conjunto de alcanzabilidad  $\mathcal{Q}(T)$  en cada instante  $T > 0$  para la familia de ecuaciones diferenciales (2.12). Como consecuencia de esto, y empleando estos resultados, se puede determinar el correspondiente conjunto de alcanzabilidad  $\mathcal{Q}(T)$  en cada instante  $T > 0$  para (2.10).

**Teorema 2.1.** En la familia de ecuaciones diferenciales (2.10) se supone que los parámetros satisfacen las desigualdades:  $0 < \mu < \omega$  y  $\delta > 0$ . Entonces la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $\mathcal{Q}(T)$  de esta familia de ecuaciones diferenciales se describe por la trayectoria suave a trozos:

$$\widehat{\mathbf{h}}(\theta) = C\mathbf{h}(\theta), \quad \theta \in [m + \frac{1}{2}\pi, m + \frac{5}{2}\pi],$$

donde  $C$  es la matriz que se define en (2.11) y  $\mathbf{h}: [m + \frac{1}{2}\pi, m + \frac{5}{2}\pi] \rightarrow \mathcal{Q}(T)$  se define en (2.29) para cada  $T > 0$  que satisface  $\vartheta T \in [n\pi, (n+1)\pi]$  con  $n = \llbracket T \rrbracket$ . Las intersecciones del conjunto de alcanzabilidad  $\mathcal{Q}(T)$  con el eje  $y_2 = 0$  se dan en  $\pm \widehat{\alpha}_{n+1} = \pm C\alpha_{n+1}$ , donde:

$$\widehat{\alpha}_{n+1} = \pm \frac{\delta}{\omega^2} (1 + \Lambda^2) \sum_{k=0}^n \Lambda^{2k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.33 \blacktriangleleft)$$

Como consecuencia del Teorema 2.1, se puede considerar ahora el problema de determinar los conjuntos de alcanzabilidad  $\mathcal{Q}$  de las familias de ecuaciones diferenciales (2.10) y (2.12) empleando las expresiones obtenidas. Esto se sigue de observar primero que las expresiones de las funciones vectoriales  $\mathbf{h}: [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow \mathcal{Q}(T)$ ,  $\mathbf{p}_n^\pm: J_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $\mathbf{q}_n^\pm: J_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^2$  que se definen respectivamente en (2.29), (2.30) y (2.31), son válidas para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, surge de manera natural la interrogante sobre el comportamiento de estas funciones cuando  $n \rightarrow \infty$ .

La definición de las funciones  $h_1$  y  $h_2$  en la representación (2.29) permite analizar la estructura de la frontera de los conjuntos de alcanzabilidad  $\mathcal{Q}(T)$  cuando  $T \rightarrow \infty$ . Este límite describe la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $\mathcal{Q}$  de la familia de ecuaciones diferenciales (2.12).

En la comprobación de esta tarea, se observa primero que

$$\lim_{\vartheta T \rightarrow \infty} f_1(T) = \lim_{\vartheta T \rightarrow \infty} f_2(T) = 0,$$

mientras que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Lambda^{2k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n+1} \Lambda^{2k} = \frac{\Lambda^2}{1 - \Lambda^2},$$

y, por consiguiente, el conjunto de alcanzabilidad  $\mathcal{Q}$  de la familia de ecuaciones diferenciales (2.12) se describe por la función vectorial

$$\mathbf{h}^*(\theta) = \frac{\delta}{\vartheta} \cdot \frac{1}{1 - \Lambda^2} \begin{pmatrix} h_1(\theta) \\ h_2(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_4] \quad (2.34 \blacktriangleleft)$$

donde

$$h_1^*(\theta) = \begin{cases} \Lambda^2 - 1 + 2\Lambda^3 f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_0 \leq \theta < \theta_2, \\ 1 - \Lambda^2 + 2\Lambda^5 f_2\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_2 \leq \theta \leq \theta_4, \end{cases}$$

$$h_2^*(\theta) = \begin{cases} 2\Lambda^3 f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_0 \leq \theta < \theta_2, \\ 2\Lambda^5 f_1\left(\frac{m-\theta}{\vartheta}\right), & \theta_2 \leq \theta \leq \theta_4. \end{cases}$$

Las intersecciones de esta función vectorial con el eje  $z_2 = 0$  se obtienen a partir del límite  $\pm \boldsymbol{\alpha}^*$  de la sucesión de puntos  $\{\pm \boldsymbol{\alpha}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , el cual resulta de la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \pm \boldsymbol{\alpha}^* &= \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\alpha}_n = \pm \frac{\delta}{\vartheta} (1 + \Lambda^2) \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^{2k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \frac{\delta}{\vartheta} \cdot \frac{1 + \Lambda^2}{1 - \Lambda^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \pm \frac{\delta}{\vartheta} \cdot \frac{1 + \exp\left(-\frac{\pi\mu}{\vartheta}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\pi\mu}{\vartheta}\right)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \frac{\delta}{\vartheta} \coth\left(\frac{\pi\mu}{2\vartheta}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\pm \alpha^* = \pm \frac{\delta}{\vartheta} \coth \left( \frac{\pi \mu}{2 \vartheta} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.35 \blacktriangleleft)$$

Los valores (2.35) y la definición de la función (2.34) permiten concluir que, de acuerdo con el método de transformaciones puntuales discutido en la [Sección 1.4](#), el conjunto de alcanzabilidad  $Q$  de la familia de ecuaciones diferenciales (2.12) es un conjunto cerrado y acotado, lo cual permite determinar el conjunto de alcanzabilidad  $Q$  de la familia de ecuaciones diferenciales (2.10). Los resultados se resumen de la siguiente manera.

**Teorema 2.2.** En la familia de ecuaciones diferenciales (2.10) se supone que los parámetros satisfacen las desigualdades:  $0 < \mu < \omega$  y  $\delta > 0$ . Entonces el conjunto de alcanzabilidad  $Q$  de esta familia de ecuaciones diferenciales es cerrado y acotado, y su frontera se describe por la trayectoria suave a trozos:


$$\widehat{h}^*(\theta) = Ch^*(\theta), \quad \theta \in [m + \frac{1}{2}\pi, m + \frac{5}{2}\pi],$$

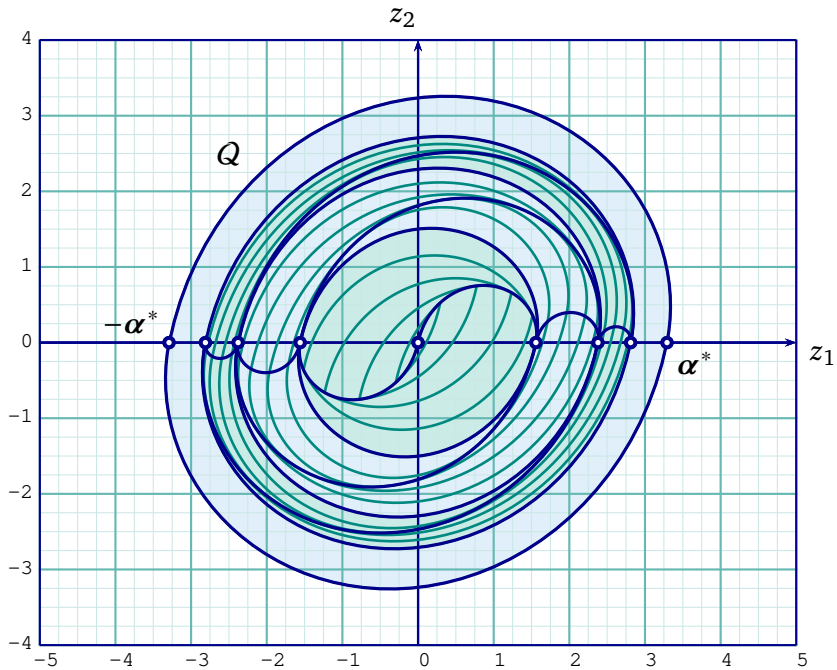
donde  $C$  se define en (2.11) y  $h^*: [m + \frac{1}{2}\pi, m + \frac{5}{2}\pi] \rightarrow Q(T)$  se define en (2.34). Las intersecciones de la frontera de este conjunto de alcanzabilidad con el eje  $y_2 = 0$  se dan en los puntos  $\pm \widehat{\alpha}^* = \pm C\alpha^*$ , donde:

$$\pm \widehat{\alpha}^* = \pm \frac{\delta}{\omega^2} \coth \left( \frac{\pi \mu}{2 \vartheta} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.36 \blacktriangleleft)$$

La importancia e interpretación geométrica del punto  $\widehat{\alpha}^*$  que se describe en el [Teorema 2.2](#) será analizada posteriormente en el [Capítulo 3](#). Con este propósito, es pertinente observar en (2.35) que los puntos  $\pm \alpha^*$  dependen linealmente del parámetro  $\delta > 0$  que describe la cota de las perturbaciones externas  $\mathcal{U}_\delta$ .

El siguiente ejemplo permite concluir los casos que se han analizado parcialmente en los [Ejemplos 2.1 a 2.3](#).

 **Ejemplo 2.4.** Se considera como conclusión de los [Ejemplos 2.1 a 2.3](#) la familia de ecuaciones diferenciales (2.12), en los que se han elegido los siguientes valores numéricos:  $\omega = 1.0$ ,  $\mu = 0.2$  y  $\delta = 1.0$ .

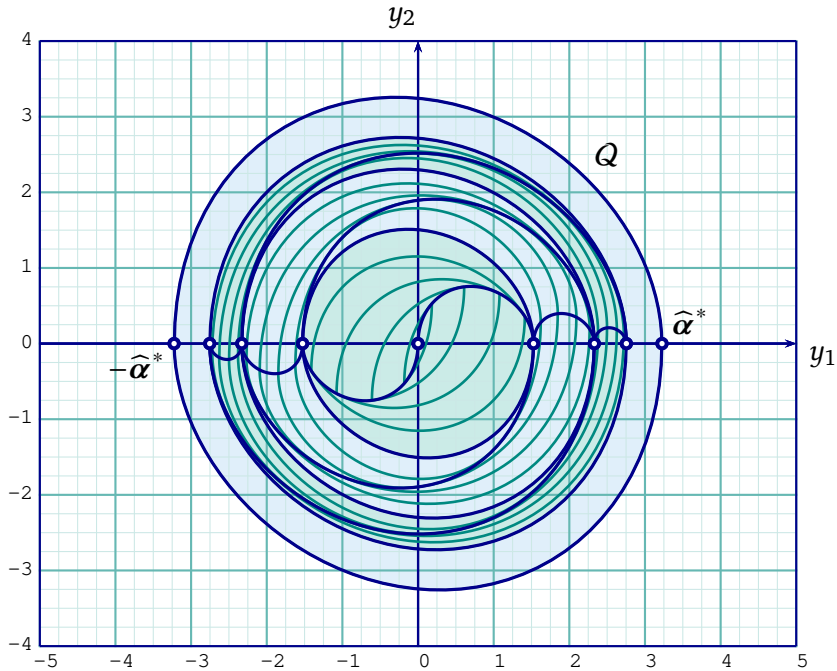


**Figura 2.15.** Conjunto de alcanzabilidad  $Q$  y los conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T_k)$  de los Ejemplos 2.1 a 2.3 cuando  $0 < \vartheta T_k < 3\pi$ .

De acuerdo con los resultados del Teorema 2.2, se puede determinar el conjunto de alcanzabilidad  $Q$  de esta familia de ecuaciones diferenciales, cuya frontera cruza al eje  $z_2 = 0$  en

$$\alpha^* \approx \begin{pmatrix} 3.2914 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En la Figura 2.15 se muestran los conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T_k)$  que se obtuvieron en los Ejemplos 2.1 a 2.3, así como el conjunto de alcanzabilidad  $Q$  de esta familia de ecuaciones diferenciales. Se puede observar el grado de aproximación de los conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T_k)$  a la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $Q$  y, por consiguiente, es claro que si se requiere una mejor aproximación, es necesario realizar más iteraciones.



**Figura 2.16.** Conjunto de alcanzabilidad  $Q$  y los conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T_k)$  de los Ejemplos 2.1 a 2.3 cuando  $0 < \vartheta T_k < 3\pi$ .

Por otra parte, si se emplea la transformación  $\mathbf{y} = C\mathbf{z}$ , donde  $C$  es la matriz que se define en (2.11), se obtiene el conjunto de alcanzabilidad  $Q$  para la familia de ecuaciones diferenciales (2.10), el cual se muestra en la Figura 2.16. La intersección de este conjunto con el eje  $y_2 = 0$  se obtiene en los puntos  $\pm\widehat{\alpha}^* = \pm C\alpha^*$ , donde  $C$  es la matriz no singular que se define en (2.11) y

$$\widehat{\alpha}^* \approx \begin{pmatrix} 3.2249 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Estos valores se muestran en la Figura 2.16. ▀▀▀

En la construcción que se ha desarrollado en los Ejemplos 2.1 a 2.4, se observa que para los valores numéricos que se han elegido para los paráme-

tros  $0 < \mu < \omega$ , los conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T)$ , cuando  $0 < \vartheta T < 3\pi$ , distan de aproximar de forma eficiente los correspondientes conjuntos de alcanzabilidad  $Q$  de la familia de ecuaciones diferenciales (2.10) y (2.12), por consiguiente, se observa de las expresiones que definen las funciones vectoriales (2.29) y (2.34), que el grado de aproximación depende en esencia de los valores de estos parámetros<sup>5</sup>.

Como caso particular, se observa que si los parámetros están relacionados por una desigualdad del tipo  $0 < \Lambda \ll 1$ , entonces el número de iteraciones que se requieren para aproximar las correspondientes fronteras del conjunto de alcanzabilidad puede ser *no muy grande*. La justificación de la afirmación anterior se sigue de observar que, si esta desigualdad es válida, entonces las sucesiones de sumas parciales  $\sum_{k=1}^n \Lambda^{2k}$  y  $\sum_{k=1}^{n+1} \Lambda^{2k}$  aproximan la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda^{2k} = (1 - \Lambda^2)^{-1}$  con un número *no muy grande* de sumandos. En tal situación, la aproximación dependerá de los valores de  $T$  en las expresiones  $f_1(T)$  y  $f_2(T)$ . No obstante, es claro que tal condición no es suficiente.

Es claro, por otra parte, que el método no describe propiedades adicionales sobre el conjunto de alcanzabilidad  $Q$  de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.10) o (2.12). En el siguiente capítulo se considera un método distinto para determinar estos conjuntos y se establecen también algunas propiedades que serán de utilidad.

---

<sup>5</sup>En el [Ejemplo 3.2](#) de la [Página 118](#) se muestra un caso particular en el cual los conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T)$  cuando  $\vartheta T \rightarrow (3\pi)^-$ , aproximan de forma eficiente la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $Q$  de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (2.10) para ciertos valores de los parámetros.



## Planteamiento del problema de máxima desviación

# 3

La temática del arte debe consistir en el hombre y sus problemas.

David Alfaro Siqueiros (1896-1974)  
Pintor mexicano

### Resumen

En este apartado se presenta un planteamiento alternativo sobre el problema de máxima desviación. Este método se emplea para determinar conjuntos de alcanzabilidad  $Q$  mediante la estimación de su frontera. Los resultados se emplean para establecer un criterio de estabilidad robusta para un sistema mecánico controlable que admite impactos.

### 3.1. Introducción

Un problema de interés en el estudio cualitativo de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias es, desde sus orígenes de la teoría desarrollada por Aleksander Mijáilovich Lyapunov en el año 1892, el estudio de la estabilidad de sus soluciones, es decir, el estudio de cómo cambian las soluciones bajo pequeñas modificaciones de las condiciones iniciales, ver [Lyapunov \(1966\)](#). En el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

$$\dot{y} = Ay, \quad (3.1 \blacktriangleleft)$$

donde  $A = (a_{ij})$  es una matriz constante de tamaño  $n \times n$ , existen condiciones que determinan la estabilidad de la solución estacionaria  $\mathbf{y}(t) \equiv 0$ , las cuales dependen de los valores propios de la matriz  $A$ , ver [Sánchez \(1968\)](#). No obstante, los sistemas no lineales tales como

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (3.2 \blacktriangleleft)$$

donde  $\mathbf{g}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función no lineal con derivadas parciales continuas, admiten una variedad de comportamientos mucho más amplios debido a la presencia del término  $\mathbf{g}(\mathbf{y}, t)$ . En tal caso, determinar criterios de estabilidad de los puntos de equilibrio, soluciones triviales, es un buen acercamiento a conocer el comportamiento de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (3.2), aún cuando exista incertidumbre sobre la elección de la función no lineal  $\mathbf{g}(\mathbf{y}, t)$ . En este sentido, los matemáticos David M. Grobman y Philip Hartman probaron de manera independiente, el primero en 1859 y el segundo en 1860, que en alguna vecindad de un punto de equilibrio hiperbólico, un sistema como (3.2) presenta un comportamiento equivalente al del sistema lineal (3.1), ver [Sotomayor \(1979\)](#) y [Perko \(2001\)](#).

Un método práctico que se emplea para abordar este problema, en un caso particular, se describe a continuación. Se supone que se desconoce la forma exacta de la función  $\mathbf{g}(\mathbf{y}, t)$  debido a los procesos de modelación, o bien, debido al ajuste de ciertos parámetros que son no conocidos, y que sólo se tiene cierta información adicional, por ejemplo, que es acotada:  $0 \leq \|\mathbf{g}(\mathbf{y}, t)\| \leq \delta$ . Si esta situación ocurre, surge la siguiente interrogante: ¿se pueden obtener condiciones para garantizar la estabilidad de la solución trivial del sistema y conocer de forma explícita la vecindad que se describe en los resultados de Grobman y Hartman? Una manera de dar una estimación a la respuesta de esta pregunta consiste en reemplazar el análisis de la dinámica del sistema (3.2) y estudiar la dinámica de un sistema de ecuaciones diferenciales auxiliar con lado derecho discontinuo

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (3.3 \blacktriangleleft)$$

donde  $u(t)$  es una perturbación que pertenece a algún conjunto  $\mathcal{U}_\delta$  de funciones escalares acotadas:  $|u(t)| \leq \delta$  para todo  $t \geq 0$ .

El comportamiento de las soluciones de este sistema para un instante  $T > 0$  es un resultado conocido, y surge como una aplicación en el año 1939 en un problema de optimización planteado por Boris Vladimirovich Bulgakov conocido como *problema de acumulación de perturbaciones*, ver Elishakoff y Ohsaki (2010). El problema consiste en el estudio de la máxima desviación de un giróscopo en un barco cuando este cambia el rumbo de su movimiento, ver Bulgakov (1939). La solución de este problema dio origen al problema sobre la máxima desviación de una coordenada del sistema lineal (3.3) en un instante  $T > 0$ . Bulgakov demostró que la peor situación se presenta cuando el barco lleva la máxima velocidad hacia adelante, o hacia atrás, a lo largo de un meridiano, invirtiendo el curso en cada semiperiodo de las oscilaciones del giróscopo Bulgakov (1946).

Los sistemas lineales amortiguados con parámetros constantes no pueden desarrollar oscilaciones forzadas no acotadas si las perturbaciones son finitas. ...alcanza su valor máximo  $m_{jp}(t)$  si la magnitud absoluta de  $y_p(t - \tau)$  toma el valor  $l_p$ , mientras que su signo cambia para hacer que todos los elementos de la integral y los otros dos términos sean positivos. En otras palabras, el signo de  $y_p(t - \tau)$  debe modificarse en  $\tau = t_1, t_2, \dots$ , y posiblemente en  $\tau = 0, t_j$ , siendo  $t_j$  las raíces positivas sucesivas de la ecuación  $\beta_{kp}(t) = 0$ .

B. V. Bulgakov (Científico ruso)  
1900–1952

En este sentido, el planteamiento del *problema de máxima desviación en el sentido de Bulgakov* se puede considerar como sigue. Se supone que  $z$  describe el movimiento real de cierto proceso en el espacio de estados  $\mathbb{R}^n$ , mientras que  $z^d$  representa un movimiento deseado para dicho proceso. Luego, se puede suponer que la desviación del proceso en cada instante  $t > 0$  se describe por  $\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{z}^d$ , y que esta variable admite la representación del sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (3.4 \blacktriangleleft)$$

donde  $u(t)$  es una perturbación escalar externa que satisface la inclusión

$$u(t) \in \mathcal{U}_\delta = \{u(t) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}) \mid |u(t)| \leq \delta\}, \quad (3.5 \blacktriangleleft)$$

donde  $\mathcal{PC}(\mathbb{R})$  denota el conjunto de funciones continuas a trozos sobre  $\mathbb{R}$  y  $\delta > 0$  es una constante.

Se observa que el par (3.4)–(3.5) define formalmente una familia de sistemas de ecuaciones diferenciales con la propiedad de que cada elemento (3.4) es indexado por la elección de una perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ .

El planteamiento del problema de máxima desviación en el sentido de Bulgakov de la  $k$ -ésima coordenada  $y_k$  de la solución  $\mathbf{y}_u$  de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.4)–(3.5), es considerado como el siguiente problema de optimización, ver Aleksandrov *et al.* (2005):

$$\sup_{u(t) \in \mathcal{U}_\delta} |y_k(T)|, \quad (3.6 \blacktriangleleft)$$

donde  $T > 0$  es un instante fijo para el proceso descrito por (3.4)–(3.5).

La solución al problema de optimización (3.6) permite determinar una perturbación externa  $u_{\text{máx}}(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , denominada *peor perturbación externa*, mediante la cual es posible determinar la máxima desviación  $|y_k(T)|$  de los elementos de la familia de ecuaciones diferenciales (3.4)–(3.5). El procedimiento que se sigue para determinar la máxima desviación de la primera coordenada es el siguiente: la solución general de uno de los elementos de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.4)–(3.5) para una perturbación  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  se escribe como

$$\mathbf{y}_u(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} \mathbf{b}u(s) \, ds$$

donde  $e^{At}$  denota la matriz exponencial de la matriz  $A$ . Por lo tanto, la primera coordenada de  $\mathbf{y}_u$  en el instante  $T > 0$  se escribe como  $y_1(T) = \mathbf{e}_1^\top \mathbf{y}_u(T)$ , donde  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^\top$  es el primer vector canónico de la base del espacio de fases  $\mathbb{R}^n$ . Así

$$y_1(T) = \int_0^T \mathbf{e}_1^\top e^{A(T-t)} \mathbf{b}u(t) \, dt. \quad (3.7 \blacktriangleleft)$$

Si la función escalar  $\mathbf{e}_1^\top e^{A(T-t)} \mathbf{b}$  es idénticamente cero, entonces el sistema de ecuaciones diferenciales (3.4)–(3.5) no es perturbado con respecto a la coordenada  $y_1$  en el instante  $T$ , ya que en tal situación  $y_1(T) = \mathbf{e}_1^\top e^{AT} \mathbf{y}_u(0)$  para cada  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ . Por otra parte, si

$$\mathbf{e}_1^\top e^{A(T-t)} \mathbf{b} \neq 0 \quad \text{para } t \in [0, T],$$

el sistema (3.4)–(3.5) es perturbado con respecto a la coordenada  $y_1$  en el instante  $T$ , y es evidente de (3.7) que para alcanzar el valor máximo de la coordenada  $y_1$  en el momento  $T$  es necesario y suficiente que la perturbación  $u(t)$  tome los valores máximos  $+\delta$  o  $-\delta$ , dependiendo de si la función  $\mathbf{e}_1^\top e^{A(T-t)} \mathbf{b}$  es positiva o negativa. Si existen puntos  $t_j > 0$ , con  $j = 1, 2, \dots, m$ , donde esta función es igual a cero, la perturbación  $u(t)$  puede tomar algún valor entre  $+\delta$  y  $-\delta$ , pero tales puntos son únicamente un número finito en vista de la analiticidad de la función  $\mathbf{e}_1^\top e^{A(T-t)} \mathbf{b}$ , por lo tanto, el valor de la integral (3.7) no cambiará si se toma  $u(t_j) = 0$  para  $j = 1, 2, \dots, m$ . Dicho valor corresponde con la selección de norma mínima descrita en la Sección 1.3.

De esta manera, se obtiene la función que determina la peor perturbación externa que da solución al planteamiento del problema de máxima desviación en el sentido de Bulgakov que se describe en (3.6):

$$u_{\text{máx}}(t) = \delta \operatorname{sign}(\mathbf{e}_1^\top e^{A(T-t)} \mathbf{b}) \quad t \in [0, T]. \quad (3.8 \blacktriangleleft)$$

Si se sustituye esta perturbación en el sistema de ecuaciones diferenciales (3.4), y la correspondiente solución es  $\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t) = (y_1^{\text{máx}}(t), \dots, y_n^{\text{máx}}(t))^\top$ , entonces de la ecuación (3.7) se obtiene la representación de la primera coordenada de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.4)–(3.5):

$$y_1^{\text{máx}}(T) = \delta \int_0^T |\mathbf{e}_1^\top e^{A(T-t)} \mathbf{b}| dt. \quad (3.9 \blacktriangleleft)$$

Las expresiones (3.8) y (3.9) corresponden a la solución del problema de optimización (3.6) en el conjunto  $\mathcal{U}_\delta$ .

Este procedimiento se puede repetir si se desea determinar la máxima desviación de la coordenada  $y_j$  de las soluciones de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.4)–(3.5) para cada  $j = 1, \dots, n$ .

Por consiguiente, si se emplea la norma vectorial

$$\|\mathbf{y}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |y_j|,$$

entonces tiene lugar la siguiente desigualdad para cada una de las soluciones de los elementos de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.4)–(3.5) en cada instante  $T > 0$  fijo

$$\|\mathbf{y}_u(T)\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |y_j(T)| \leq \delta \max_{1 \leq j \leq n} \alpha_j(T), \quad (3.10) \blacktriangleleft$$

donde

$$\alpha_j(T) = \int_0^T |\mathbf{e}_j^\top e^{A(T-t)} \mathbf{b}| dt,$$

y  $\mathbf{e}_j$  es el  $j$ -ésimo vector canónico correspondiente a la base del espacio de fases  $\mathbb{R}^n$ . El parámetro

$$\alpha_j^{\max}(T) = \delta \alpha_j(T)$$

es llamado *máxima desviación de la coordenada  $y_j$  de la solución  $\mathbf{y}_u$  en el instante  $T > 0$* .

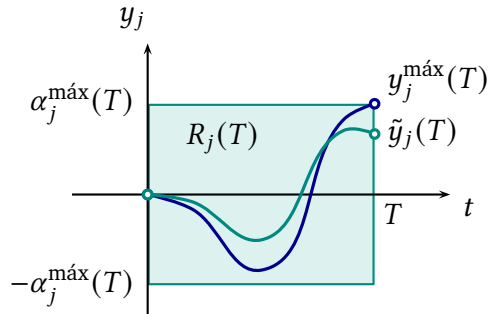
La interpretación geométrica del problema de máxima desviación en el sentido de Bulgakov es como sigue. Si en el problema de valores iniciales (3.4) se elige la peor perturbación  $u_{\max}(t) = \delta \text{sign}(\mathbf{e}_j^\top e^{A(T-t)} \mathbf{b})$  y otra perturbación  $\tilde{u}(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , entonces las coordenadas  $y_j^{\max}(t)$  y  $\tilde{y}_j(t)$  de las soluciones  $\mathbf{y}_{u_{\max}}(t)$  y  $\tilde{\mathbf{y}}_{\tilde{u}}(t)$ , satisfacen las siguientes inclusiones

$$y_j^{\max}(t) \in R_j(T), \quad \tilde{y}_j(t) \in R_j(T), \quad t \in [0, T],$$

donde

$$R_j(T) = [0, T] \times [-\alpha_j^{\max}(T), \alpha_j^{\max}(T)],$$

mientras que  $|\tilde{y}_j(T)| \leq |y_j^{\max}(T)| = \alpha_j^{\max}(T)$ , como se muestra en la [Figura 3.1](#). Por lo tanto, para cada  $t \in [0, T]$  y cada elección  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , la correspondiente solución  $\mathbf{y}_u$  del sistema (3.4)–(3.5) posee como cota el estimado que se describe en (3.10).



**Figura 3.1.** Máxima desviación en el sentido de Bulgakov para la coordenada  $y_j$ .

El problema de máxima desviación en el sentido de Bulgakov sobre la acumulación de perturbaciones es de interés por el hecho de ser un problema en el que se analizan sistemas de ecuaciones diferenciales en los que existe incertidumbre respecto a perturbaciones externas. En estos sistemas, el problema de hallar el módulo máximo de una coordenada de una solución  $y_k(T)$  en un instante  $T > 0$  se puede emplear para cubrir necesidades prácticas en algunas aplicaciones.

Esta descripción geométrica permite formular la siguiente interrogante que surge de manera natural: ¿Cuál debe ser el menor conjunto de alcanzabilidad  $Q(T)$  en el espacio de estados  $\mathbb{R}^n$  que contiene las soluciones de cada uno de los elementos de la familia de ecuaciones diferenciales (3.4)–(3.5) dado un instante  $T > 0$ ?<sup>1</sup> En los siguientes apartados se muestra que el problema de hallar amplitudes máximas de oscilación en una coordenada  $y_k(T)$  cuando  $T \rightarrow \infty$  permite, a su vez, establecer un criterio de estabilidad robusta respecto a las soluciones triviales.

<sup>1</sup>El significado de la frase *el menor conjunto*  $Q(T)$  se considera en el sentido topológico sobre la contención de conjuntos.

## 3.2. Formulación del problema de máxima desviación en el plano

Cuando decía en 1980 a mis amigos que estaba trabajando con H. Hubbard en el estudio de polinomios de grado 2 en variable compleja..., me preguntaban: ¿Y esperas encontrar algo nuevo?

Adrien Douady (1935–2006)  
Matemático francés

La formulación del problema de máxima desviación con respecto a una coordenada, el cual describe una generalización del problema de máxima desviación en el sentido de Bulgakov, ver [Aleksandrov et al. \(2005\)](#), se considera para la familia de ecuaciones diferenciales de orden dos con una perturbación externa:

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega^2 y = bu(t),$$

donde  $u(t)$  es una función escalar que satisface la inclusión

$$u(t) \in \mathcal{U}_\delta = \{u(t) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}) \mid |u(t)| \leq \delta\},$$

$\mathcal{PC}(\mathbb{R})$  denota el conjunto de funciones continuas a trozos,  $\mu$  y  $\omega$  son parámetros que satisfacen la desigualdad  $0 < \mu < \omega$ , y  $\delta > 0$  es una constante que determina los recursos disponibles del conjunto de perturbaciones externas  $\mathcal{U}_\delta$ . La familia de ecuaciones diferenciales descrita se puede considerar como una generalización del problema de Ya. N. Roitenberg sobre la construcción de auto oscilaciones mediante la síntesis de un control para un sistema dinámico de orden dos que se discutió en la [Subsección 1.4.1](#).

Tomando  $y_1 = y$  y  $y_2 = \dot{y}$ , la familia de ecuaciones diferenciales propuesta es equivalente a la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con una perturbación externa definidas en el plano:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 y_1 - 2\mu y_2 + bu(t). \end{aligned} \tag{3.11} \blacktriangleleft$$

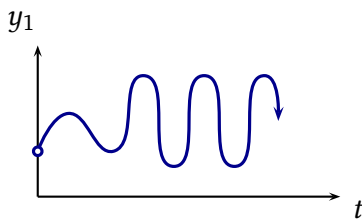
El planteamiento del problema de máxima desviación exige cierto carácter oscilatorio de las soluciones  $\mathbf{y}_u$  de la familia de sistemas de ecuaciones



diferenciales (3.11) respecto a la coordenada  $y_1$ , la cual, naturalmente, depende de la elección de la perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ . En este sentido se considera la siguiente:

**Definición 3.1.** La solución  $\mathbf{y}_u(t)$  de (3.11) asociada a una perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  y una condición inicial  $\mathbf{y}_u(0) = \mathbf{y}_0$ , es *oscilante respecto a una coordenada*, si esta coordenada sobre  $[0, \infty)$  cambia de signo un número infinito de veces. En caso contrario, si la solución  $\mathbf{y}_u(t)$  no es oscilante respecto a alguna coordenada, la solución es *no oscilante respecto a coordenadas*.

Se observa de la **Definición 3.1** que si para alguna elección  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  la correspondiente solución  $\mathbf{y}_u$  del sistema (3.11) es oscilante respecto a la coordenada  $y_1$ , también lo es respecto a la coordenada  $y_2$ . No obstante, el recíproco es falso. En la **Figura 3.2** se muestra una situación en la cual una solución  $\mathbf{y}_u$  es oscilante respecto a la coordenada  $y_2 = \dot{y}_1$ , pero no lo es respecto a la coordenada  $y_1$ .



**Figura 3.2.** Solución oscilante respecto a  $y_2$  y no oscilante respecto a  $y_1$ .

La formulación del *problema de máxima desviación* que se considera a continuación, es una adaptación de la formulación que se presenta en las referencias: **Zhermolenko (1980)** y **Aleksandrov et al. (2005)**.

Se define el conjunto

$$\Sigma = \{(y_1, y_2) \mid y_1 \in \mathbb{R} \text{ y } y_2 = 0\}$$

y se considera el problema de determinar soluciones en los sistemas de ecuaciones diferenciales (3.11) con las siguientes características. Sin pérdida de

generalidad, se supone que la condición inicial para cada uno de los elementos de (3.11) es de la forma

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de tal manera que este punto pertenece al conjunto

$$\Sigma_+ = \{(y_1, y_2) \mid y_1 > 0 \text{ y } y_2 = 0\}.$$

Por lo tanto,  $y_1(0) = \alpha_0$  y  $y_2(0) = 0$ . Se desea determinar, si es que existe, una perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  con la propiedad de que la solución correspondiente  $\mathbf{y}_u$  cruce por vez primera en algún instante  $t_1 > 0$  finito al conjunto

$$\Sigma_- = \{(y_1, y_2) \mid y_1 < 0 \text{ y } y_2 = 0\},$$

y tal que la primera coordenada del punto de intersección sea solución del problema de optimización

$$\inf_{u(t) \in \mathcal{U}_\delta} y_1(t_1),$$

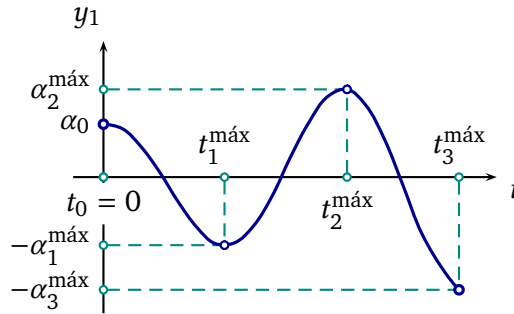
bajo el supuesto de que  $y_2(t) \neq 0$  para cada  $t \in (0, t_1)$ .

Se resalta que el instante  $t_1 > 0$ , en el cual cada solución  $\mathbf{y}_u$  asociada a cada perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  cruza al conjunto  $\Sigma_-$ , no es fijo y que, en general, dicho instante depende de la elección de la perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  que se considere.

Cuando el problema de optimización planteado admite solución, se dice que el conjunto de soluciones  $\mathbf{y}_u$  posee *máxima desviación respecto a la coordenada  $y_1$* , y la correspondiente máxima desviación se denota por  $\alpha_1^{\text{máx}}$ . La perturbación que da solución a este problema de optimización se denomina *peor perturbación externa*, la cual se denota por  $u_{\text{máx}}(t)$ .

Si  $\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$  denota la solución asociada a la peor perturbación externa  $u_{\text{máx}}(t)$ , entonces existe un instante  $t_1^{\text{máx}} > 0$  tal que la correspondiente máxima desviación satisface la ecuación  $-\alpha_1^{\text{máx}} = y_1(t_1^{\text{máx}})$ , tal como se muestra en la [Figura 3.3](#). En este caso, el punto

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t_1^{\text{máx}}) = \begin{pmatrix} -\alpha_1^{\text{máx}} \\ 0 \end{pmatrix}$$



**Figura 3.3.** Interpretación geométrica del problema de máxima desviación en el conjunto de soluciones que son oscilantes respecto a la coordenada  $y_1$  en la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.11).

es un elemento de  $\Sigma_-$ , tal como se muestra en la **Figura 3.4**.

El problema de máxima desviación respecto a la coordenada  $y_1$  se puede presentar de forma equivalente al problema de optimización:

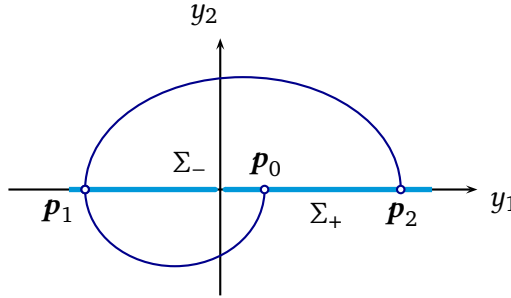
$$\begin{aligned} & \sup_{u(t) \in \mathcal{U}_\delta} |y_1(t_1)| \\ & y_1(0) = \alpha_0, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \quad \dot{y}_1(t_1) = 0, \\ & \dot{y}_1(t) \neq 0 \text{ para todo } t \in (0, t_1). \end{aligned}$$

Se puede entonces plantear nuevamente el siguiente problema de máxima desviación: desde  $\mathbf{p}_1$  en  $\Sigma_-$  se determina, si existe, una perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  que conduzca a la correspondiente solución hasta un nuevo punto  $\mathbf{p}_2$  en  $\Sigma_+$  en un instante  $t_2 > t_1^{\text{máx}}$  finito, de forma tal que la primera coordenada del punto de intersección  $\mathbf{p}_2$  sea solución del problema de optimización

$$\sup_{u(t) \in \mathcal{U}_\delta} y_1(t_2)$$

y tal que  $y_2(t) \neq 0$  para cada  $t \in (t_1^{\text{máx}}, t_2)$ , como se muestra en la **Figura 3.4**.

Si existe solución al problema de optimización, se dice nuevamente que el conjunto de soluciones  $\mathbf{y}_u$  admite *máxima desviación respecto a la coordenada  $y_1$* , y la correspondiente máxima desviación se denota por  $\alpha_2^{\text{máx}}$ . La



**Figura 3.4.** Interpretación de los conjuntos  $\Sigma_+$  y  $\Sigma_-$  en la construcción de una oscilación en el problema de máxima desviación respecto a la coordenada  $y_1$ .

perturbación externa que da solución a este nuevo problema de optimización también se denomina *peor perturbación externa* y se denota de igual manera por  $u_{\text{máx}}(t)$ .

La solución  $\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t) = (y_1(t), y_2(t))^\top$  asociada a la peor perturbación externa implica la existencia de un instante  $t_2^{\text{máx}} > t_1^{\text{máx}}$  tal que el valor de la correspondiente máxima desviación satisface la ecuación  $\alpha_2^{\text{máx}} = y_1(t_2^{\text{máx}})$ , tal como se observa en la [Figura 3.3](#). Se sigue entonces que

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t_2^{\text{máx}}) = \begin{pmatrix} \alpha_2^{\text{máx}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

es un elemento de  $\Sigma_+$ , ver la [Figura 3.4](#).

Una vez más, el problema de máxima desviación respecto a la coordenada  $y_1$  se puede presentar de forma equivalente al problema de optimización:

$$\begin{aligned} & \sup_{u(t) \in \mathcal{U}_\delta} |y_1(t_2)| \\ y_1(t_1^{\text{máx}}) &= -\alpha_1^{\text{máx}}, \quad \dot{y}_1(t_1^{\text{máx}}) = 0, \quad \dot{y}_1(t_2) = 0, \\ & \dot{y}_1(t) \neq 0 \text{ para todo } t \in (t_1^{\text{máx}}, t_2). \end{aligned}$$

El procedimiento descrito se puede iterar y, con ello, formular problemas de optimización análogos, lo cual permite construir una solución  $\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t)$  os-

culatoria que posee máximas desviaciones  $\alpha_1^{\text{máx}}, \alpha_2^{\text{máx}}, \dots$  respecto a la coordenada  $y_1$  en ciertos instantes  $t_1^{\text{máx}}, t_2^{\text{máx}}, \dots$ , y la cual cruza de forma iterativa los conjuntos  $\Sigma_-$  y  $\Sigma_+$ .

### 3.3. Conjuntos de alcanzabilidad desde un punto en un semiplano

Se presenta ahora un método geométrico que permite determinar una perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , bajo la cual, es posible hallar el conjunto de máximas desviaciones sobre el eje  $y_1$  para la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.11).

Se supone que el espacio de estados  $\Omega = \mathbb{R}^2$  es dividido en dos semiespacios

$$\Omega_+ = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 > 0\} \quad \text{y} \quad \Omega_- = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 < 0\}$$

y que en ellos se considera el movimiento de un sistema dinámico gobernado por un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales autónomas dependientes de una perturbación externa, sobre la cual se conoce únicamente que es acotada y continua a trozos:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(y_1, y_2, u(t)), \\ \dot{y}_2 &= f_2(y_1, y_2, u(t)), \end{aligned} \quad (y_1(t), y_2(t))^T \in \Omega, \quad (3.12) \blacktriangleleft$$

donde

$$u(t) \in \mathcal{U}_\delta = \{u(t) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}) \mid |u(t)| \leq \delta\}.$$

Se elige el vector de condiciones iniciales para cada uno de los elementos de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.12) en la forma

$$p_0 = \begin{pmatrix} -\alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_0 > 0.$$

Sin pérdida de generalidad, se supone que  $f_1(y_1, y_2, u(t)) > 0$  para cualquier elección  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , de tal manera que conforme se incrementa el tiempo  $t \geq 0$ , la variable de estado  $y_1(t)$  de la solución  $\mathbf{y}_u(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$

se incrementa también desde el estado inicial. El supuesto anterior permite concluir que el vector de condiciones iniciales  $\mathbf{p}_0$  no es un punto estacionario del sistema (3.12), es decir, que la función constante  $\mathbf{y}_u(t) \equiv \mathbf{p}_0$  no es solución de (3.12). Se supone también que existe un intervalo  $[0, T]$  con  $T > 0$ , tal que para cada elección de la perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , la correspondiente trayectoria solución  $\mathbf{y}_u: [0, T] \rightarrow \Omega$  de (3.12), definida en el sentido de Filippov, ver la Sección 1.2, y que comienza en el punto  $\mathbf{p}_0$ , corta por segunda vez el eje  $y_2 = 0$  en algún punto  $t_u \in [0, T]$ , es decir,

$$\mathbf{y}_u(t_u) = \begin{pmatrix} y_1(t_u) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cada estado  $\mathbf{y}_u(t_u)$  e instante  $t_u \in [0, T]$  dependen de la elección  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ . Así  $\mathbf{y}_u(t) \in \Omega_+$  para todo  $t \in (0, t_u)$ .

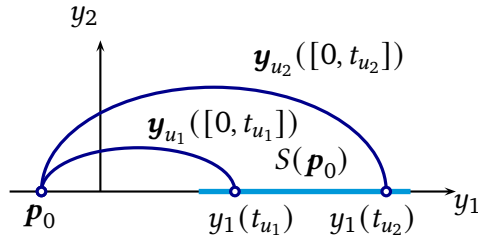
Se define el conjunto  $S(\mathbf{p}_0)$  conformado por los estados de la forma  $\mathbf{y}_u(t_u)$  asociados a cada perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , es decir, estados que pertenecen al conjunto  $\partial\Omega_+ \cap \partial\Omega_-$ , y a los cuales se puede llegar a través de una trayectoria solución del sistema (3.12) asociada a la elección de una función  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  que inicia en  $\mathbf{p}_0$ . Por lo tanto,

$$S(\mathbf{p}_0) = \bigcup_{u(t) \in \mathcal{U}_\delta} \{\mathbf{y}_u(t_u)\}. \quad (3.13) \blacktriangleleft$$

El conjunto  $S(\mathbf{p}_0)$  se llama *segmento de alcanzabilidad desde  $\mathbf{p}_0$* . En la Figura 3.5 se muestra un esquema de dicho conjunto y dos trayectorias solución asociadas a dos elecciones  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  en  $\mathcal{U}_\delta$ .

Se puede comprobar de forma directa que  $S(\mathbf{p}_0) \cap [y_1(t_{u_1}), y_1(t_{u_2})]$  es en sí un conjunto convexo, debido a que  $\mathcal{U}_\delta$  es un conjunto convexo y, por consiguiente,  $S(\mathbf{p}_0)$  resulta ser un intervalo.

Es claro de la construcción de  $S(\mathbf{p}_0)$ , que este conjunto es acotado inferiormente por  $-\alpha_0$  y que  $-\alpha_0 \notin S(\mathbf{p}_0)$ , ya que  $\mathbf{p}_0$  no es un punto estacionario del sistema (3.12). Además, este conjunto es también acotado superiormente debido al supuesto de que toda trayectoria solución  $\mathbf{y}_u(t)$ , asociada a alguna elección  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , corta el eje  $y_2 = 0$  en algún instante  $t_u \in [0, T]$ . Por lo



**Figura 3.5.** Segmento lineal de alcanzabilidad.

tanto, es apropiado considerar el siguiente problema de optimización:

$$\sup_{u(t) \in \mathcal{U}_\delta} S(\mathbf{p}_0), \quad (3.14 \blacktriangleleft)$$

Un razonamiento análogo permite considerar la posibilidad de resolver el problema de optimización opuesto

$$\inf_{u(t) \in \mathcal{U}_\delta} S(\mathbf{p}_0). \quad (3.15 \blacktriangleleft)$$

Los planteamientos de los problemas de optimización (3.14) y (3.15) tienen la siguiente interpretación geométrica respecto a las trayectorias solución de la ecuación diferencial (3.12): *se desean determinar funciones  $u_{\min}(t)$  y  $u_{\max}(t)$  en  $\mathcal{U}_\delta$  que permitan hallar la mínima y máxima variación de amplitud de oscilación de las soluciones de la ecuación diferencial (3.12), al determinar la menor y mayor distancia del origen de coordenadas al punto de intersección de las soluciones de (3.12) con el eje  $y_2 = 0$ . Cuando esta mínima y máxima variación existen, se denominan *mínima desviación* y *máxima desviación* de la coordenada  $y_1$ , respectivamente, y se denotan por  $\alpha_1^{\min}$  y  $\alpha_1^{\max}$ . En tal caso, las perturbaciones  $u_{\min}(t)$  y  $u_{\max}(t)$  en  $\mathcal{U}_\delta$  que generan las correspondientes mínima desviación y máxima desviación, son llamadas *mejor perturbación externa* y *peor perturbación externa*, respectivamente.*

La solución de los problemas de optimización (3.14) y (3.15) conllevan asociado el problema de determinar simultáneamente instantes  $t_1^{\min}$  y  $t_1^{\max}$  en los cuales se alcanzan la mínima desviación y la máxima desviación.

La interpretación geométrica para el planteamiento del problema de máxima desviación es equivalente al planteamiento que se realizó en la [Sección 3.1](#) del problema de optimización respecto de la primera coordenada  $y_1$  de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (3.12):

$$\begin{aligned} & \sup_{u(t) \in \mathcal{U}_\delta} |y_1(t_u)| \\ y_1(0) &= -\alpha_0, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \quad \dot{y}_1(t_u) = 0, \\ \dot{y}_1(t) &\neq 0 \text{ para todo } t \in (0, t_u). \end{aligned}$$

Si existe una función  $u_{\text{máx}}(t) \in \mathcal{U}_\delta$  y un instante  $t_1^{\text{máx}} \in [0, T]$  que correspondan a la solución a este problema de optimización, entonces la solución

$$\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq t_1^{\text{máx}},$$

describe la trayectoria que permite obtener la máxima desviación de la coordenada  $y_1$  en el sistema de ecuaciones diferenciales (3.12), la cual queda descrita por la ecuación  $\alpha_1^{\text{máx}} = y_1(t_1^{\text{máx}})$ . Por lo tanto, se obtiene la solución del problema de optimización (3.14):

$$\alpha_1^{\text{máx}} = \sup_{u(t) \in \mathcal{U}_\delta} S(\mathbf{p}_0),$$

y, en tal situación, se define el segmento de trayectoria

$$B_{\text{máx}}(\mathbf{p}_0) = \left\{ \mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t) \mid t \in [0, t_1^{\text{máx}}] \right\},$$

el cual se denomina *trayectoria de máxima desviación*.

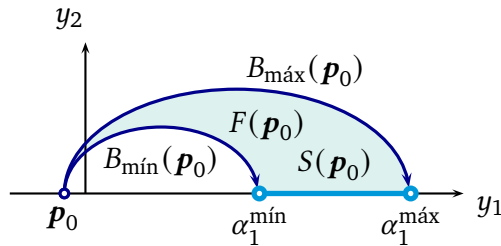
La misma interpretación geométrica se obtiene al resolver el problema de mínima desviación sobre el sistema de ecuaciones diferenciales (3.12), lo cual requiere determinar de forma análoga una función  $u_{\text{mín}}(t) \in \mathcal{U}_\delta$  y un instante  $t_1^{\text{mín}} \in [0, T]$  que definan la *trayectoria de mínima desviación*

$$B_{\text{mín}}(\mathbf{p}_0) = \left\{ \mathbf{y}_{u_{\text{mín}}}(t) \mid t \in [0, t_1^{\text{mín}}] \right\},$$



como se muestra en la [Figura 3.6](#). En tal caso se obtiene

$$\alpha_1^{\min} = \inf_{u(t) \in \mathcal{U}_\delta} S(\mathbf{p}_0).$$



**Figura 3.6.** Interpretación geométrica de la trayectoria de mínima desviación  $B_{\min}(\mathbf{p}_0)$ , la trayectoria de máxima desviación  $B_{\max}(\mathbf{p}_0)$ , la mínima desviación  $\alpha_1^{\min}$ , la máxima desviación  $\alpha_1^{\max}$ , y el conjunto de alcanzabilidad  $F(\mathbf{p}_0)$  desde  $\mathbf{p}_0$ .

Se observa que, resolver el problema de máxima desviación, o bien, el problema de mínima desviación, es equivalente a determinar el conjunto  $B_{\max}(\mathbf{p}_0)$ , o bien, el correspondiente conjunto  $B_{\min}(\mathbf{p}_0)$ .

Se define el subconjunto  $F(\mathbf{p}_0)$  de  $\Omega_+$  conformado por las trayectorias solución de (3.12) que se obtienen para cada elección  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , que satisfacen la condición inicial  $\mathbf{p}_0$  y que se hallan en  $\Omega_+$ . El conjunto  $F(\mathbf{p}_0)$  se llama *conjunto de alcanzabilidad desde el punto  $\mathbf{p}_0$  en el semiplano  $\Omega_+$* <sup>2</sup>. En la [Figura 3.6](#) se muestra un esquema que ilustra la construcción del conjunto  $F(\mathbf{p}_0)$ .

En lo que sigue se muestra un método que permite obtener una descripción del conjunto de alcanzabilidad  $S(\mathbf{p}_0)$  y los conjuntos  $B_{\min}(\mathbf{p}_0)$  y  $B_{\max}(\mathbf{p}_0)$ , los cuales se obtienen de la familia del sistema de ecuaciones diferenciales (3.12). Tal método es una adaptación de [Formal'skii \(2010, 2015\)](#).

Como  $f_1(y_1, y_2, u(t)) > 0$ , se puede escribir de forma equivalente la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.12) en la familia de ecuaciones

<sup>2</sup>En la literatura en inglés, al conjunto  $F(\mathbf{p}_0)$  se le suele llamar *integral funnel*, *reachability set*, o bien, *attainability set*, ver [Butkovskiy \(1991\)](#) y [Formal'skii \(2015\)](#).

diferenciales de primer orden:

$$\frac{dy_2}{dy_1} = f(y_1, y_2, u(t)), \quad y_2(-\alpha_0) = 0, \quad u(t) \in \mathcal{U}_\delta, \quad (3.16 \blacktriangleleft)$$

donde

$$f(y_1, y_2, u(t)) = \frac{f_2(y_1, y_2, u(t))}{f_1(y_1, y_2, u(t))}.$$

Se considera la perturbación  $u_{\text{máx}}(t) \in \mathcal{U}_\delta$  que determina el mayor valor de la derivada en la ecuación diferencial (3.16), es decir,

$$u_{\text{máx}}(t) = \arg \left\{ \sup_{u(t) \in \mathcal{U}_\delta} f(y_1, y_2, u(t)) \right\}. \quad (3.17 \blacktriangleleft)$$

Si  $y_2^{\text{máx}}: [-\alpha_0, \alpha_1^{\text{máx}}] \rightarrow \mathbb{R}$  denota la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy_2}{dy_1} = f(y_1, y_2, u_{\text{máx}}(t)), \quad y_2(-\alpha_0) = 0,$$

donde  $\alpha_1^{\text{máx}} > -\alpha_0$  es el primer estado en el cual  $y_2^{\text{máx}}(\alpha_1^{\text{máx}}) = 0$ , entonces se debe satisfacer

$$B_{\text{máx}}(\mathbf{p}_0) = \left\{ (y_1, y_2^{\text{máx}}(y_1)) \mid y_1 \in (-\alpha_0, \alpha_1^{\text{máx}}) \right\}. \quad (3.18 \blacktriangleleft)$$

Para ver que esto es así, basta observar que si se elige otra perturbación  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  tal que la correspondiente solución  $\mathbf{y}_u(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$  de la ecuación diferencial (3.16) inicia en  $\mathbf{p}_0$ , tiene la propiedad de alcanzar un punto  $(y_1^0, y_2^0(y_1^0))$  del conjunto  $B_{\text{máx}}(\mathbf{p}_0)$ , y estar por encima de la curva  $B_{\text{máx}}(\mathbf{p}_0)$  para  $y_1 > y_1^0$ , entonces en dicho punto se satisface la desigualdad

$$f(y_1^0, y_2^0(y_1^0), u(t)) > f(y_1^0, y_2^{\text{máx}}(y_1^0), u_{\text{máx}}(t)), \quad (3.19 \blacktriangleleft)$$

o bien, la solución  $y_2^{\text{máx}}: [-\alpha_0, \alpha_1^{\text{máx}}] \rightarrow \mathbb{R}$  no es única. No obstante, esto no puede ser así, ya que en el primer caso, si la desigualdad (3.19) es válida, entonces se contradice la definición de la función (3.17), mientras que en el

segundo caso, se ha supuesto que la solución que inicia en  $\mathbf{p}_0$  es única. Por lo tanto, el supuesto (3.18) se debe satisfacer.

Se sigue de esto que  $B_{\max}(\mathbf{p}_0)$  describe la frontera superior del conjunto de alcanzabilidad  $F(\mathbf{p}_0)$ .

Si ahora se considera la función  $u_{\min}(t) \in \mathcal{U}_\delta$  que minimiza la derivada en la ecuación diferencial (3.16), es decir, la función

$$u_{\min}(t) = \arg \left\{ \inf_{u(t) \in \mathcal{U}_\delta} f(y_1, y_2, u(t)) \right\}, \quad (3.20 \blacktriangleleft)$$

y  $y_2^{\min} : [-\alpha_0, \alpha_1^{\min}] \rightarrow \mathbb{R}$  denota la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy_2}{dy_1} = f(y_1, y_2, u_{\min}(t)), \quad y_2(-\alpha_0) = 0,$$

donde  $\alpha_1^{\min} > -\alpha_0$  es el primer estado en el cual  $y_2^{\min}(\alpha_1^{\min}) = 0$ , entonces se debe satisfacer

$$B_{\min}(\mathbf{p}_0) = \left\{ (y_1, y_2^{\min}(y_1)) \mid y_1 \in (-\alpha_0, \alpha_1^{\min}) \right\}. \quad (3.21 \blacktriangleleft)$$

Al aplicar un argumento similar, se puede mostrar que  $B_{\min}(\mathbf{p}_0)$  define la frontera inferior del conjunto de alcanzabilidad  $F(\mathbf{p}_0)$ .

De esta manera, las expresiones (3.13), (3.18) y (3.21) permiten concluir que el conjunto de alcanzabilidad  $F(\mathbf{p}_0)$  satisface la propiedad:

$$\partial F(\mathbf{p}_0) = B_{\min}(\mathbf{p}_0) \cup B_{\max}(\mathbf{p}_0) \cup S(\mathbf{p}_0).$$

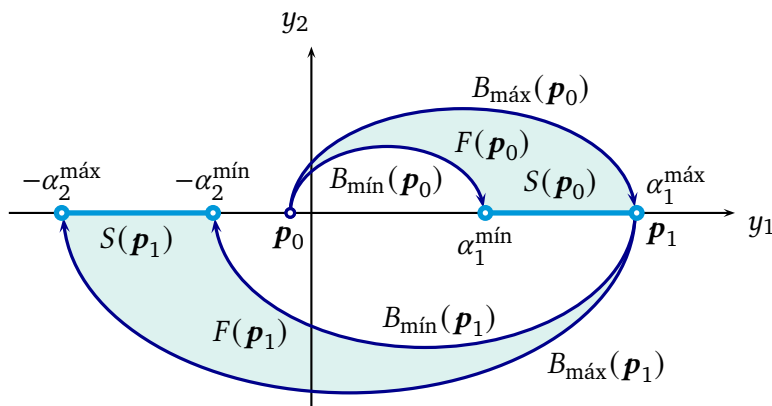
La posibilidad de obtener esta representación de forma explícita, depende de poder determinar de forma analítica la solución de la ecuación diferencial (3.16), o del sistema de ecuaciones diferenciales (3.12), cuando se eligen las perturbaciones  $u_{\min}(t)$  y  $u_{\max}(t)$ , según las expresiones (3.17) y (3.20). Por consiguiente, la fortuna de este cometido, queda predeterminado por la estructura de la ecuación diferencial (3.16), o bien, de manera equivalente, por la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.12).

Si se considera el punto

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{\max} \\ 0 \end{pmatrix},$$

entonces se puede emplear el procedimiento descrito a fin de construir de forma análoga el conjunto de alcanzabilidad  $F(\mathbf{p}_1)$ , como se muestra en la Figura 3.7.

Por construcción, es claro que este procedimiento se puede repetir de forma indefinida sobre cada máxima desviación  $\alpha_n^{\text{máx}}$  para determinar los correspondientes conjuntos de alcanzabilidad  $F(\mathbf{p}_n)$ .



**Figura 3.7.** Interpretación geométrica de los conjuntos de alcanzabilidad  $F(\mathbf{p}_0)$  y  $F(\mathbf{p}_1)$  así como las máximas desviaciones  $\alpha_1^{\text{máx}}$  y  $\alpha_2^{\text{máx}}$ .

En el procedimiento iterativo que se ha descrito, pueden surgir de forma natural el estudio de dos tipos de soluciones  $\mathbf{y}_u(t)$  de la familia de sistema de ecuaciones diferenciales (3.12): *soluciones para las cuales la sucesión de máximas desviaciones es convergente, y soluciones para las cuales la sucesión de máximas desviaciones es divergente*. El primer tipo de soluciones permiten construir soluciones periódicas que convergen a un único ciclo límite estable, o bien, a un punto de equilibrio, mientras que las segundas corresponden a soluciones divergentes.

En el siguiente apartado se presenta una aplicación sobre la construcción de los conjuntos de alcanzabilidad  $F(\mathbf{p}_n)$  para establecer un criterio de estabilidad robusta en ecuaciones diferenciales de segundo orden.

### 3.4. Problema de máxima desviación en ecuaciones lineales

Ningún arte es susceptible de aprenderse puramente en abstracto y con entera independencia de las aplicaciones a que está destinado.

Gabino Barreda (1818-1881)  
Educador y político mexicano

Por tomar en consideración el método descrito en el apartado anterior, se analiza como caso particular el problema de determinar el conjunto de máximas desviaciones de la familia de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden dos con una perturbación externa:

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega^2 y = u(t),$$

donde los parámetros satisfacen la desigualdad  $0 < \mu < \omega$ , y la función  $u(t)$  es una perturbación externa que satisface la inclusión

$$u(t) \in \mathcal{U}_\delta = \{u(t) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}) \mid |u(t)| \leq \delta\},$$

con  $\delta > 0$  constante.

Considerando el cambio de coordenadas  $y_1 = y$  y  $y_2 = \dot{y}$ , la familia de ecuaciones diferenciales ordinaria propuesta se puede escribir de forma equivalente a la siguiente familia de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con una perturbación externa:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 y_1 - 2\mu y_2 + u(t), \end{aligned} \tag{3.22} \blacktriangleleft$$

donde

$$u(t) \in \mathcal{U}_\delta = \{u(t) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}) \mid |u(t)| \leq \delta\}.$$

Se observa que existe al menos una perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  tal que la solución de esta ecuación diferencial asociada a esta perturbación es oscilatoria respecto a la coordenada  $y_1$ , por ejemplo, si se elige la perturbación externa constante  $u(t) \equiv 0$  definida para todo  $t \geq 0$ .

Con el fin de determinar los conjuntos de alcanzabilidad  $F(\mathbf{p}_k)$  de la familia de ecuaciones diferenciales (3.22), al emplear el método descrito en la Sección 3.3, se escribe cada elemento de forma equivalente a

$$\frac{dy_2}{dy_1} = -\omega^2 \frac{y_1}{y_2} - 2\mu + \frac{u(t)}{y_2}.$$

Se observa de esta nueva familia de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que la función que maximiza el lado derecho depende únicamente de la coordenada  $y_2$ . Esta función toma el valor  $u_{\text{máx}}(t) = \delta$  si  $y_2(t) > 0$ , toma el valor  $u_{\text{máx}}(t) = -\delta$  si  $y_2(t) < 0$ , mientras que si  $y_2(t) = 0$ , entonces  $u_{\text{máx}}(t)$  no está definida. Por lo tanto, después de determinar la selección de norma mínima, ver la Sección 1.3, se sigue que la función que describe el máximo valor de la derivada es:

$$u_{\text{máx}}(t) = \delta \text{Sign}(y_2(t)) = \begin{cases} +\delta, & y_2(t) > 0, \\ -\delta, & y_2(t) \leq 0, \end{cases}$$

donde se ha usado que  $m[\text{sign}(y_2(t))] = \text{Sign}(y_2(t))$ . Si se sustituye la expresión  $u_{\text{máx}}(t)$  en la ecuación diferencial de primer orden, se observa que la derivada  $dy_2/dy_1$  no está definida si  $y_2 \rightarrow 0$ , lo cual significa que la solución  $\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t)$  del sistema de ecuaciones diferenciales (3.22), asociada a la perturbación externa  $u_{\text{máx}}(t)$ , corta de forma transversal la superficie de discontinuidad

$$\Sigma = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 = 0\}.$$

De esta observación, se sigue que el espacio de fases  $\Omega = \mathbb{R}^2$  se puede dividir de tal manera que  $\mathbb{R}^2 = \Omega_+ \cup \Sigma \cup \Omega_-$ , donde

$$\Omega_+ = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 > 0\} \quad \text{y} \quad \Omega_- = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 < 0\}.$$

Con el fin de determinar el conjunto de máximas desviaciones  $\{\alpha_n^{\text{máx}}\}_{n \in \mathbb{N}}$  de la familia de ecuaciones diferenciales (3.22), se realiza un análisis sobre las soluciones en el sentido de Filippov del sistema de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo que pertenece a la familia de ecuaciones

diferenciales (3.22):

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 y_1 - 2\mu y_2 + \delta \text{Sign}(y_2). \end{aligned} \quad (3.23 \blacktriangleleft)$$

El razonamiento anterior, y los resultados que se presentaron en el **Capítulo 1**, muestran que el sistema de ecuaciones diferenciales (3.23) admite solución  $\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$  definida en el sentido de Filippov para todo  $t \geq 0$ . Consecuentemente, es esencial llevar a cabo un análisis de estas soluciones en cada uno de los conjuntos  $\Omega_-$  y  $\Omega_+$ .

Se supone que la condición inicial  $\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(0) = \mathbf{p}_0$  de la ecuación diferencial (3.23) es descrita por el punto

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Sigma,$$

donde  $\alpha_0 > 0$ . Luego, de acuerdo con las condiciones iniciales y con el sistema de ecuaciones diferenciales (3.23), se sigue que

$$\dot{y}_2(0) = -\omega^2 y_1(0) - 2\mu y_2(0) + u_{\text{máx}}(0) = -\alpha_0 \omega^2 - \delta < 0,$$

y, por consiguiente, existe un instante  $t_1 > 0$ , quizá suficientemente pequeño, tal que  $u_{\text{máx}}(t) = -\delta$  para todo  $t \in (0, t_1)$ . Lo anterior implica que para  $t \in (0, t_1)$ , el sistema de ecuaciones diferenciales (3.23) con condiciones iniciales definidas por  $y_1(0) = \alpha_0 > 0$  y  $y_2(0) = 0$  es definido sobre el conjunto  $\Omega_-$  y descrito por

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, & y_1(0) &= \alpha_0, \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 y_1 - 2\mu y_2 - \delta, & y_2(0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.24 \blacktriangleleft)$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \left( \frac{\delta}{\omega^2} + \alpha_0 \right) e^{-\mu t} \left( \cos \vartheta t + \frac{\mu}{\vartheta} \sin \vartheta t \right) - \frac{\delta}{\omega^2}, \\ y_2(t) &= -\frac{\omega^2}{\vartheta} \left( \frac{\delta}{\omega^2} + \alpha_0 \right) e^{-\mu t} \sin \vartheta t, \end{aligned}$$

donde

$$\vartheta = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}.$$

Se sigue que el primer instante en el cual se cumple la condición  $y_2(t_1^{\text{máx}}) = 0$  bajo la restricción  $y_2(t) \neq 0$  para todo  $t \in (0, t_1^{\text{máx}})$  es

$$t_1^{\text{máx}} = \frac{\pi}{\vartheta}.$$

Esto muestra que  $u_{\text{máx}}(t) = -\delta$  para todo  $t \in (0, t_1^{\text{máx}})$  y, por consiguiente, la primer intersección de la solución con el eje  $y_2 = 0$ , se describe por el sistema de ecuaciones  $y_1(t_1^{\text{máx}}) = -\alpha_1^{\text{máx}}$  y  $y_2(t_1^{\text{máx}}) = 0$ , de donde se obtiene la expresión para la primera máxima desviación:

$$\alpha_1^{\text{máx}} = A\alpha_0 + \frac{\delta}{\omega^2}(1 + A), \quad A = \exp\left(-\frac{\pi\mu}{\vartheta}\right). \quad (3.25 \blacktriangleleft)$$

De esta manera, la trayectoria de máxima desviación  $B_{\text{máx}}(\mathbf{p}_0)$  se describe por la parametrización que se obtiene de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (3.24), es decir,

$$B_{\text{máx}}(\mathbf{p}_0) = \left\{ \mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (0, t_1^{\text{máx}}) \right\},$$

cómo se ilustra en la [Figura 3.8](#).

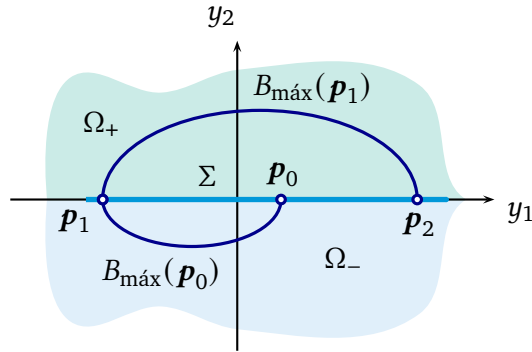
Se ha construido así un primer semiciclo de oscilación para la solución de la ecuación diferencial (3.23) con condiciones iniciales  $\mathbf{p}_0 = (\alpha_0, 0)^\top \in \Sigma$ , y cuyo sucesor es descrito por

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -\alpha_1^{\text{máx}} \\ 0 \end{pmatrix} \in \Sigma,$$

La solución se continúa a fin construir un segundo semiciclo de oscilación definido en  $\Omega_+$ , ver la [Figura 3.8](#). De esta manera, si se eligen las condiciones iniciales  $y_1(t_1^{\text{máx}}) = -\alpha_1^{\text{máx}}$  y  $y_2(t_1^{\text{máx}}) = 0$  para el sistema (3.23), y se observa que existe  $t_2 > t_1^{\text{máx}}$  tal que  $u_{\text{máx}}(t) = \delta$  para todo  $t \in (t_1^{\text{máx}}, t_2)$ , debido a que

$$\dot{y}_2(t_1^{\text{máx}}) = -\omega^2 y_1(t_1^{\text{máx}}) - 2\mu y_2(t_1^{\text{máx}}) + u_{\text{máx}}(t_1^{\text{máx}}) = \alpha_1^{\text{máx}} \omega^2 - \delta > 0,$$





**Figura 3.8.** Trayectorias de máxima desviación del sistema de ecuaciones diferenciales (3.23).

se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, & y_1(t_1^{\text{máx}}) &= -\alpha_1^{\text{máx}} < 0, \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 y_1 - 2\mu y_2 + \delta, & y_2(t_1^{\text{máx}}) &= 0, \end{aligned} \quad (3.26 \blacktriangleleft)$$

cuya solución se denota por

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -\left(\frac{\delta}{\omega^2} + \alpha_1^{\text{máx}}\right) e^{-\mu(t-t_1^{\text{máx}})} \left(\cos \vartheta(t-t_1^{\text{máx}}) + \frac{\mu}{\vartheta} \sin \vartheta(t-t_1^{\text{máx}})\right) + \frac{\delta}{\omega^2}, \\ y_2(t) &= \frac{\omega^2}{\vartheta} \left(\frac{\delta}{\omega^2} + \alpha_1^{\text{máx}}\right) e^{-\mu(t-t_1^{\text{máx}})} \sin \vartheta(t-t_1^{\text{máx}}). \end{aligned}$$

De esta manera, el instante  $t_2^{\text{máx}} > t_1^{\text{máx}}$  que satisface  $y_2(t_2^{\text{máx}}) = 0$ , pero tal que  $y_2(t) \neq 0$  para todo  $t \in (t_1^{\text{máx}}, t_2^{\text{máx}})$ , se obtiene de forma análoga a la construcción del primer semiperiodo de oscilación, donde

$$t_2^{\text{máx}} = \frac{2\pi}{\vartheta}.$$

Por consiguiente, se sigue que  $u_{\text{máx}}(t) = \delta$  para todo  $t \in (t_1^{\text{máx}}, t_2^{\text{máx}})$  y, como consecuencia, la segunda intersección de la solución con el eje  $y_2 = 0$  se describe por el sistema de ecuaciones  $y_1(t_2^{\text{máx}}) = \alpha_2^{\text{máx}}$  y  $y_2(t_2^{\text{máx}}) = 0$ , donde  $\alpha_2^{\text{máx}}$  denota la segunda máxima desviación del sistema de ecuaciones

diferenciales (3.23), y para la cual se obtiene la expresión

$$\alpha_2^{\text{máx}} = A\alpha_1^{\text{máx}} + \frac{\delta}{\omega^2}(1 + A). \quad (3.27 \blacktriangleleft)$$

Por consiguiente, la definición de esta máxima desviación y la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (3.23) permite construir una nueva trayectoria de máxima desviación a partir del punto  $\mathbf{p}_1 = (-\alpha_1^{\text{máx}}, 0)^\top \in \Sigma$ , y que se describe por

$$B_{\text{máx}}(\mathbf{p}_1) = \left\{ \mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (t_1^{\text{máx}}, t_2^{\text{máx}}) \right\}.$$

Esto describe la construcción del primer ciclo de oscilación del sistema de ecuaciones diferenciales (3.23), ver la Figura 3.8<sup>3</sup>.

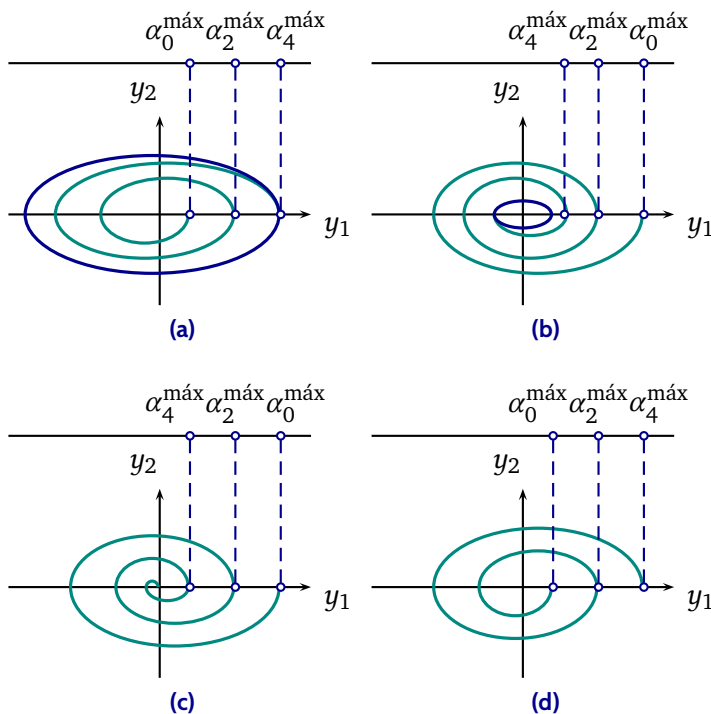
El procedimiento descrito se puede repetir de forma indefinida a fin de construir la solución completa del sistema de ecuaciones diferenciales (3.23), y con ello, obtener las correspondientes máximas desviaciones  $\alpha_n^{\text{máx}}$  para todo  $n > 2$ , mediante la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales análogos a los descritos en (3.24) y (3.26). De esta manera, de acuerdo con las expresiones que se han obtenido en las relaciones (3.25) y (3.27), se concluye que el conjunto de máximas desviaciones  $\{\alpha_n^{\text{máx}}\}_{n \in \mathbb{N}}$  representa un sistema dinámico discreto de primer orden definido por la relación de recurrencia

$$\alpha_{n+1}^{\text{máx}} = A\alpha_n^{\text{máx}} + \frac{\delta}{\omega^2}(1 + A), \quad \alpha_0^{\text{máx}} = \alpha_0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.28 \blacktriangleleft)$$

El comportamiento asintótico de este sistema dinámico discreto determina la estabilidad de la solución  $\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t)$  para el sistema de ecuaciones diferenciales (3.23). En realidad, se puede observar que existen tres situaciones que se pueden presentar, y que dependen de la naturaleza de la sucesión de máximas desviaciones  $\{\alpha_n^{\text{máx}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ . En la Figura 3.9 se ilustran los casos posibles que se analizan únicamente para la subsucesión  $\{\alpha_{2n}^{\text{máx}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

<sup>3</sup>En el esquema de la Figura 3.8 se muestra únicamente una situación posible sobre el comportamiento de las trayectorias de máxima desviación, en la cual se ha supuesto que  $\alpha_2^{\text{máx}} > \alpha_0$ , no obstante, es claro que la desigualdad opuesta puede tener lugar, es decir, que  $\alpha_2^{\text{máx}} \leq \alpha_0$ .

La primera de ellas corresponde a la posibilidad de determinar un número real  $\alpha^{\text{máx}}$  distinto de cero tal que  $\alpha^{\text{máx}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{2n}^{\text{máx}}$ . En tal caso, el sistema de ecuaciones diferenciales (3.23) posee un ciclo límite que es asintóticamente estable. Las Figuras 3.9a y 3.9b ilustran esta situación. Es claro que estos casos no tienen porqué ocurrir de manera simultánea, en el caso de que esto sea así, el correspondiente ciclo límite es asintóticamente y orbitalmente estable.



**Figura 3.9.** (a) y (b) Soluciones asintóticamente estables que convergen a un ciclo límite. (c) Solución asintóticamente estable que converge a cero. (d) Solución inestable.

Por otra parte, si para la sucesión de máximas desviaciones  $\{\alpha_{2n}^{\text{máx}}\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene lugar la igualdad  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{2n}^{\text{máx}} = 0$ , entonces la solución  $\mathbf{y}_{u^{\text{máx}}}(t)$  describe una espiral que tiende asintóticamente a cero, lo cual muestra que la solu-

ción trivial  $\bar{\mathbf{y}}_u(t) = (0, 0)^\top$  es asintóticamente estable. Este caso se muestra en la [Figura 3.9c](#).

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{2n}^{\text{máx}}$  no existe, entonces la solución  $\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t)$  crece sin límite de forma oscilatoria conforme  $t \rightarrow \infty$ , lo cual muestra que la solución trivial  $\bar{\mathbf{y}}(t) = (0, 0)^\top$  es inestable. La situación se describe en la [Figura 3.9d](#).

Se determina cuál situación ocurre en el sistema dinámico discreto (3.28). Se sigue directamente que el sistema (3.28) es descrito por una relación de recurrencia lineal de la forma

$$\alpha_{n+1}^{\text{máx}} = g(\alpha_n^{\text{máx}}),$$

y, por consiguiente, es conocido que una condición necesaria y suficiente que permite determinar la estabilidad de los puntos fijos de  $g$ , consiste en determinar  $\lambda \in (0, 1)$  tal que  $|g'(\alpha)| < \lambda$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Luego, como  $g'(\alpha) = A$  y  $0 < A < 1$ , se concluye que existe  $\alpha^{\text{máx}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que

$$\alpha^{\text{máx}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n+1}^{\text{máx}},$$

ver [Elaydi \(2005\)](#). Esto muestra que la solución  $\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t)$  para el sistema de ecuaciones diferenciales (3.23), presenta al menos uno de los casos presentados en las [Figuras 3.9a](#) y [3.9b](#).

Se muestra ahora que, para el sistema de ecuaciones diferenciales (3.23), la solución cumple simultáneamente los casos mostrados en las [Figuras 3.9a](#) y [3.9b](#), es decir, se muestra que existe un ciclo límite asintóticamente y orbitalmente estable al cual convergen las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (3.23).

El procedimiento que se sigue consiste en determinar de forma explícita el parámetro  $\alpha^{\text{máx}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , y mostrar que este posee la siguiente propiedad: si se elige la condición inicial  $\alpha_0 = \alpha^{\text{máx}}$ , entonces la sucesión  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida por la relación de recurrencia

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{\delta}{\omega^2}(1 + A), \quad \alpha_0 = \alpha^{\text{máx}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

debe ser tal que la sucesión  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  satisface la siguiente propiedad: existe  $\alpha^* \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha^*$ . La determinación del parámetro  $\alpha^*$  es como

sigue. Los dos primeros términos de la sucesión  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= A\alpha_0 + \frac{\delta}{\omega^2}(1+A) \\ \alpha_2 &= A\alpha_1 + \frac{\delta}{\omega^2}(1+A) = A^2\alpha_0 + \frac{\delta}{\omega^2}(1+A)^2.\end{aligned}$$

Por consiguiente, si se supone que  $\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha^*$ , de acuerdo con el método de las transformaciones puntuales, se obtiene la expresión equivalente

$$\alpha^* = A^2\alpha^* + \frac{\delta}{\omega^2}(1+A)^2,$$

de donde resulta

$$\alpha^* = \frac{\delta}{\omega^2} \cdot \frac{1+A}{1-A},$$

es decir,  $\alpha^{\text{máx}} = \alpha^*$ .

Se sigue que el valor  $\alpha^{\text{máx}}$  describe una condición inicial invariante respecto al problema de máxima desviación, es decir, si se elige  $\alpha_0 = \alpha^{\text{máx}}$  como condición inicial del sistema dinámico discreto (3.28), entonces resulta que  $\alpha_n = \alpha^{\text{máx}}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Además, se observa que la trayectoria cerrada que describe el parámetro  $\alpha^{\text{máx}}$  es un ciclo límite asintóticamente y orbitalmente estable que no depende de las condiciones iniciales, sino que depende únicamente de los parámetros del sistema de ecuaciones diferenciales (3.23). Lo anterior significa que si se elige cualquier condición inicial de la forma  $y_1(0) = \alpha_0$  y  $y_2(0) = 0$ , donde  $\alpha_0$  es distinto del valor  $\alpha^{\text{máx}}$ , entonces la correspondiente trayectoria tiende al único ciclo límite, es decir, la sucesión generada por la relación de recurrencia (3.28), con condición inicial  $\alpha_0$ , converge a  $\alpha^{\text{máx}}$ . La demostración de esta afirmación se obtiene como sigue.

Sea  $\delta_\alpha > 0$  una variación. Se supone que  $y_1(0) = \alpha^{\text{máx}} \pm \delta_\alpha$  y  $y_2(0) = 0$  son las condiciones iniciales del sistema de ecuaciones diferenciales (3.23), cuya solución depende de la peor perturbación externa  $u_{\text{máx}}(t) = \delta \text{Sign}(y_2(t))$ . De la fórmula de recurrencia se obtienen los primeros  $n$  términos de la suce-

sión de máximas desviaciones  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= A \left( \alpha^{\text{máx}} \pm \delta_\alpha \right) + \frac{\delta}{\omega^2} (1 + A), \\ \alpha_2 &= A^2 \left( \alpha^{\text{máx}} \pm \delta_\alpha \right) + \frac{\delta}{\omega^2} (1 + A) \cdot (1 + A), \\ \alpha_3 &= A^3 \left( \alpha^{\text{máx}} \pm \delta_\alpha \right) + \frac{\delta}{\omega^2} (1 + A) \cdot (1 + A + A^2),\end{aligned}$$

y en general

$$\begin{aligned}\alpha_n &= A^n \left( \alpha^{\text{máx}} \pm \delta_\alpha \right) + \frac{\delta}{\omega^2} (1 + A) \cdot (1 + A + A^2 + \dots + A^{n-1}) \\ &= A^n \left( \alpha^{\text{máx}} \pm \delta_\alpha \right) + \frac{\delta}{\omega^2} (1 + A) \cdot \frac{1 - A^n}{1 - A},\end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho de que  $1 + A + A^2 + \dots + A^{n-1}$  describe una suma geométrica finita. Se observa que  $A^n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , pues  $0 < A < 1$ . Por consiguiente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{\delta}{\omega^2} \cdot \frac{1 + A}{1 - A} = \alpha^{\text{máx}}.$$

Esto muestra el resultado deseado.

En algunas ocasiones es conveniente expresar la máxima desviación  $\alpha^{\text{máx}}$  respecto a la coordenada  $y_1$  de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.23) en cierta forma equivalente. Se observa de la definición de  $A$  en (3.25), que

$$\alpha^{\text{máx}} = \frac{\delta}{\omega^2} \cdot \frac{1 + \exp\left(-\frac{\pi\mu}{\vartheta}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\pi\mu}{\vartheta}\right)},$$

y luego, por emplear funciones hiperbólicas, resulta que esta expresión se puede representar de forma equivalente como

$$\alpha^{\text{máx}} = \frac{\delta}{\omega^2} \coth\left(\frac{\pi\mu}{2\vartheta}\right). \quad (3.29 \blacktriangleleft)$$

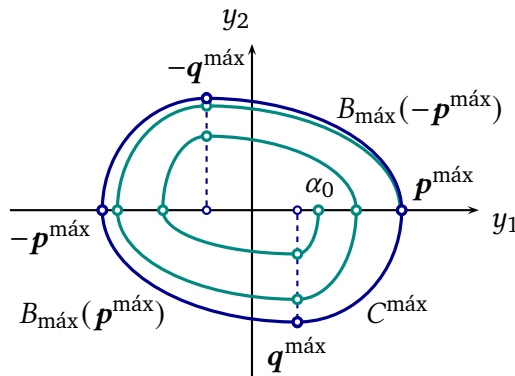
La construcción que se ha realizado sobre la máxima desviación  $\alpha^{\text{máx}}$  respecto a la coordenada  $y_1$  permite obtener la siguiente propiedad geométrica sobre las trayectorias de máxima desviación: Si se elige

$$\mathbf{p}^{\text{máx}} = \begin{pmatrix} \alpha^{\text{máx}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

entonces las trayectorias de máxima desviación  $B_{\text{máx}}(\mathbf{p}^{\text{máx}})$  y  $B_{\text{máx}}(-\mathbf{p}^{\text{máx}})$  describen un ciclo límite  $C^{\text{máx}}$  asintóticamente y orbitalmente estable, lo cual se sigue del hecho de que la máxima desviación  $\alpha^{\text{máx}}$  es un punto fijo de la transformación puntual (3.28). El ciclo límite  $C^{\text{máx}}$  es llamado *ciclo límite máximo* y es, por consiguiente, descrito por las trayectorias de máxima desviación:

$$C^{\text{máx}} = B_{\text{máx}}(\mathbf{p}^{\text{máx}}) \cup B_{\text{máx}}(-\mathbf{p}^{\text{máx}}).$$

En la Figura 3.10 se muestra una interpretación geométrica.



**Figura 3.10.** Interpretación en el plano de fases de la construcción del ciclo límite máximo  $C^{\text{máx}}$  mediante las trayectorias de máxima desviación del sistema de ecuaciones diferenciales (3.23).

Debido a que la peor perturbación externa  $u_{\text{máx}}(t)$  permite determinar de manera simultánea las trayectorias de máxima desviación  $B_{\text{máx}}(\mathbf{p}^{\text{máx}})$  y  $B_{\text{máx}}(-\mathbf{p}^{\text{máx}})$ , la máxima desviación  $\beta^{\text{máx}}$  respecto a la coordenada  $y_2$ , se puede determinar utilizando estas trayectorias en los puntos  $q^{\text{máx}}$  y  $-q^{\text{máx}}$ ,

donde

$$\mathbf{q}^{\text{máx}} = \begin{pmatrix} -\widehat{\alpha} \\ \beta^{\text{máx}} \end{pmatrix},$$

ver la **Figura 3.10**. De la simetría que existe entre  $B_{\text{máx}}(\mathbf{p}^{\text{máx}})$  y  $B_{\text{máx}}(-\mathbf{p}^{\text{máx}})$ , se considera únicamente el caso de la trayectoria de máxima desviación  $B_{\text{máx}}(\mathbf{p}^{\text{máx}})$ . Un procedimiento análogo se sigue para determinar  $\beta^{\text{máx}}$  a partir de  $B_{\text{máx}}(-\mathbf{p}^{\text{máx}})$ .

Como la trayectoria de máxima desviación  $B_{\text{máx}}(\mathbf{p}^{\text{máx}})$  pasa por los puntos  $\mathbf{p}^{\text{máx}}$  y  $-\mathbf{p}^{\text{máx}}$ , la máxima desviación  $\beta^{\text{máx}}$  para la coordenada  $y_2$  resulta ser el valor mínimo  $y_2(\widehat{t}_1)$  de la coordenada  $y_2$  para algún instante  $\widehat{t}_1 \in (0, t_1^{\text{máx}})$ , como se muestra en la **Figura 3.10**. Por lo tanto, encontrar la máxima desviación para la coordenada  $y_2$  se reduce a encontrar el instante  $\widehat{t}_1$  que satisface la ecuación  $\dot{y}_2(\widehat{t}_1) = 0$ . Se sabe que el punto resultante es un mínimo, puesto que la trayectoria óptima es convexa. Por lo tanto, basta tomar en cuenta el segmento comprendido entre los puntos  $\mathbf{p}^{\text{máx}}$  y  $-\mathbf{p}^{\text{máx}}$ , el cual es solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, & y_1(0) &= \alpha^{\text{máx}}, \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 y_1 - 2\mu y_2 - \delta, & y_2(0) &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución se denota por

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \left( \frac{\delta}{\omega^2} + \alpha^{\text{máx}} \right) e^{-\mu t} \left( \cos(\vartheta t) + \frac{\mu}{\vartheta} \sin(\vartheta t) \right) - \frac{\delta}{\omega^2}, \\ y_2(t) &= -\frac{\omega^2}{\vartheta} \left( \frac{\delta}{\omega^2} + \alpha^{\text{máx}} \right) e^{-\mu t} \sin(\vartheta t), \end{aligned}$$

De la ecuación  $\dot{y}_2(\widehat{t}_1) = 0$  resulta

$$\widehat{t}_1 = \frac{1}{\vartheta} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\mu}{\vartheta}\right) \right).$$

Por lo tanto, la máxima desviación buscada satisface  $-\beta^{\text{máx}} = y_2(\widehat{t}_1)$ . Después de simplificar esta expresión se obtiene

$$\beta^{\text{máx}} = \frac{\delta}{\omega} \left( 1 + \coth\left(\frac{\pi\mu}{2\vartheta}\right) \right) \exp\left(-\frac{\mu}{\vartheta} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\mu}{\vartheta}\right)\right)\right). \quad (3.30 \blacktriangleleft)$$



Se sigue además que  $\widehat{\alpha} = y_1(\widehat{t}_1) > 0$ , donde

$$\widehat{\alpha} = \frac{2\mu}{\omega} \left( \frac{\delta}{\omega^2} + \alpha^{\text{máx}} \right) \exp \left( -\frac{\mu}{\vartheta} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{\mu}{\vartheta} \right) \right) \right) - \frac{\delta}{\omega^2}.$$

Por lo tanto, la máxima desviación de la coordenada  $y_2$  no se alcanza sobre el eje  $y_1 = 0$ , sino más bien sobre un punto que se puede representar en la forma  $(y_1(\widehat{t}_1), y_2(\widehat{t}_1))^\top$ , el cual se reduce a  $\mathbf{q}^{\text{máx}}$  y que se halla en el cuarto cuadrante del plano de fases. De igual manera, debido a la simetría de las soluciones de (3.23), se puede mostrar que existe un instante  $\widehat{t}_2 \in (t_1^{\text{máx}}, t_2^{\text{máx}})$  y un punto de la forma  $(y_1(\widehat{t}_2), y_2(\widehat{t}_2))^\top$  que se halla en el segundo cuadrante del plano de fases, el cual se reduce a  $-\mathbf{q}^{\text{máx}}$  sobre el cual se puede determinar el valor de la máxima desviación respecto a la coordenada  $y_2$ , como se muestra en la Figura 3.10. Se observa que los puntos  $\mathbf{q}^{\text{máx}}$  y  $-\mathbf{q}^{\text{máx}}$  pertenecen a las trayectorias de máxima desviación  $B_{\text{máx}}(\mathbf{p}^{\text{máx}})$  y  $B_{\text{máx}}(-\mathbf{p}^{\text{máx}})$ , respectivamente, las cuales se describen por:

$$y_1^{\text{máx}}(t) = \begin{cases} z_1(t), & 0 \leq t < t_1^{\text{máx}}, \\ \bar{z}_1(t), & t_1^{\text{máx}} \leq t \leq t_2^{\text{máx}}, \end{cases}$$

$$y_2^{\text{máx}}(t) = \begin{cases} z_2(t), & 0 \leq t < t_1^{\text{máx}}, \\ \bar{z}_2(t), & t_1^{\text{máx}} \leq t \leq t_2^{\text{máx}}, \end{cases}$$

donde

$$z_1(t) = \left( \frac{\delta}{\omega^2} + \alpha^{\text{máx}} \right) e^{-\mu t} \left( \cos(\vartheta t) + \frac{\mu}{\vartheta} \sin(\vartheta t) \right) - \frac{\delta}{\omega^2},$$

$$\bar{z}_1(t) = - \left( \frac{\delta}{\omega^2} + \alpha^{\text{máx}} \right) \cdot e^{-\mu(t-t_1^{\text{máx}})} \left( \cos(\vartheta(t-t_1^{\text{máx}})) + \frac{\mu}{\vartheta} \sin(\vartheta(t-t_1^{\text{máx}})) \right) + \frac{\delta}{\omega^2},$$

$$z_2(t) = -\frac{\omega^2}{\vartheta} \left( \frac{\delta}{\omega^2} + \alpha^{\text{máx}} \right) e^{-\mu t} \sin(\vartheta t),$$

$$\bar{z}_2(t) = \frac{\omega^2}{\vartheta} \left( \frac{\delta}{\omega^2} + \alpha^{\text{máx}} \right) e^{-\mu(t-t_1^{\text{máx}})} \sin(\vartheta(t-t_1^{\text{máx}})).$$

Dado que las trayectorias  $B_{\text{máx}}(\mathbf{p}^{\text{máx}})$  y  $B_{\text{máx}}(-\mathbf{p}^{\text{máx}})$  se determinan por la peor perturbación externa  $u_{\text{máx}}(t)$ , se sigue que  $(y_1^{\text{máx}}(t), y_1^{\text{máx}}(t))^\top$  definida en  $(0, t_1^{\text{máx}})$  coincide con  $(-y_1^{\text{máx}}(t - t_1^{\text{máx}}), -y_2^{\text{máx}}(t - t_1^{\text{máx}}))^\top$  en el intervalo  $(t_1^{\text{máx}}, t_2^{\text{máx}})$ , por lo cual, haciendo un cambio de variable en esta última función, de tal manera que el cambio de variable permita trasladar isomórficamente el intervalo  $(t_1^{\text{máx}}, t_2^{\text{máx}})$  en el intervalo  $(0, t_1^{\text{máx}})$ , el ciclo límite máximo

$$C^{\text{máx}} = \left\{ \mathbf{h}(t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq t_2^{\text{máx}} \right\}, \quad (3.31 \blacktriangleleft)$$



se representa como la imagen de la función vectorial  $\mathbf{h}: [0, t_1^{\text{máx}}] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\mathbf{h}(t) = \begin{pmatrix} y_1^{\text{máx}}(t) \\ y_2^{\text{máx}}(t) \end{pmatrix},$$

con

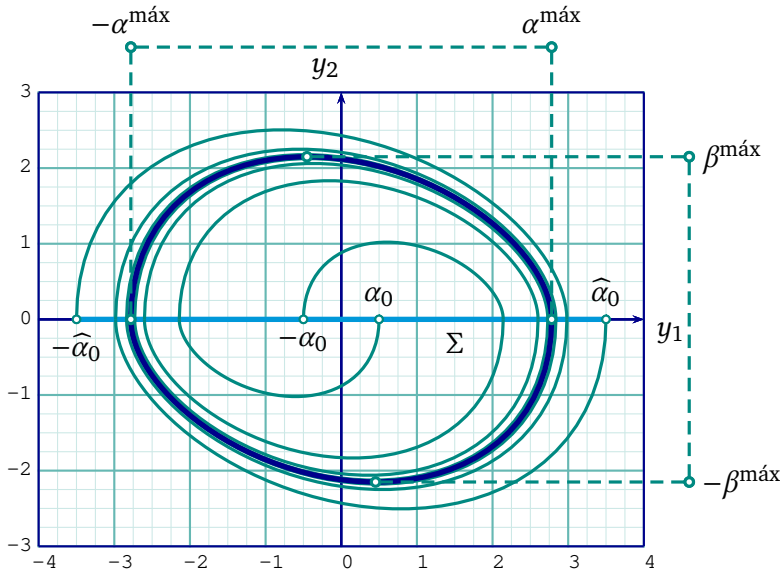
$$\begin{aligned} y_1^{\text{máx}}(t) &= \pm \left( \frac{\delta}{\omega^2} + \alpha^{\text{máx}} \right) e^{-\mu t} \left( \cos(\vartheta t) + \frac{\mu}{\vartheta} \sin(\vartheta t) \right) - \frac{\delta}{\omega^2}, \\ y_2^{\text{máx}}(t) &= \mp \frac{\omega^2}{\vartheta} \left( \frac{\delta}{\omega^2} + \alpha^{\text{máx}} \right) e^{-\mu t} \sin(\vartheta t), \quad 0 \leq t < t_1^{\text{máx}}. \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo se muestran de forma numérica los resultados expuestos.

 **Ejemplo 3.1.** Se consideran los parámetros  $\omega = 0.8$ ,  $\mu = 0.3$  y  $\delta = 1$  para el sistema de ecuaciones diferenciales (3.23). Para estos valores se obtiene  $\vartheta \approx 0.7416$ , mientras que las máximas desviaciones  $\alpha^{\text{máx}}$  y  $\beta^{\text{máx}}$  se aproximan por  $\alpha^{\text{máx}} \approx 2.78138$  y  $\beta^{\text{máx}} \approx 2.15050$ . En la Figura 3.11 se muestran soluciones de este sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales  $\pm \mathbf{p}_0 = (\pm \alpha_0, 0)^\top$  y  $\pm \widehat{\mathbf{p}}_0 = (\pm \widehat{\alpha}_0, 0)^\top$ , donde  $\alpha_0 = 0.5$  y  $\widehat{\alpha}_0 = 3.5$ . Estas soluciones convergen al único ciclo límite  $C^{\text{máx}}$  asintóticamente y orbitalmente estable. 

Debido a las propiedades sobre los conjuntos de alcanzabilidad  $F(\mathbf{p}_k)$  del sistema de ecuaciones diferenciales (3.23), se sigue que si se elige como condición inicial al vector  $\mathbf{p}_0 = (\alpha_0, 0)^\top$ , donde  $\alpha_0 \in (0, \alpha^{\text{máx}})$ , entonces cada

conjunto de alcanzabilidad  $F(\mathbf{p}_k)$  es un conjunto acotado y, por consiguiente,  $\bigcup_{k=1}^{\infty} F(\mathbf{p}_k)$  lo es también. Además, la sucesión de conjuntos  $\{F(\mathbf{p}_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  permiten caracterizar la siguiente propiedad geométrica que se obtiene una vez más como consecuencia de la relación de recurrencia (3.28): si con  $Q$  se denota el conjunto acotado que tiene por frontera el ciclo límite máximo  $C^{\text{máx}}$ , entonces  $\bigcup_{k=1}^{\infty} F(\mathbf{p}_k) \subset Q$ . El conjunto  $Q$  considerado previamente posee la siguiente propiedad importante para la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.22): *este describe el conjunto de alcanzabilidad*, es decir, se satisface  $\partial Q = C^{\text{máx}}$ . Se muestra a continuación que esto es así.



**Figura 3.11.** Representación gráfica de las soluciones del Ejemplo 3.1.

La importancia e interpretación geométrica de los puntos  $\pm \widehat{\alpha}^{\text{máx}}$  definidos en (2.33), así como la trayectoria que describe la función vectorial  $\widehat{h}^{\text{máx}}: [\theta_0, \theta_4] \rightarrow \mathbb{R}^2$  que se describe en el Teorema 2.1 de la Página 76, es decir, la función

$$\widehat{h}(\theta) = Ch(\theta), \quad \theta \in [m + \frac{1}{2}\pi, m + \frac{5}{2}\pi], \quad (3.32 \blacktriangleleft)$$

donde  $C$  es la matriz que se define en la expresión (2.11) de la [Página 50](#), y la función  $h: [m + \frac{1}{2}\pi, m + \frac{5}{2}\pi] \rightarrow Q(T)$  es definida en la expresión (2.29) de la [Página 73](#) con  $n = \llbracket T \rrbracket$ , entonces se obtiene el siguiente resultado.

**Proposición 3.1.** Bajo la composición de la función (3.32) y las aplicaciones  $m + \frac{3}{2}\pi - \vartheta t \mapsto \theta$  y  $m + \frac{5}{2}\pi - \vartheta t \mapsto \theta$  cuando  $t \in [0, t_1^{\text{máx}})$ , se obtiene una trayectoria cerrada que describe el ciclo límite máximo  $C^{\text{máx}}$  de la familia de ecuaciones diferenciales (3.22) bajo la acción de la perturbación externa  $u_{\text{máx}}(t) = \delta \text{Sign}(y_2(t))$ , y cuyas ecuaciones paramétricas son:

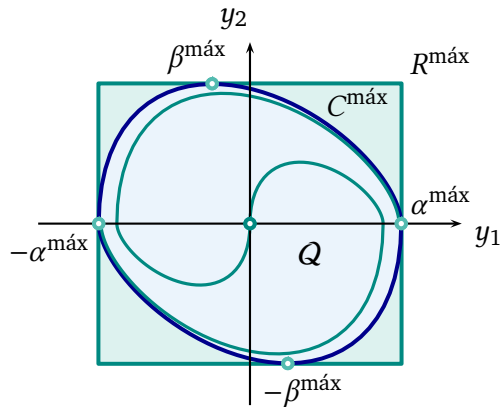
$$y_1^{\text{máx}}(t) = \pm \left( \frac{\delta}{\omega^2} + \alpha^{\text{máx}} \right) e^{-\mu t} \left( \cos(\vartheta t) + \frac{\mu}{\vartheta} \sin(\vartheta t) \right) - \frac{\delta}{\omega^2},$$

$$y_2^{\text{máx}}(t) = \mp \frac{\omega^2}{\vartheta} \left( \frac{\delta}{\omega^2} + \alpha^{\text{máx}} \right) e^{-\mu t} \sin(\vartheta t), \quad 0 \leq t < t_1^{\text{máx}}.$$


De la [Proposición 3.1](#) se concluye que la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $Q$  de (3.22), se obtiene como solución de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.22) cuando se considera  $u_{\text{máx}}(t) = \delta \text{Sign}(y_2(t))$  y las condiciones iniciales  $y_1(0) = \alpha^{\text{máx}}$  y  $y_2(0) = 0$ , es decir, se cumple:  $\partial Q = C^{\text{máx}}$ . En particular, de lo expuesto respecto a la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.22) se obtiene lo siguiente: *si se elige una perturbación arbitraria  $\widehat{u}(t) \in \mathcal{U}_\delta$  y se eligen condiciones iniciales  $\mathbf{p}_0 = (\pm\alpha_0, 0)^\top$ , o bien  $\mathbf{p}_0 = (0, \pm\beta_0)^\top$ , donde  $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha^{\text{máx}}$  y  $0 \leq \beta_0 \leq \beta^{\text{máx}}$ , entonces la solución, la cual se denota por  $\mathbf{y}_{\widehat{u}}(t) = (y_1(t), y_2(t))^\top$ , satisface la inclusión  $\mathbf{y}_{\widehat{u}}(t) \in Q$  para todo  $t \geq 0$ . Esto se resume de la siguiente manera.*

**Teorema 3.1.** Si en el sistema de ecuaciones diferenciales (3.23) se cumple la desigualdad  $0 < \mu < \omega$  y las condiciones iniciales se eligen como  $\mathbf{p}_0 = (\pm\alpha_0, 0)^\top$ , o bien como  $\mathbf{p}_0 = (0, \pm\beta_0)^\top$ , donde  $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha^{\text{máx}}$  y  $0 \leq \beta_0 \leq \beta^{\text{máx}}$ , entonces el ciclo límite máximo  $C^{\text{máx}}$  es contenido en  $R^{\text{máx}} = [-\alpha^{\text{máx}}, \alpha^{\text{máx}}] \times [-\beta^{\text{máx}}, \beta^{\text{máx}}]$ .

El [Teorema 3.1](#), que se ilustra en la [Figura 3.12](#), permite extender los resultados numéricos que se obtuvieron en los [Ejemplos 2.1 a 2.4](#) y el [Ejemplo 3.1](#).




**Figura 3.12.** Interpretación geométrica del ciclo límite máximo  $C^{\text{máx}}$  y el conjunto de alcanzabilidad  $Q$  de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.22).

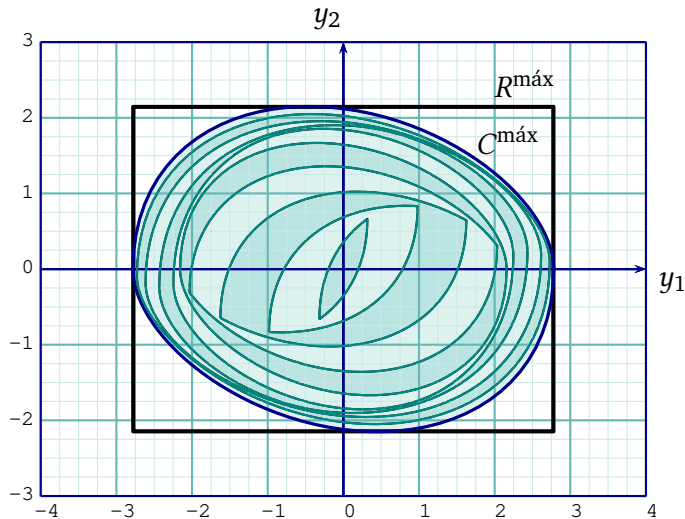
 **Ejemplo 3.2.** Se consideran una vez más los siguientes valores de los parámetros  $\omega = 0.8$ ,  $\mu = 0.3$  y  $\delta = 1$  para el sistema de ecuaciones diferenciales (3.12). Si se superponen el ciclo límite máximo  $C^{\text{máx}}$  que se obtuvo en el [Ejemplo 3.1](#) y, de manera simultánea, los conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T_k)$  para los instantes

$$T_k = \frac{k}{5} \cdot \frac{\pi}{\vartheta}, \quad T_{k+5} = \left(1 + \frac{k}{5}\right) \cdot \frac{\pi}{\vartheta}, \quad k = 1, 2, \dots, 5,$$

tal como se han obtenido en los [Ejemplos 2.1](#) y [2.2](#) del [Capítulo 2](#), se obtiene el esquema que se muestra en la [Figura 3.13](#).

Se observa que la sucesión de conjuntos  $Q(T_1), Q(T_2), \dots, Q(T_{10})$  es una sucesión monótona creciente de conjuntos que son interiores al conjunto de alcanzabilidad  $Q$ . Mas aún, se observa que  $Q(T_{10}) \subset Q$ .

En la [Figura 3.13](#) se muestra también la región rectangular  $R^{\text{máx}}$  que se enunció en el [Teorema 3.1](#). 



**Figura 3.13.** Conjunto de alcanzabilidad  $Q$  y conjuntos de alcanzabilidad  $Q(T_k)$  del Ejemplo 3.2.

### 3.4.1. Criterio de estabilidad robusta

De las expresiones (3.29) y (3.30), se observa que los valores que definen las máximas desviaciones  $\alpha^{\text{máx}}$  y  $\beta^{\text{máx}}$  dependen linealmente del parámetro  $\delta > 0$ , el cual a su vez caracteriza al conjunto de perturbaciones admisibles  $\mathcal{U}_\delta$  para el sistema de ecuaciones diferenciales (3.22). Por consiguiente, es claro que si se consideran valores diferentes sobre el valor absoluto de las perturbaciones externas admisibles, entonces el ciclo límite máximo tiene una variación proporcional a la variación de los parámetros  $\alpha^{\text{máx}}$  y  $\beta^{\text{máx}}$ . Esta observación permite ajustar las amplitudes del ciclo límite máximo  $C^{\text{máx}}$ , ya que estas se pueden hacer arbitrariamente grandes, o suficientemente pequeñas, según existan recursos disponibles en el conjunto  $\mathcal{U}_\delta$ .

La observación anterior da lugar al siguiente criterio de estabilidad robusta que se emplea para el sistema de ecuaciones diferenciales (3.22), el cual depende de un concepto de estabilidad bajo perturbaciones de acción constante que inicialmente fue introducido entre los años 1941 a 1944 por los

matemáticos: Georgiy Nikolaevich Duboshin (1904–1986) e Ioèl' Gil'evich Malkin (1907–1958), ver [Elsoltz \(1969\)](#). En los últimos años este concepto ha sido utilizado en diferentes contextos y aplicaciones, ver [Zhermolenko \(1980, 2007\)](#), [Aleksandrov et al. \(2007, 2010, 2014, 2021\)](#), [Zhermolenko y Temoltzi-Ávila \(2021\)](#) y [Temoltzi-Ávila \(2022a,b,c\)](#).

Con este objetivo, se considera la siguiente norma en el conjunto  $\mathcal{U}_\delta$ :

$$\|u\|_{\mathcal{U}_\delta} = \sup_{t \in [0, \infty)} |u(t)|.$$

Es evidente que para cada  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  se cumple  $\|u\|_{\mathcal{U}_\delta} \leq \delta$ .

Se supone también que cada condición inicial  $\mathbf{y}_u(0) = \mathbf{p}_0$  de los elementos de la familia de ecuaciones diferenciales (3.22), se elige de la forma  $\mathbf{p}_0 = (\pm\alpha_0, 0)^\top$ , o bien, de la forma  $\mathbf{p}_0 = (0, \pm\beta_0)^\top$ , donde  $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha^{\text{máx}}$  y  $0 \leq \beta_0 \leq \beta^{\text{máx}}$ . La razón de este supuesto se debe principalmente a que las soluciones de cada uno de los elementos de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.22) son oscilatorias y, por consiguiente, si se elige una condición inicial que no esté sobre alguno de los ejes de coordenadas, siempre es posible determinar la primera intersección con algún eje de coordenadas, y considerar este nuevo punto como una condición inicial para la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.22).

El conjunto de soluciones de (3.22) asociadas a una perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  que satisfacen las condiciones iniciales  $\mathbf{y}_u(0) = \mathbf{p}_0$ , donde  $\mathbf{p}_0$  satisface las condiciones anteriores, se denota por  $\mathcal{Y}$ . Se observa que el conjunto  $\mathcal{Y}$  es no vacío, pues la solución no perturbada  $\bar{\mathbf{y}}_{\bar{u}}(t) \equiv 0$ , asociada a la perturbación externa nula  $\bar{u}(t) \equiv 0$  en  $\mathcal{U}_\delta$ , pertenece a dicho conjunto.

Se define la siguiente norma en el conjunto  $\mathcal{Y}$ :

$$\|\mathbf{y}_u\|_{\mathcal{Y}} = \text{máx} \left\{ \sup_{t \in [0, \infty)} |y_1(t)|, \sup_{t \in [0, \infty)} |y_2(t)| \right\},$$

y se considera la siguiente definición:

**Definición 3.2.** La solución trivial  $\bar{\mathbf{y}}_u(t) \equiv 0$  de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.22) es *robustamente estable* con respecto a condiciones iniciales  $\mathbf{y}_u(0) = \mathbf{p}_0$  y perturbaciones externas  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , si para todo  $\epsilon > 0$  existen  $\delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0$  y  $\delta_2 = \delta_2(\epsilon) > 0$  tal que la siguiente condición es satisfecha: si  $\|u\|_{\mathcal{U}_\delta} \leq \delta_1$  y  $\|\mathbf{p}_0\|_\infty \leq \delta_2$ , entonces cualquier otra solución de (3.22) satisface la desigualdad  $\|\mathbf{y}_u\|_{\mathcal{Y}} \leq \epsilon$ .

Se observa que las expresiones (3.29) y (3.30) se pueden escribir de forma equivalente a

$$\alpha^{\text{máx}} = \frac{\delta}{\omega^2} \cdot \frac{1+A}{1-A}, \quad A = \exp\left(-\frac{\pi\mu}{\vartheta}\right),$$

$$\beta^{\text{máx}} = \frac{\delta}{\omega} \cdot \frac{2B}{1-A}, \quad B = \exp\left(-\frac{\mu}{\vartheta} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\mu}{\vartheta}\right)\right).$$

Así, el criterio de estabilidad robusta de la solución trivial  $\bar{\mathbf{y}}_u(t) \equiv 0$  del sistema de ecuaciones diferenciales (3.22) para perturbaciones externas es el siguiente: *para todo  $\epsilon > 0$  dado, el estimado  $\|\mathbf{y}_u\|_{\mathcal{Y}} \leq \epsilon$  para toda perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , se obtiene de la constante:*

$$\delta_1 = \frac{\epsilon}{\max\left\{\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{1+A}{1-A}, \frac{1}{\omega} \cdot \frac{2B}{1-A}\right\}}, \quad (3.33 \blacktriangleleft)$$

*siempre que la condición inicial del sistema de ecuaciones diferenciales (3.22) satisfaga la desigualdad*

$$\|\mathbf{y}(0)\|_\infty \leq \delta_2 = \delta_1 \min\left\{\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{1+A}{1-A}, \frac{1}{\omega} \cdot \frac{2B}{1-A}\right\}. \quad (3.34 \blacktriangleleft)$$

La representación (3.33) permite medir las amplitudes de oscilación del ciclo límite máximo  $C^{\text{máx}}$  del elemento (3.23) de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.22) que es asociado a la peor perturbación externa  $u_{\text{máx}}(t)$ , debido a que en el lado derecho de esta expresión figuran únicamente parámetros del sistema de ecuaciones diferenciales (3.23). Esta propiedad permite establecer el siguiente *criterio de calidad robusta* que caracteriza las máximas desviaciones de la familia de sistemas de ecuaciones



diferenciales (3.22) para todo  $t \geq 0$ , cuyas condiciones iniciales satisfacen la desigualdad (3.34):


$$\chi = \sup_{0 < \epsilon < \infty} \frac{\epsilon}{\delta_1(\epsilon)}.$$

Se obtiene, por lo tanto, la siguiente condición:

**Teorema 3.2.** Si dado  $\epsilon > 0$  se eligen los parámetros  $\delta_1$  y  $\delta_2$  de acuerdo a las expresiones (3.33) y (3.34), entonces para cada elección de la perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_{\delta_1}$ , la correspondiente solución  $\mathbf{y}_u(t)$  con condiciones iniciales  $\mathbf{p}_0 = (\pm\alpha_0, 0)^\top$ , o bien,  $\mathbf{p}_0 = (0, \pm\beta_0)^\top$ , donde  $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha^{\max}$  y  $0 \leq \beta_0 \leq \beta^{\max}$ , satisface el estimado

$$\|\mathbf{y}_u\|_{\mathcal{Y}} \leq \epsilon.$$

En el siguiente ejemplo se muestra de forma numérica una aplicación de esta situación.

 **Ejemplo 3.3.** En la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.22) se eligen los parámetros  $\omega = 0.8$  y  $\mu = 0.3$  que se consideraron en el **Ejemplo 3.1**. Si para cierto  $\epsilon > 0$  se desea que el conjunto de soluciones de esta familia de sistemas de ecuaciones diferenciales  $\mathbf{y}_u(t) = (y_1(t), y_2(t))^\top$  asociadas a cada perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  no excedan la cota  $\|\mathbf{y}_u\|_{\mathcal{Y}} \leq \epsilon$  para todo  $t \geq 0$ , se sigue de la relación (3.33) que basta elegir el parámetro  $\delta_1 > 0$  de tal manera que

$$\delta_1 = \frac{\epsilon}{\max \left\{ \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{1+A}{1-A}, \frac{1}{\omega} \cdot \frac{2B}{1-A} \right\}}.$$

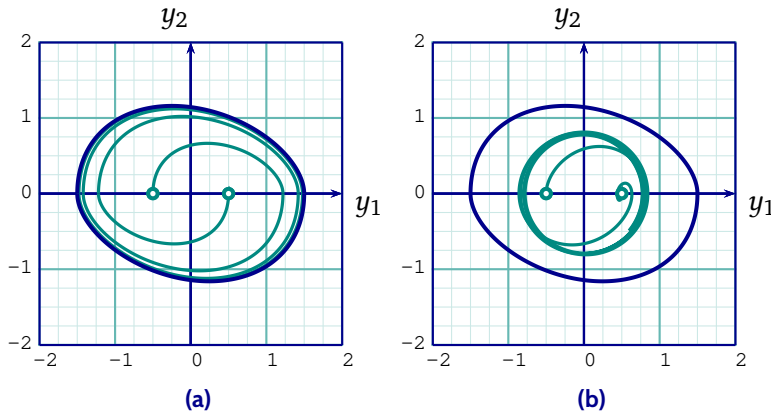
Por ejemplo, si se desea que las soluciones no excedan la cota  $\epsilon = 1.5$ , entonces es suficiente con tomar  $\delta_1 \approx 0.539301$ . Si se admite este valor como límite de los recursos del conjunto de perturbaciones externas  $\mathcal{U}_\delta$ , es decir, si se consideran perturbaciones externas  $u(t) \in \mathcal{U}_{\delta_1}$ , entonces se obtiene el ciclo límite máximo  $C^{\max}$  que representa la frontera del conjunto  $\mathcal{Q}$  asociado a la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.22).

Se consideran ahora dos trayectorias solución  $\mathbf{y}_{u_{\max}}(t)$  y  $\mathbf{y}_{\hat{u}}(t)$  de dos elementos de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.22) que co-

mienzan en los puntos  $\pm \mathbf{p}_0 = (\pm \alpha_0, 0)^\top$ , donde  $\alpha_0 = 0.5$ , y que están asociadas, la primera a  $u_{\text{máx}}(t) = \delta_1 \text{Sign}(y_2(t))$ , y la segunda a  $\widehat{u}(t) = \delta_1 \sin(t)$ . Se observa en las Figuras 3.14a y 3.14b que las correspondientes soluciones se hayan contenidas en el conjunto de alcanzabilidad  $\mathcal{Q}$ , cuya frontera es descrita por el ciclo límite máximo  $C^{\text{máx}}$ . Es claro que en ambas situaciones se cumple el estimado

$$\|\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t)\|_{\mathcal{Y}} \leq \epsilon \quad \text{y} \quad \|\widehat{\mathbf{y}}_{\widehat{u}}(t)\|_{\mathcal{Y}} \leq \epsilon.$$

Otros casos similares se pueden obtener por considerar otras perturbaciones externas admisibles y otros valores para los parámetros. ■ ■ ■ ■



**Figura 3.14.** Representación gráfica de la solución del Ejemplo 3.3 bajo el efecto de la perturbación: (a)  $u_{\text{máx}}(t) = \delta_1 \text{Sign}(y_2(t))$  y (b)  $\widehat{u}(t) = \delta_1 \sin(t)$ .

### 3.5. Una aplicación del problema de máxima desviación

En la sección anterior se ha presentado el criterio de estabilidad robusta como una aplicación del problema de máxima desviación para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en el plano, se ha construido un ciclo límite máximo  $C^{\text{máx}}$  que es asintóticamente y orbitalmente estable y que describe la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $\mathcal{Q}$  para tales sistemas. La

principal cualidad en la construcción de este ciclo límite máximo es la posibilidad de determinar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales, así como las intersecciones de esta con las superficies de discontinuidad. Cuando esta característica no está presente, en general, no es posible determinar de forma explícita este ciclo límite máximo. En este apartado se presenta, como aplicación particular de esta situación, el problema de determinar el conjunto de alcanzabilidad de la ecuación diferencial que modela la dinámica del móvil que se presentó en el [Ejemplo 1.1](#) de la [Página 4](#). Los resultados que se presentan son una extensión de los que se obtuvieron en [Temoltzi-Ávila y Ávila-Pozos \(2020\)](#).

El sistema dinámico que se considera es descrito por el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales de orden dos con coeficientes no constantes y con una perturbación externa

$$\ddot{y} + 2\widehat{\mu}(y)\dot{y} + \widehat{\omega}(y)y = u(t),$$

donde los coeficientes  $\widehat{\mu}(y)$  y  $\widehat{\omega}(y)$  denotan las funciones escalón

$$\widehat{\mu}(y) = \begin{cases} \mu, & y \geq -L, \\ \mu_p, & y < -L, \end{cases} \quad \widehat{\omega}(y) = \begin{cases} \omega^2, & y \geq -L, \\ \omega_p^2, & y < -L, \end{cases}$$

donde los parámetros satisfacen las desigualdades  $0 < \mu < \omega$  y  $0 < \mu_p < \omega_p$ . Como caso particular, se supone que la perturbación externa  $u(t)$  se elige de tal manera que esta pertenece al conjunto de funciones admisibles

$$\mathcal{U}_\delta = \{u(t) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}) \mid |u(t)| \leq L\omega^2\}.$$

La incertidumbre que existe sobre la elección de la perturbación externa, permite considerar la ecuación diferencial que modela la dinámica del móvil como una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Bajo el cambio de variable  $y_1 = y$  y  $y_2 = \dot{y}$ , la familia de ecuaciones diferenciales propuesta se puede representar de forma equivalente a la siguiente familia de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\widehat{\omega}(y_1)y_1 - 2\widehat{\mu}(y_1)y_2 + u(t), \end{aligned} \tag{3.35} \blacktriangleleft$$

en el cual, se supone que el vector de condiciones iniciales, se describe por

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Sigma_1,$$

donde  $\alpha_0 > 0$ .

Por seguir un análisis análogo al del apartado anterior sobre el conjunto de alcanzabilidad con vértice  $\mathbf{p}_0$ , se muestra que la peor perturbación externa que se obtiene para esta familia de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales resulta ser la función continua a trozos

$$u_{\text{máx}}(t) = L\omega^2 \text{Sign}(y_2(t)) = \begin{cases} L\omega^2, & y_2(t) > 0, \\ -L\omega^2, & y_2(t) \leq 0. \end{cases}$$

Se ha empleado el valor  $u_{\text{máx}}(t_2) = 0$  para el estado  $y(t_2) = 0$ , lo cual muestra que esta función corresponde con la selección de norma mínima que se ha definido en la [Sección 1.3](#).

Se considera un análisis de la ecuación diferencial no lineal

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\widehat{\omega}(y_1)y_1 - 2\widehat{\mu}(y_1)y_2 + L\omega^2 \text{Sign}(y_2), \end{aligned} \tag{3.36} \blacktriangleleft$$

De acuerdo con la representación de las funciones  $\widehat{\mu}(y_1)$  y  $\widehat{\omega}(y_1)$ , y tomando en consideración la definición de la perturbación externa  $u_{\text{máx}}(t)$ , se sigue que el espacio fase  $\Omega = \mathbb{R}^2$  de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) se divide en cuatro regiones

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid -L < y_1 \text{ y } 0 < y_2\}, & \Omega_2 &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 < -L \text{ y } 0 < y_2\}, \\ \Omega_3 &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 < -L \text{ y } y_2 < 0\}, & \Omega_4 &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid -L < y_1 \text{ y } y_2 < 0\}, \end{aligned}$$

en cada una de las cuales el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales (3.36) resulta ser un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Se observa además que existen dos superficies de discontinuidad,

$$\Sigma_1 = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 = 0\}, \quad \Sigma_2 = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 = -L\},$$

como se muestra en la [Figura 3.15](#). Por lo tanto, es necesario analizar la dinámica de este sistema considerando su solución en cada una de esas regiones.

De las condiciones iniciales  $\mathbf{p}_0 = (\alpha_0, 0)^\top$  y el hecho de que los coeficientes del sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) cumplen  $\widehat{\omega}(y_1(0)) = \omega^2$  y  $\widehat{\mu}(y_1(0)) = \mu$ , se obtiene de la segunda ecuación diferencial de (3.35) que

$$\dot{y}_2(0) = -\omega^2 y_1(0) + 2\mu y_2(0) + u(0) = -\omega^2 \alpha_0 - L\omega^2 < 0,$$

por lo tanto, existe  $t_1 > 0$  tal que  $u_{\text{máx}}(t) = -L\omega^2$  para todo  $t \in (0, t_1)$ . Luego, en este intervalo, se obtiene el siguiente problema de Cauchy que se halla definido sobre  $\Omega_4$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, & y_1(0) &= \alpha_0, \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 y_1 - 2\mu y_2 - L\omega^2, & y_2(0) &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución  $\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t) = (y_1(t), y_2(t))^\top$  se expresa por

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (L + \alpha_0) e^{-\mu t} \left( \cos \vartheta t + \frac{\mu}{\vartheta} \sin \vartheta t \right) - L, \\ y_2(t) &= -\frac{\omega^2}{\vartheta} (L + \alpha_0) e^{-\mu t} \sin \vartheta t. \end{aligned} \tag{3.37} \blacktriangleleft$$

donde

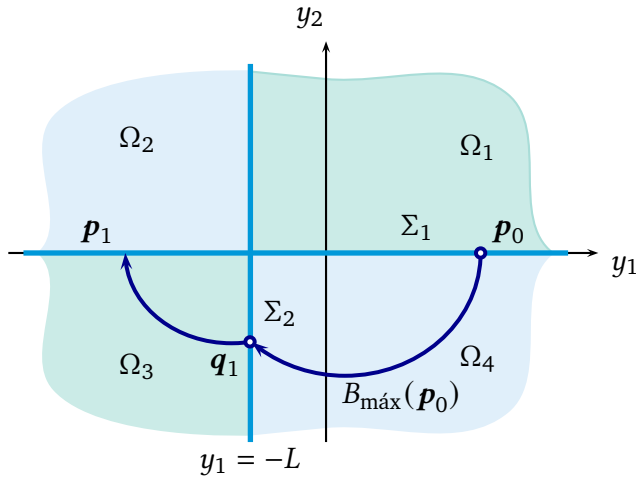
$$\vartheta = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}.$$

Se observa que los valores de los parámetros del sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) implican la validez de la ecuación  $y_1(t_1) = -L$  para algún  $t_1 > 0$ . La primera función definida en (3.37) permite obtener

$$t_1 = \frac{1}{\vartheta} \left( \frac{\pi}{2} + \arctan \left( \frac{\mu}{\vartheta} \right) \right).$$

Después de sustituir este valor en las funciones definidas en (3.37) se obtiene el punto  $\mathbf{q}_1 = (y_1(t_1), y_2(t_1))^\top$  que pertenece a la superficie de discontinuidad  $\Sigma_2$  entre las regiones  $\Omega_3$  y  $\Omega_4$ , donde

$$y_1(t_1) = -L, \quad y_2(t_1) = -R_0,$$



**Figura 3.15.** Soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (3.35).

con  $R_0 = R(\alpha_0)$  y

$$R(\alpha) = \omega (L + \alpha) \exp\left(-\frac{\mu}{g} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\mu}{g}\right)\right)\right),$$

tal como se muestra en la [Figura 3.15](#). Por lo tanto,

$$q_1 = \begin{pmatrix} -L \\ -R_0 \end{pmatrix} \in \Sigma_2.$$

El punto  $q_1$  define el punto de transición de la solución entre las regiones  $\Omega_4$  y  $\Omega_3$ . Se observa además que la solución interseca de forma transversal la superficie de discontinuidad  $\Sigma_2$  y, por lo tanto, existe  $t_2 > t_1$  tal que la peor perturbación externa aún toma el valor  $u_{\text{máx}}(t) = -L\omega^2$  para todo  $t \in (t_1, t_2)$ , debido a que  $y_2(t) < 0$  para esos instantes, mientras que los coeficientes del sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) toman los valores  $\widehat{\omega}(y_1(t)) = \omega_p^2$  y  $\widehat{\mu}(y_1(t)) = \mu_p$  para todo  $t \in (t_1, t_2)$ . En consecuencia, la solución de (3.36) sobre  $\Omega_3$  coincide con la solución  $\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$  del siguiente

problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, & y_1(t_1) &= -L, \\ \dot{y}_2 &= -\omega_p^2 y_1 - 2\mu_p y_2 - L\omega^2, & y_2(t_1) &= -R_0, \end{aligned}$$

la cual se describe por

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -e^{-\mu_p(t-t_1)} \cdot \\ &\left( L\omega_- \cos \vartheta_p(t-t_1) + \left( \frac{R_0}{\vartheta_p} + \frac{\mu_p}{\vartheta_p} L\omega_- \right) \sin \vartheta_p(t-t_1) \right) - \frac{L\omega^2}{\omega_p^2}, \\ y_2(t) &= -e^{-\mu_p(t-t_1)} \cdot \\ &\left( R_0 \cos \vartheta_p(t-t_1) - \left( \frac{R_0\mu_p}{\vartheta_p} + \frac{\omega_p^2}{\vartheta_p} L\omega_- \right) \sin \vartheta_p(t-t_1) \right), \end{aligned} \quad (3.38 \blacktriangleleft)$$

donde

$$\vartheta_p = \sqrt{\omega_p^2 - \mu_p^2} \quad \text{y} \quad \omega_- = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}.$$

La representación de la solución (3.38) muestra que es posible determinar de forma explícita el instante  $t_2 > t_1$  tal que  $y_2(t_2) = 0$ , el cual es dado por

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\vartheta_p} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{\mu_p}{\vartheta_p} + \frac{\omega_p^2}{R_0\vartheta_p} L\omega_- \right) \right).$$

Esto muestra que la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) bajo la acción de la peor perturbación externa  $u_{\text{máx}}(t)$ , y bajo condiciones iniciales de la forma  $\mathbf{p}_0 = (\alpha_0, 0)^\top$ , describe un semiciclo inferior de oscilación definido en  $[0, t_2]$ , el cual cruza a  $\Sigma_1$  en un punto  $\mathbf{p}_1 = (-\alpha_1, 0)^\top$ , donde  $\alpha_1 > 0$  se determina de la ecuación  $y_1(t_2) = -\alpha_1$ , la cual permite definir una función secuencial  $\alpha_1 = F(R_0)$ , donde:

$$\alpha_1 = \frac{R_0\vartheta_p}{\omega_p^2} e^{-\mu_p(t_2-t_1)} \sqrt{1 + \left( \frac{\mu_p}{\vartheta_p} + \frac{L\omega_p^2}{R_0\vartheta_p} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \right) \right)^2} + \frac{L\omega^2}{\omega_p^2}. \quad (3.39 \blacktriangleleft)$$

Así, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) define una transformación puntual de la superficie de discontinuidad  $\Sigma_1$  en sí misma tal que para todo  $\mathbf{p}_0 = (\alpha_0, 0)^\top \in \Sigma_1$  se asocia un punto  $\mathbf{p}_1 = (-\alpha_1, 0)^\top \in \Sigma_1$  mediante una transformación no lineal de  $\Sigma_1$  en  $\Sigma_1$ .

La definición de la primera máxima desviación y la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) definen una trayectoria de máxima desviación desde el punto  $\mathbf{p}_0 = (\alpha_0, 0)^\top \in \Sigma_1$  para la familia de ecuaciones diferenciales (3.35) en  $\Omega_3 \cup \Omega_4$ , la cual se describe por

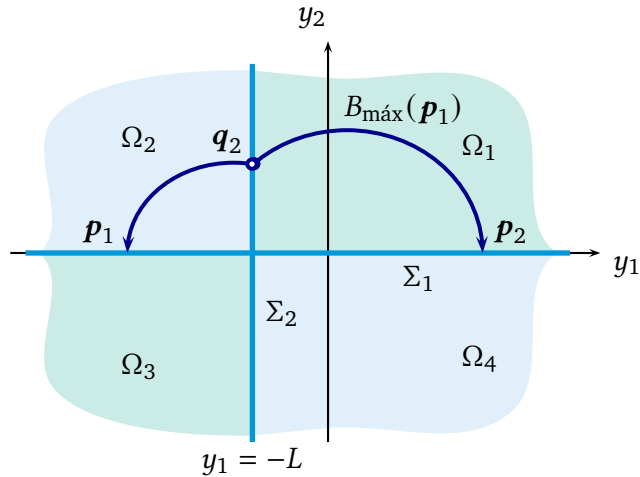
$$B_{\text{máx}}(\mathbf{p}_0) = \{\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (0, t_2)\},$$

como se muestra en la Figura 3.15.

Se analiza ahora la construcción del semiciclo superior de oscilación sobre los conjuntos  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , por suponer válido el esquema que se muestra en la Figura 3.16. Bajo este esquema, se considera el problema de determinar un parámetro  $Q_0 > 0$  con la propiedad de que la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) describa dos arcos  $\mathbf{p}_1\mathbf{q}_2$  y  $\mathbf{q}_2\mathbf{p}_2$  que conformen el semiciclo superior de oscilación. Al suponer que  $\mathbf{q}_2 = (-L, Q_0)^\top$  pertenece a la intersección de la trayectoria solución y la superficie de discontinuidad  $\Sigma_2$ . En esta tarea, el punto  $\mathbf{q}_2$  describe la condición inicial del sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) mientras que  $\mathbf{p}_2 = (\alpha_2, 0)^\top$  es un punto arbitrario que pertenece a la superficie de discontinuidad  $\Sigma_1$ . Por lo tanto, si el supuesto anterior es válido, debe existir  $t_3 > t_2$  tal que  $\mathbf{y}(t_3) = \mathbf{q}_2$ , y ya que  $Q_0 > 0$ , se sigue que  $u_{\text{máx}}(t) = L\omega^2$  para todo  $t \in (t_3 - t_2, t_4)$ , donde  $t_4 > t_3$  es el instante en el cual se satisface la relación  $\mathbf{y}(t_4) = \mathbf{p}_2$ .

Se considera primero la construcción del arco de solución  $\mathbf{p}_1\mathbf{q}_2$  por suponer que  $\mathbf{z}_{u_{\text{máx}}}(t) = \mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t_3 - t)$  donde  $t \in (t_3 - t_2, t_3)$ . En estas condiciones, la parametrización  $\mathbf{z}_{u_{\text{máx}}}(t) = (z_1(t), z_2(t))^\top$  describe un arco  $\mathbf{p}_1\mathbf{q}_2$  que se recorre en tiempo inverso, es decir, de tal manera que el recorrido se inicia en el punto  $\mathbf{q}_2$  y se termina en el punto  $\mathbf{p}_1$  sobre la región  $\Omega_2$ . Por consiguiente, bajo este cambio de variable, los coeficientes del sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) toman los valores  $\widehat{\omega}(z_1(t)) = \omega_p^2$  y  $\widehat{\mu}(z_1(t)) = \mu_p$  para todo  $t \in (t_3 - t_2, t_3)$ , y en consecuencia, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) coincide con la solución del problema de Cauchy definido





**Figura 3.16.** Soluciones oscilatorias del sistema de ecuaciones diferenciales (3.35).

en  $\Omega_2$ , el cual es descrito por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_2, & z_1(0) &= -L, \\ \dot{z}_2 &= \omega_p^2 z_1 + 2\mu_p z_2 - L\omega^2, & z_2(0) &= Q_0, \end{aligned}$$

y cuya solución está dada por

$$\begin{aligned} z_1(t) &= -e^{\mu_p t} \left( L\omega_+ \cos \vartheta_p t + \left( \frac{Q_0}{\vartheta_p} - \frac{\mu_p}{\vartheta_p} L\omega_+ \right) \sin \vartheta_p t \right) + \frac{L\omega^2}{\omega_p^2}, \\ z_2(t) &= e^{\mu_p t} \left( Q_0 \cos \vartheta_p t + \left( \frac{Q_0 \mu_p}{\vartheta_p} - \frac{\omega_p^2}{\vartheta_p} L\omega_+ \right) \sin \vartheta_p t \right), \end{aligned} \quad (3.40 \blacktriangleleft)$$

donde

$$\omega_+ = 1 + \frac{\omega^2}{\omega_p^2}.$$

De la definición del nuevo sistema de coordenadas para el sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) se sigue que  $z_{u_{\max}}(t_3 - t_2) = \mathbf{y}_{u_{\max}}(t_2) = \mathbf{p}_1$  y, por lo tanto, para las funciones definidas en (3.40) se deben cumplir las

ecuaciones  $z_1(t_3 - t_2) = -\alpha_1$  y  $z_2(t_3 - t_2) = 0$ . La última de estas ecuaciones implica que

$$t_3 - t_2 = \frac{1}{\vartheta_p} \left( \frac{\pi}{2} + \arctan \left( \frac{\mu_p}{\vartheta_p} - \frac{\omega_p^2}{Q_0 \vartheta_p} L \omega_+ \right) \right),$$

mientras que de la primera se obtiene la representación  $\alpha_1 = G(Q_0)$  definida por:

$$\alpha_1 = \frac{Q_0 \vartheta_p}{\omega_p^2} e^{\mu_p(t_3 - t_2)} \sqrt{1 + \left( \frac{\mu_p}{\vartheta_p} - \frac{L \omega_p^2}{Q_0 \vartheta_p} \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \right) \right)^2} - \frac{L \omega^2}{\omega_p^2}. \quad (3.41) \blacktriangleleft$$

La ecuación (3.41) define, de manera implícita, una transformación biyectiva que va de la segunda coordenada de puntos de la forma  $\mathbf{q} = (-L, Q)^\top$  que pertenecen a la superficie de discontinuidad  $\Sigma_2$  en la primera coordenada de puntos de la forma  $\mathbf{p} = (-\alpha, 0)^\top$  que pertenecen a  $\Sigma_1$ . Esta observación muestra la dependencia implícita que existe de algún parámetro  $Q_0 > 0$  con respecto al parámetro  $\alpha_1$  definido en (3.41), y ayuda a concluir que es posible representar, por lo menos de forma local, una relación funcional que se expresa en la forma  $Q_0 = h_2^{-1}(\alpha_1)$ . La posibilidad de expresar esta relación permite construir una solución del sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) definida en  $\Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$  y tal que esta cruza de forma transversal los conjuntos  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  en los instantes  $t_1 < t_2 < t_3$ .

Se puede obtener ahora la construcción del segundo arco de solución  $\mathbf{q}_2 \mathbf{p}_2$  al definir  $z_{u_{\max}}(t) = \mathbf{y}_{u_{\max}}(t)$  para todo  $t \in (t_3, t_4)$ . De esta manera, la parametrización  $z_{u_{\max}}(t) = (z_1(t), z_2(t))^\top$  representa el arco que se recorre en sentido directo, es decir, tal que el recorrido se inicia en el punto  $\mathbf{q}_2$  y se termina en el punto  $\mathbf{p}_2$ . De tal guisa, los coeficientes del sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) toman los valores  $\widehat{\omega}(z_1(t)) = \omega^2$  y  $\widehat{\mu}(z_1(t)) = \mu$  para todo  $t \in (t_3, t_4)$  y, por consiguiente, se obtiene el problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, & z_1(t_3) &= -L, \\ \dot{z}_2 &= -\omega^2 z_1 - 2\mu z_2 + L\omega^2, & z_2(t_3) &= Q_0, \end{aligned}$$

cuya solución se describe de forma explícita por

$$\begin{aligned}
 z_1(t) &= -e^{-\mu(t-t_3)} \\
 &\quad \left( 2L \cos \vartheta(t-t_3) - \left( \frac{Q_0}{\vartheta} - \frac{2L\mu}{\vartheta} \right) \sin \vartheta(t-t_3) \right) + L, \\
 z_2(t) &= e^{-\mu(t-t_3)} \\
 &\quad \left( Q_0 \cos \vartheta(t-t_3) - \left( \frac{Q_0\mu}{\vartheta} - \frac{2L\omega^2}{\vartheta} \right) \sin \vartheta(t-t_3) \right).
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

A partir del cambio de variable propuesto, y del hecho de la validez de la ecuación  $z_{u_{\max}}(t_4) = \mathbf{y}_{u_{\max}}(t_4) = \mathbf{p}_2$ , se satisfacen las ecuaciones  $z_1(t_4) = \alpha_2$  y  $z_2(t_4) = 0$ . De la última de estas ecuaciones resulta que

$$t_4 - t_3 = \frac{1}{\vartheta} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{\mu}{\vartheta} - \frac{2L\omega^2}{Q_0\vartheta} \right) \right),$$

mientras que de la primera se deduce la relación secuencial  $\alpha_2 = H(Q_0)$ , donde

$$\alpha_2 = \frac{Q_0\vartheta}{\omega^2} e^{-\mu(t_4-t_3)} \sqrt{1 + \left( \frac{\mu}{\vartheta} - \frac{2L\omega^2}{Q_0\vartheta} \right)^2} + L. \tag{3.43}$$

Se observa que la relación (3.43) define una transformación puntual biyectiva de la segunda coordenada de puntos de la forma  $\mathbf{q} = (-L, Q)^\top$  que pertenecen a la superficie de discontinuidad  $\Sigma_2$ , en la primera coordenada de puntos de la forma  $\mathbf{p} = (\alpha, 0)^\top$  que pertenecen a  $\Sigma_1$ .

Una vez más, la definición de la segunda máxima desviación y la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) definida en  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ , permiten determinar una trayectoria de máxima desviación desde el punto  $\mathbf{p}_1 = (-\alpha_1, 0)^\top \in \Sigma_1$  para la familia de ecuaciones diferenciales (3.35), la cual se describe por

$$B_{\max}(\mathbf{p}_1) = \{ \mathbf{y}_{u_{\max}}(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (t_2, t_4) \},$$

como se muestra en la [Figura 3.17](#).

El proceso de construcción que se ha mostrado hasta este punto, permite obtener la dependencia implícita que existe entre los parámetros  $\alpha_2$  y  $\alpha_0$ , la cual se define de tal manera que

$$\alpha_2 = H(Q_0), \quad Q_0 = G^{-1}(\alpha_1), \quad \alpha_1 = F(R_0), \quad R_0 = R(\alpha_0),$$

y, por consiguiente,

$$\alpha_2 = H(G^{-1}(F(R_0))).$$

Dado que esta relación depende de la elección del parámetro  $\alpha_0 > 0$  que conforma el vector de condiciones iniciales  $\mathbf{p}_0 = (\alpha_0, 0)^\top$ , si se repite este procedimiento de tal manera que después de algunas iteraciones se halla un nuevo punto de condiciones iniciales  $\mathbf{p}_n = (\alpha_n, 0)^\top$  con  $\alpha_n > 0$ , entonces se obtiene para el sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) un ciclo de oscilación que cruza al conjunto  $\Sigma_1$  en un punto  $\mathbf{p}_{n+2} = (\alpha_{n+2}, 0)^\top$ , donde el parámetro  $\alpha_{n+2} > 0$  es descrito por la relación de recurrencia

$$\alpha_{n+2} = H(G^{-1}(F(R_n))), \quad n \in \mathbb{N},$$

donde

$$\alpha_{n+2} = H(Q_n), \quad Q_n = G^{-1}(\alpha_{n+1}), \quad \alpha_{n+1} = F(R_n),$$

para algún  $Q_n > 0$  que satisface  $\alpha_{n+1} = G(Q_n)$ , y donde  $R_n = R(\alpha_n)$ . No obstante, debido a que no es posible conocer de forma explícita la relación  $G^{-1}(\alpha_{n+1}) = Q_n$  para cada  $n \geq 0$ , resulta ser una tarea difícil el determinar el comportamiento asintótico de la sucesión  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . En tal situación se pueden determinar condiciones bajo las cuales el sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) posee una trayectoria cerrada  $C^{\text{máx}}$  que describe el ciclo límite máximo, lo cual equivale a determinar parámetros  $\alpha_0 > 0$  y  $Q_0 > 0$  tales que  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_2$ , si estos existen.

Por consiguiente, la posibilidad de obtener una trayectoria cerrada en el sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) es equivalente a la posibilidad de obtener solución del siguiente sistema:

$$F(R_0) - G(Q_0) = 0, \quad \alpha_0 - H(Q_0) = 0, \quad (3.44 \blacktriangleleft)$$

tal como se definen en las relaciones (3.39), (3.41) y (3.43). Si (3.44) posee soluciones, entonces estas se denotarán por  $\alpha_0^{\text{máx}}$  y  $Q_0^{\text{máx}}$ , respectivamente.

La existencia de los parámetros  $\alpha_0^{\text{máx}}$  y  $Q_0^{\text{máx}}$  permiten determinar los puntos de intersección de la trayectoria cerrada con las superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , los cuales se representan por:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0^{\text{máx}} &= (\alpha_0^{\text{máx}}, 0)^\top, & \mathbf{p}_1^{\text{máx}} &= (-\alpha_1^{\text{máx}}, 0)^\top, \\ \mathbf{q}_1^{\text{máx}} &= (-L, -R_0^{\text{máx}})^\top, & \mathbf{q}_2^{\text{máx}} &= (-L, Q_0^{\text{máx}})^\top, \end{aligned} \quad (3.45) \blacktriangleleft$$

donde  $\alpha_1^{\text{máx}} = F(R_0^{\text{máx}})$  y  $R_0^{\text{máx}} = R(\alpha_0^{\text{máx}})$ . En la Figura 3.17 se ilustra este esquema de construcción.

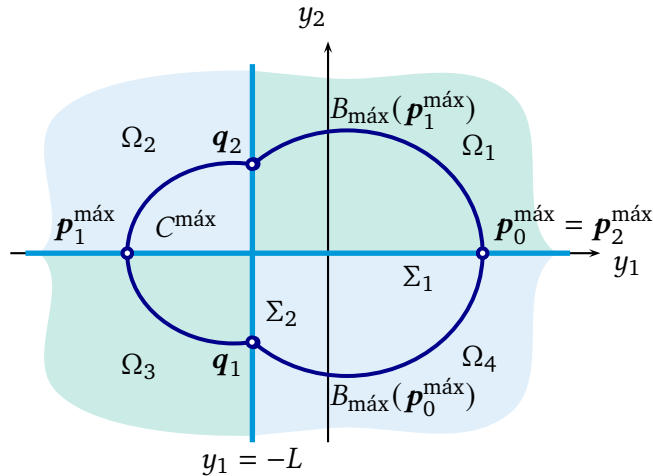


Figura 3.17. Soluciones oscilatorias del sistema de ecuaciones diferenciales (3.35).

Debido a que no es posible determinar  $\alpha_0^{\text{máx}}$  y  $Q_0^{\text{máx}}$  de manera analítica en (3.44), pues existen términos trascendentales, es imprescindible el empleo de métodos numéricos con el objetivo de simplificar la tarea. En este caso, se considera determinar el parámetro  $Q_0^{\text{máx}}$  y, con ello, determinar los parámetros restantes  $\alpha_0^{\text{máx}}$ ,  $R_0^{\text{máx}}$  y  $\alpha_1^{\text{máx}}$ .

El parámetro  $\alpha_1$  se representa por  $\alpha_1 = F(R_0)$  y  $\alpha_1 = G(Q_0)$  en las relaciones (3.39) y (3.41). Esto permite escribir la primera ecuación del sistema

no lineal (3.44) de manera equivalente a

$$a_+(Q_0)e^{b_+(Q_0)} - a_-(R_0)e^{b_-(R_0)} - \frac{2L\omega^2}{\omega_p^2} = 0, \quad (3.46 \blacktriangleleft)$$

donde

$$a_{\pm}(s) = \frac{\vartheta_p s}{\omega_p^2} \sqrt{1 + \left( \frac{\mu_p}{\vartheta_p} \mp \frac{\omega_p^2}{\vartheta_p s} L \omega_{\pm} \right)^2}, \quad \omega_{\pm} = 1 \pm \frac{\omega^2}{\omega_p^2},$$

$$b_{\pm}(s) = \pm \frac{\mu_p}{\vartheta_p} \left( \frac{\pi}{2} \pm \arctan \left( \frac{\mu_p}{\vartheta_p} \mp \frac{\omega_p^2}{\vartheta_p s} L \omega_{\pm} \right) \right),$$

mientras que de la condición  $\alpha_0 = \alpha_2$  y la representación  $\alpha_2 = H(Q_0)$  que se da en (3.43), resulta que la segunda ecuación no lineal de (3.44) se expresa en la forma

$$H(Q_0) = a(Q_0)e^{b(Q_0)} + L, \quad (3.47 \blacktriangleleft)$$

donde

$$a(s) = \frac{\vartheta s}{\omega^2} \sqrt{1 + \left( \frac{\mu}{\vartheta} - \frac{2L\omega^2}{\vartheta s} \right)^2},$$

$$b(s) = -\frac{\mu}{\vartheta} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{\mu}{\vartheta} - \frac{2L\omega^2}{\vartheta s} \right) \right).$$

Las ecuaciones (3.46) y (3.47) ayudan a escribir el sistema no lineal de ecuaciones (3.44) en la forma

$$h(Q_0) = 0, \quad (3.48 \blacktriangleleft)$$

donde

$$h(s) = a_+(s)e^{b_+(s)} - a_-(R(H(s)))e^{b_-(R(H(s)))} - \frac{2L\omega^2}{\omega_p^2}.$$

Se obtienen las siguientes propiedades de la ecuación (3.48).

**Proposición 3.2.** Existe una única solución  $Q_0^{\max} > 0$  para la ecuación (3.48).

**Demostración.** De acuerdo con la definición de las funciones  $a$  y  $b$ , se obtiene el siguiente límite

$$\lim_{s \rightarrow 0} H(s) = 2L \exp\left(-\frac{\pi\mu}{\vartheta}\right) + L$$

y, por lo tanto,  $\lim_{s \rightarrow 0} R(H(s)) = A$ , donde

$$A = 2L\omega \left(1 + \exp\left(-\frac{\pi\mu}{\vartheta}\right)\right) \exp\left(-\frac{\mu}{\vartheta} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\mu}{\vartheta}\right)\right).$$

De esta manera, resulta que  $\lim_{s \rightarrow 0} h(s) = L\omega_- - a_-(A)e^{b_-(A)} < 0$ . Por otra parte, debido a que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} b_{\pm}(s) = \pm \frac{\mu_p}{\vartheta_p} \left(\frac{\pi}{2} \pm \arctan \frac{\mu_p}{\vartheta_p}\right),$$

y ya que  $\lim_{s \rightarrow \infty} a_{\pm}(s) = \infty$ , se concluye que  $\lim_{s \rightarrow \infty} h(s) = \infty$ .

De las expresiones anteriores se concluye que existe un número real positivo  $Q_0^{\text{máx}} \in \mathbb{R}$  tal que  $h(Q_0^{\text{máx}}) = 0$  y, debido a que  $h$  es una función creciente para todo  $s \geq 0$ , se concluye que tal número real es único.  $\square$

**Proposición 3.3.** Existe un número real positivo  $\lambda > 0$  tal que  $Q_0^{\text{máx}} = \lambda L$ .

**Demostración.** Basta con ver que existen funciones  $A_{\pm}(\lambda)$  y  $B_{\pm}(\lambda)$  que dependen de los parámetros de la ecuación diferencial (3.36) y que no dependen de  $L$ , tales que

$$h(\lambda L) = Lg(\lambda)$$

donde

$$g(\lambda) = A_+(\lambda)e^{B_+(\lambda)} - A_-(\lambda)e^{-B_-(\lambda)} - \frac{2\omega^2}{\omega_p^2}.$$

Estas funciones se obtienen de manera directa al verificar la validez de las

siguiente ecuaciones:


$$\begin{aligned} a_-(R(H(\lambda L))) &= LA_-(\lambda), & a_+(\lambda L) &= LA_+(\lambda), \\ b_-(R(H(\lambda L))) &= B_-(\lambda), & b_+(\lambda L) &= B_+(\lambda). \end{aligned}$$

Esto muestra el resultado. □

Se concluye de la [Proposición 3.3](#) que el número real  $\lambda > 0$  sólo depende de los parámetros que definen la ecuación diferencial (3.36), excepto del parámetro  $L$ . Por otra parte, se concluye de las [Proposiciones 3.1](#) y [3.2](#) que la existencia de una solución de (3.48) implica la existencia de un ciclo límite  $C^{\text{máx}}$  para la ecuación diferencial (3.36), y que este no depende de las condiciones iniciales, es decir,  $C^{\text{máx}}$  sólo depende de los parámetros que definen la ecuación diferencial (3.36). Esto muestra el siguiente resultado:

**Teorema 3.3.** La ecuación diferencial (3.36) posee un único ciclo límite  $C^{\text{máx}}$  que es asintóticamente y orbitalmente estable.

El siguiente ejemplo muestra de forma numérica un caso particular de los resultados obtenidos.

 **Ejemplo 3.4.** Se eligen en el sistema de ecuaciones diferenciales el valor del parámetro  $L = 1$  y los coeficientes  $\mu = 0.1$ ,  $\mu_p = 0.8$ ,  $\omega = 0.8$  y  $\omega_p = 0.9$ . Con estos valores se obtienen las estimaciones  $\vartheta \approx 0.7937$  y  $\vartheta_p \approx 0.4123$ .

Si se consideran condiciones iniciales  $\pm \mathbf{p}_0 = (\pm \alpha_0, 0)^\top$  y  $\pm \widehat{\mathbf{p}}_0 = (\pm \widehat{\alpha}_0, 0)^\top$ , entonces se obtienen trayectorias que convergen a un único ciclo límite máximo  $C^{\text{máx}}$ , como se muestra en la [Figura 3.18](#), en la cual se han elegido los valores  $\alpha_0 = 0.5$  y  $\widehat{\alpha}_0 = 3.5$ . Los puntos de intersección sobre las superficies de discontinuidad son:

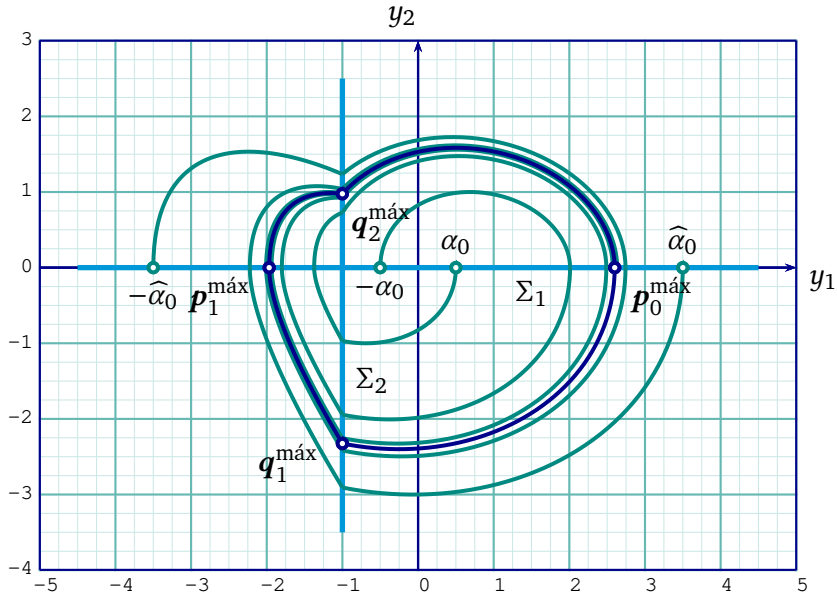
$$\mathbf{p}_0^{\text{máx}} \approx \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_1^{\text{máx}} \approx \begin{pmatrix} -1.9679 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_1^{\text{máx}} \approx \begin{pmatrix} -1 \\ -2.3257 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2^{\text{máx}} \approx \begin{pmatrix} -1 \\ 0.9765 \end{pmatrix}.$$

Se observa de la [Figura 3.18](#) que el ciclo límite  $C^{\text{máx}}$  es asintóticamente y orbitalmente estable. ▬▬▬

Se ha mostrado que la ecuación diferencial (3.36) posee un único ciclo



límite  $C^{\text{máx}}$  que pertenece a las regiones  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  y  $\Omega_4$  del plano de fases  $\Omega = \mathbb{R}^2$ , y que cruza las superficies de discontinuidad  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ . La determinación de este ciclo límite se ha realizado bajo el supuesto de no existir movimientos deslizantes sobre las superficies de discontinuidad  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ .



**Figura 3.18.** Representación gráfica de las soluciones del Ejemplo 3.4.

Por otra parte, se puede concluir de la definición de la peor perturbación externa, que el ciclo límite  $C^{\text{máx}}$  describe la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $Q$  de la familia de ecuaciones diferenciales (3.35). En efecto, ya que si no fuese así, entonces debe existir otra perturbación  $\hat{u}(t) \in \mathcal{U}_\delta$  tal que la correspondiente solución  $\hat{\mathbf{y}}(t) = (\hat{y}_1(t), \hat{y}_2(t))^\top$  asociada al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\hat{\omega}(y_1)y_1 - 2\hat{\mu}(y_1)y_2 + \hat{u}(t), \end{aligned}$$

con condiciones iniciales  $\mathbf{p}_0 = (\alpha_0^{\text{máx}}, 0)^\top \in Q$ , debe ser tal que la correspon-

diente trayectoria solución  $\Gamma = \{\widehat{\mathbf{y}}_{\bar{u}}(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq 0\}$  debiera cruzar el ciclo límite  $C^{\text{máx}}$  en cierto instante  $\tau > 0$ . En tal situación, para dicho instante debe tener lugar la siguiente desigualdad

$$\frac{dy_2}{dy_1}(\tau) < \frac{d\widehat{y}_2}{d\widehat{y}_1}(\tau),$$

lo cual contradice de forma natural la definición de la peor perturbación externa. La contradicción obtenida muestra que el ciclo límite  $C^{\text{máx}}$  representa la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $Q$  para la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.35). A este respecto,  $C^{\text{máx}}$  describe el *ciclo límite máximo* de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.35).

Esto se describe en el siguiente resultado.

**Teorema 3.4.** El ciclo límite máximo  $C^{\text{máx}}$  del sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) representa la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $Q$  para la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.35).

Se observa como consecuencia del [Ejemplo 3.4](#) que  $Q$  resulta no ser un conjunto simétrico, y tampoco un conjunto convexo, tal como se observa en la [Figura 3.18](#), ya que los elementos de la familia de ecuaciones diferenciales considerada, no son lineales. No obstante, es posible establecer un criterio de estabilidad robusta para esta familia de sistemas de ecuaciones diferenciales tal como se realizó en la [Subsección 3.4.1](#).

### 3.5.1. Criterio de estabilidad robusta

Se mostró que la ecuación (3.48) posee solución única  $Q_0^{\text{máx}} = \lambda L$  para algún  $\lambda > 0$  y, por lo tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) posee un único ciclo límite máximo  $C^{\text{máx}}$  que representa la frontera del conjunto de alcanzabilidad  $Q$  para la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.35). La intersección de las rectas  $y_2 = 0$  y  $y_1 = -L$  con  $C^{\text{máx}}$  ocurren en los puntos  $p_0^{\text{máx}}$ ,  $p_1^{\text{máx}}$ ,  $q_1^{\text{máx}}$  y  $q_2^{\text{máx}}$ , ver (3.45). Con ayuda de la construcción de este ciclo límite máximo  $C^{\text{máx}}$ , y siguiendo el método descrito en la

**Subsección 3.4.1**, en este apartado se obtiene un criterio de estabilidad robusta para la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.35), el cual es análogo al descrito en la **Definición 3.2**, y que depende del concepto de estabilidad bajo perturbaciones de acción constante introducido por Georgiy Nikolaevich Duboshin e Ioèl' Gil'evich Malkin, ver **Elsgoltz (1969)**.

Se denota una vez más por  $\mathcal{Y}$  el conjunto conformado por las soluciones  $\mathbf{y}_u(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$  de la familia de ecuaciones diferenciales (3.35) que son asociadas a una perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , y que satisfacen la condición inicial  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{p}_0$ . Se considera la siguiente norma para cada solución  $\mathbf{y}_u(t) \in \mathcal{Y}$ :

$$\|\mathbf{y}_u\|_{\mathcal{Y}} = \max \left\{ \sup_{t \in [0, \infty)} |y_1(t)|, \sup_{t \in [0, \infty)} |y_2(t)| \right\}.$$

**Definición 3.3.** La solución trivial  $\bar{\mathbf{y}}_u(t) \equiv 0$  de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.35) es *robustamente estable* con respecto a condiciones iniciales  $\mathbf{y}_u(0) = \mathbf{p}_0$  y perturbaciones externas  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , si para todo  $\epsilon > 0$  existen  $\delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0$  y  $\delta_2 = \delta_2(\epsilon) > 0$  tal que la siguiente condición es satisfecha: si  $\|u\|_{\mathcal{U}_\delta} \leq \delta_1$  y  $\|\mathbf{p}_0\|_\infty \leq \delta_2$ , entonces cualquier otra solución de (3.35) satisface la desigualdad  $\|\mathbf{y}_u\|_{\mathcal{Y}} \leq \epsilon$ .

El análisis de la estabilidad robusta de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.35), en el sentido de la **Definición 3.3**, se realiza por emplear las *máximas desviaciones* de la solución  $\mathbf{y}_u(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$  del sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) respecto a los ejes  $y_1 = 0$  y  $y_2 = 0$  en cada intervalo de tiempo  $(t_{k-1}, t_k)$ , es decir, a los valores

$$\alpha_k^{\max} = \sup_{t \in (t_{k-1}, t_k)} |y_1(t)|, \quad \beta_k^{\max} = \sup_{t \in (t_{k-1}, t_k)} |y_2(t)|.$$

De las expresiones (3.41) y (3.43), así como la **Proposición 3.3**, se sabe que las máximas desviaciones de oscilación de la familia de ecuaciones diferenciales (3.35) sobre el eje  $y_2 = 0$  se describen por  $\alpha_0^{\max} = L \cdot \hat{\alpha}_0$  y

$\alpha_1^{\text{máx}} = L \cdot \widehat{\alpha}_1$ , donde

$$\widehat{\alpha}_0 = \frac{\lambda \vartheta}{\omega^2} \sqrt{1 + \left( \frac{\mu}{\vartheta} - \frac{2\omega^2}{\lambda \vartheta} \right)^2} \exp\left(-\frac{\mu}{\vartheta} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan\left( \frac{\mu}{\vartheta} - \frac{2\omega^2}{\lambda \vartheta} \right) \right)\right) + 1$$

$$\widehat{\alpha}_1 = \frac{\lambda \vartheta_p}{\omega_p^2} \sqrt{1 + \left( \frac{\mu_p}{\vartheta_p} - \frac{\omega + \omega_p^2}{\lambda \vartheta_p} \right)^2} \exp\left(\frac{\mu_p}{\vartheta_p} \left( \frac{\pi}{2} + \arctan\left( \frac{\mu_p}{\vartheta_p} - \frac{\omega + \omega_p^2}{\lambda \vartheta_p} \right) \right)\right) - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}.$$

Las máximas desviaciones de oscilación de la trayectoria solución respecto al eje  $y_1 = 0$  se analizan por separado al considerar la solución que describe el ciclo límite máximo  $C^{\text{máx}}$  en las regiones  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  y  $\Omega_4$ , respectivamente. Por lo tanto, se supone que  $Q_0^{\text{máx}}$ ,  $\alpha_0^{\text{máx}}$ ,  $R_0^{\text{máx}}$  y  $\alpha_1^{\text{máx}}$  son los parámetros que determinan el ciclo límite máximo  $C^{\text{máx}}$  con la siguiente condición inicial  $p_0^{\text{máx}} = (\alpha_0^{\text{máx}}, 0)^\top$  para el sistema de ecuaciones diferenciales (3.36).

De la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (3.36) en el conjunto  $\Omega_4$ , se observa que los límites laterales de  $y_2(t)$  satisfacen las siguientes desigualdades en los instantes  $t = 0$  y  $t = t_1$ :

$$\begin{aligned} \dot{y}_2(0^+) &= -\omega^2(L + \alpha_0^{\text{máx}}) < 0, \\ \dot{y}_2(t_1^-) &= 2\mu\omega(L + \alpha_0^{\text{máx}})e^{-\mu t_1} > 0. \end{aligned}$$

Debido al cambio de signo, se sigue que existe un instante  $s_1 \in (0, t_1)$  en el cual la trayectoria  $\Gamma_1 = \{(y_1(t), y_2(t))^\top \in \Omega_4 \mid t \in [0, t_1]\}$  posee en  $\Omega_4$  un vector tangente en el instante  $t = s_1$ , y que este vector es paralelo al eje de coordenadas  $y_2 = 0$ , con

$$s_1 = \frac{1}{\vartheta} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\mu}{\vartheta} \right).$$

En tal situación resulta que  $y_2(s_1) = -\beta_0^{\text{máx}}$ , donde  $\beta_0^{\text{máx}} = L \cdot \widehat{\beta}_0$ , y

$$\widehat{\beta}_0 = \omega(1 + \widehat{\alpha}_0)e^{-\mu s_1}.$$

El valor  $\beta_0^{\text{máx}}$  define la máxima desviación de la coordenada  $y_2$  en  $\Omega_4$ .

Si ahora se determina la solución de (3.36) en  $\Omega_3$ , resultan los siguientes límites laterales de  $\dot{y}_2(t)$  para los instantes  $t = t_1$  y  $t = t_2$ :

$$\begin{aligned}\dot{y}_2(t_1^+) &= L\omega_-\omega_p^2 + 2R_0^{\text{máx}}\mu_p > 0, \\ \dot{y}_2(t_2^-) &= \sqrt{(L\omega_-\omega_p^2 + R_0^{\text{máx}}\mu_p)^2 + R_0^{\text{máx}^2}\vartheta_p^2} e^{-\mu_p(t_2-t_1)} > 0.\end{aligned}$$

De esta manera, la trayectoria  $\Gamma_2 = \{(y_1(t), y_2(t))^\top \in \Omega_3 \mid t \in [t_1, t_2]\}$  no admite vectores tangentes en la región  $\Omega_3$  que sean paralelos al eje  $y_2 = 0$ .

Por otra parte, la coordenada  $\dot{y}_2(t)$  de la solución definida en  $\Omega_2$ , satisface los siguientes límites laterales en  $t = t_2$  y  $t = t_3$ :

$$\begin{aligned}\dot{y}_2(t_2^+) &= \sqrt{(L\omega_+\omega_p^2 - Q_0^{\text{máx}}\mu_p)^2 + Q_0^{\text{máx}^2}\vartheta_p^2} e^{\mu_p(t_3-t_2)} > 0, \\ \dot{y}_2(t_3^-) &= L\omega_+\omega_p^2 - 2Q_0^{\text{máx}}\mu_p.\end{aligned}$$

Se puede observar que ocurren dos casos en  $\Omega_2$ . Primero, si  $\omega_+\omega_p^2 > 2\lambda\mu_p$ , entonces la trayectoria  $\Gamma_3 = \{(y_1(t), y_2(t))^\top \in \Omega_2 \mid t \in [t_2, t_3]\}$  no admite vectores tangentes que sean paralelos al eje  $y_2 = 0$  en  $\Omega_2$ . Luego, la máxima desviación de la coordenada  $y_2$  en  $\Omega_2$  se obtiene del valor  $y_2(t_3^-) = \beta_1^{\text{máx}}$ , donde  $\beta_1^{\text{máx}} = L \cdot \widehat{\beta}_1$  y

$$\widehat{\beta}_1 = \lambda.$$

Segundo, si  $\omega_+\omega_p^2 \leq 2\lambda\mu_p$ , entonces existe un instante  $s_2 \in (t_2, t_3)$  tales que  $\dot{y}_2(s_2) = 0$ . Bajo la validez de este supuesto resulta

$$s_2 = t_3 - \frac{1}{\vartheta_p} \left( \frac{\pi}{2} + \arctan \left( \frac{\mu_p}{\vartheta_p} + \frac{\lambda\omega_p^2}{\vartheta_p(\omega_+\omega_p^2 - 2\lambda\mu_p)} \right) \right)$$

y, por lo tanto, la máxima desviación de la coordenada  $y_2$  en  $\Omega_2$  se obtiene del valor  $y_2(s_2) = \beta_1^{\text{máx}}$ , donde  $\beta_1^{\text{máx}} = L \cdot \widehat{\beta}_1$  y

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{1}{\omega_p} \sqrt{(\omega_+\omega_p^2 - \lambda\mu_p)^2 + \lambda^2\vartheta_p^2} e^{\mu_p(t_3-s_2)}.$$

Finalmente, en  $\Omega_1$  se obtienen los siguientes límites laterales para  $\dot{y}_2(t)$  en  $t = t_3$  y  $t = t_4$ :

$$\begin{aligned}\dot{y}_2(t_3^+) &= 2(L\omega^2 - Q_0^{\max}\mu), \\ \dot{y}_2(t_4^-) &= -\sqrt{(2L\omega^2 - Q_0^{\max})^2 + Q_0^{\max 2}\vartheta^2} e^{-\mu(t_4-t_3)} < 0.\end{aligned}$$

Una vez más se obtienen dos casos en  $\Omega_1$ . Primero, si la desigualdad  $\omega^2 < \lambda\mu$  es válida, entonces la trayectoria  $\Gamma_4 = \{(y_1(t), y_2(t))^T \in \Omega_1 \mid t \in [t_3, t_4]\}$  no admite vectores tangentes que sean paralelos al eje de coordenadas  $y_2 = 0$  en  $\Omega_1$ . Así, la máxima desviación de la coordenada  $y_2$  en  $\Omega_1$  se representa por  $y_2(t_3^+) = \beta_2^{\max}$ , donde  $\beta_2^{\max} = L \cdot \widehat{\beta}_2$  y

$$\widehat{\beta}_2 = \lambda.$$

Segundo, si  $\omega^2 \geq \lambda\mu$ , entonces existe  $s_3 \in (t_3, t_4)$  tales que  $\dot{y}_2(s_3) = 0$ . Se sigue que

$$s_3 = \frac{1}{\vartheta} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{\mu}{\vartheta} + \frac{\lambda\omega^2}{2\vartheta(\omega^2 - \lambda\mu)} \right) \right) + t_3,$$

de donde se obtiene el valor  $y_2(s_3) = \beta_2^{\max}$ , con  $\beta_2^{\max} = L \cdot \widehat{\beta}_2$  y

$$\widehat{\beta}_2 = \frac{1}{\omega} \sqrt{(2\omega^2 - \lambda\mu)^2 + \lambda^2\vartheta^2} e^{-\mu(s_3-t_3)}.$$

El criterio de estabilidad robusta de la solución trivial  $\bar{\mathbf{y}}_{\bar{u}}(t) \equiv 0$  de la familia de ecuaciones diferenciales (3.35) para perturbaciones externas es el siguiente: para todo  $\epsilon > 0$ , el estimado  $\|\mathbf{y}_u\|_{\mathcal{Y}} \leq \epsilon$  para cada perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , se obtiene al determinar la constante  $L = \delta_1$  de la expresión

$$\delta_1 = \frac{\epsilon}{\max \left\{ \max \{ \widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1 \}, \max \{ \widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2 \} \right\}}, \quad (3.49 \blacktriangleleft)$$

siempre que la condición inicial  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{p}_0$  de la familia de ecuaciones diferenciales (3.35) satisfaga la desigualdad


$$\|\mathbf{p}_0\|_\infty \leq \delta_2 = \delta_1 \cdot \min \{ \widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1 \}. \quad (3.50 \blacktriangleleft)$$

La representación que se da en (3.49) permite determinar una cota para las amplitudes de oscilación del ciclo límite máximo  $C^{\text{máx}}$  del sistema de ecuaciones diferenciales (3.36), ya que en el lado derecho de esta expresión aparecen únicamente parámetros que definen el sistema de ecuaciones diferenciales (3.36), ver Aleksandrov *et al.* (2010). Tal propiedad ayuda a fijar el siguiente *criterio de calidad robusta* que caracteriza las máximas desviaciones del sistema (3.35), y cuyas condiciones iniciales satisfacen la desigualdad (3.50), tal como se hizo en la Subsección 3.4.1:

$$\chi = \sup_{0 < \epsilon < \infty} \frac{\epsilon}{\delta_1(\epsilon)}. \quad (3.51 \blacktriangleleft)$$

Como consecuencia, se sigue del criterio de estabilidad robusta que las soluciones  $\mathbf{y}_u(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$  de la familia de ecuaciones diferenciales (3.35) asociadas a perturbaciones externas  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$  y que inician en un punto  $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{Q}$ , satisfacen la siguiente propiedad:  $\mathbf{y}_u(t) \in \mathcal{Q}$  para todo  $t \geq 0$ .

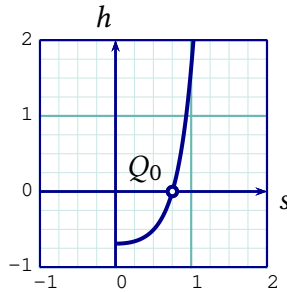
El siguiente ejemplo muestra la validez de los resultados obtenidos para una elección de los parámetros que satisfacen  $0 < \mu < \omega$  y  $0 < \mu_p < \omega_p$  y considerando algunas perturbaciones externas.

 **Ejemplo 3.5.** Se supone que en la ecuación diferencial (3.35) se han elegido los parámetros  $\omega = 0.8$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\omega_p = 0.9$  y  $\mu_p = 0.8$ .

Si para  $\epsilon = 2$  se buscan soluciones  $\mathbf{y}_u(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$  en la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales (3.35) tales que  $\|\mathbf{y}_u\|_{\mathcal{Y}} \leq \epsilon$  para toda perturbación externa  $u(t) \in \mathcal{U}_\delta$ , entonces del criterio de estabilidad robusta se sigue que basta con elegir  $L \approx 0.7693$ .

Tomando en consideración los valores de los parámetros propuestos, se obtiene la ecuación  $g(\lambda) = 0$  definida en la Proposición 3.3, la cual tiene por solución  $\lambda \approx 0.9765$  y, por lo tanto, la ecuación (3.47) admite la siguiente aproximación como única solución  $Q_0^{\text{máx}} \approx 0.7512$ . La gráfica de la función  $h$  se puede observar en la Figura 3.19.

De acuerdo con el valor  $Q_0^{\text{máx}}$  que se ha obtenido, es posible determinar los puntos de cruce del ciclo límite máximo  $C^{\text{máx}}$  sobre las superficies de



**Figura 3.19.** Gráfica de la función  $h(Q_0)$  descrita en la ecuación (3.48).

discontinuidad  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , los cuales son:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0^{\text{máx}} &\approx (2, 0)^\top, & \mathbf{p}_1^{\text{máx}} &\approx (-1.5139, 0)^\top, \\ \mathbf{q}_1^{\text{máx}} &\approx (-0.7693, -1.7891)^\top, & \mathbf{q}_2^{\text{máx}} &\approx (-0.7693, 0.7512)^\top. \end{aligned}$$

Se observa de estos valores que la máxima desviación del ciclo límite  $C^{\text{máx}}$  sobre el eje  $y_2 = 0$  corresponde al valor  $\alpha_0^{\text{máx}} \approx 2$ , mientras que la máxima desviación del ciclo límite  $C^{\text{máx}}$  sobre el eje  $y_2 = 0$  se representa por el valor  $\beta_0^{\text{máx}} \approx 1.8465$ .

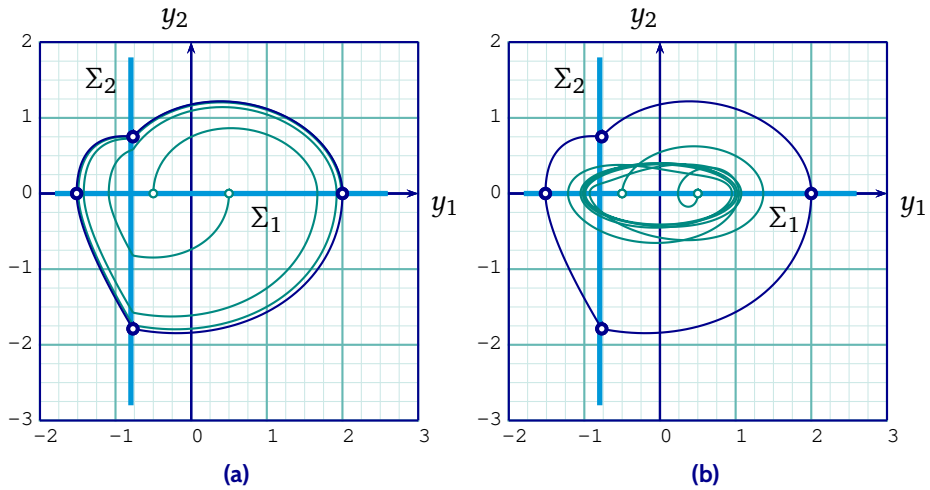
Si ahora se consideran condiciones iniciales  $\pm \mathbf{p}_0 = (\pm 0.5, 0)^\top$ , entonces la correspondiente trayectoria solución  $\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}(t) = (y_1(t), y_2(t))^\top$  asociada a la peor perturbación externa  $u_{\text{máx}}(t) = L\omega^2 \text{Sign}(y_2(t))$  debe converger al único ciclo límite máximo  $C^{\text{máx}}$ , de acuerdo con el método de las transformaciones puntuales que se describió en la [Sección 1.4](#), tal como se muestra en la [Figura 3.20a](#). Por otra parte, si ahora se considera la perturbación externa  $\hat{u}(t) = L\omega^2 \cos(0.4t)$ , entonces la correspondiente trayectoria solución satisface la propiedad geométrica  $\mathbf{y}_{\hat{u}}(t) \in Q$  para todo  $t \geq 0$ , tal como se muestra en la [Figura 3.20b](#).

Se puede observar que en cada uno de los casos son válidos los estimados:

$$\|\mathbf{y}_{u_{\text{máx}}}\|_{\mathcal{Y}} \leq \epsilon \quad \text{y} \quad \|\mathbf{y}_{\hat{u}}\|_{\mathcal{Y}} \leq \epsilon,$$

lo cual muestra la validez del criterio de estabilidad robusta. ▀▀▀▀





**Figura 3.20.** Representación de la solución del **Ejemplo 3.5** bajo el efecto de la perturbación externa: (a)  $u_{\max}(t) = L\omega^2 \text{Sign}(y_2(t))$  y (b)  $\hat{u}(t) = L\omega^2 \cos(0.4t)$ .

—...¿Me podrías indicar, por favor, hacia dónde tengo que ir desde aquí?

—Eso depende de a dónde quieras llegar — contestó el Gato.

*Alicia en el país de las maravillas*

---

---

Lewis Carroll (1832–1898)  
Lógico, matemático y escritor británico

## Bibliografía

- Aleksandrov, V. V., Aleksandrova, O. V., Konovalenko, I., y Tikhonova, K. V. (2016). Perturbed stable systems on a plane. Part 1. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 71(5):108–113.  
DOI: <https://doi.org/10.3103/S0027133016050022>.
- Aleksandrov, V. V., Aleksandrova, O. V., Prikhod'ko, I. P., y Temoltzi-Ávila, R. (2007). Synthesis of self-oscillations. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 62(3):65–68.  
DOI: <https://doi.org/10.3103/S0027133007030016>.
- Aleksandrov, V. V., Boltianski, V. G., Lemak, S. S., Parusnikov, N. A., y Tikhomirov, B. M. (2005). *Control óptimo del movimiento*. FIZMATLIT, Moscú. (en Ruso).
- Aleksandrov, V. V., Bugrov, D. I., Zhermolenko, V. N., y Konovalenko, I. S. (2021). Attainability set and robust stability of perturbed oscillatory systems. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 76(1):30–34.  
DOI: <https://doi.org/10.3103/S0027133021010027>.
- Aleksandrov, V. V., Reyes-Romero, M., Sidorenko, G. Y., y Temoltzi-Ávila, R. (2010). Stability of controlled inverted pendulum under permanent horizontal perturbations of the supporting point. *Mechanics of Solids*, 45(2):187–193.  
DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654410020044>.
- Aleksandrov, V. V., Zueva, I. O., y Sidorenko, G. Y. (2014). Robust stability of third order control systems. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 69(1):10–15.  
DOI: <https://doi.org/10.3103/S0027133014010026>.



- Andronov, A. A. y Chaikin, S. E. (1949). *Theory of oscillations*. Princeton University Press, New Jersey.
- Andronov, A. A., Vitt, A. A., y Khaikin, S. E. (1966). *Theory of oscillators*. International series of Monographs in Physics. Pergamon Press, New York.
- Aubin, J. P. y Celina, A. (1984). *Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory*. Springer-Verlag, Berlin.
- Biles, D. C. y Spraker, J. S. (1992). A study of almost-everywhere singleton-valued Filippovs. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 114(2):469–473.  
DOI: <https://doi.org/10.2307/2159669>.
- Bugrov, D. I. (2016). Estimation of the attainability set for a linear system based on a linear matrix inequality. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 11(6):253–256.  
DOI: <https://doi.org/10.3103/S0027132216060061>.
- Bugrov, D. I. y Formal'skii, A. (2017). Time dependence of the attainability regions of third order systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 81:106–113.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2017.08.004>.
- Bulgakov, B. V. (1939). *Teoría aplicada de giroscopios*. Gostekhizdat, Moscú. (en Ruso).
- Bulgakov, B. V. (1946). Sobre la acumulación de perturbaciones en sistemas lineales oscilatorios con parámetros constantes. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 51(5):339–342. (en Ruso).
- Butennin, N. V., Neimark, Y. I., y Fufáev, N. A. (1987). *Introducción a la teoría de oscilaciones no lineales*. Mir, Moscú.
- Butkovskiy, A. G. (1991). *Phase portraits of control dynamical systems*. Mathematics and its Applications (Soviet Series). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.



- Dieci, L. y Lopez, L. (2009). Sliding motion in Filippov differential systems: Theoretical results and a computational approach. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 47(3):2023–2051.  
DOI: <https://doi.org/10.1137/080724599>.
- Dyskin, A. V., Pasternak, E., y Pelinovsky, E. (2012). Periodic motions and resonance of impact oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 331:2856–2873.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.01.031>.
- Elaydi, S. (2005). *An introduction to difference equations*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York.
- Elishakoff, I. y Ohsaki, M. (2010). *Optimization and anti-optimization of structures under uncertainty*. Imperial College Press, London.
- Elsgol'tz, L. (1969). *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Mir, Moscú.
- Filippov, A. F. (1988). *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Mathematics and its Applications (Soviet series). Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Formal'skii, A. M. (1974). *Controlabilidad y estabilidad de sistemas con recursos acotados*. Nauka, Moscú. (en Ruso).
- Formal'skii, A. M. (2010). On the synthesis of optimal control for second order systems. *Doklady Mathematics*, 81(1):164–167.  
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064562410010448>.
- Formal'skii, A. M. (2015). *Stabilisation and motion control of unstable objects*, volumen 23 de *Studies in Mathematical Physics*. De Gruyter, Berlin.
- Kolmogorov, A. N. y Fomín, S. V. (1975). *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Mir, Moscú.
- Kurzanski, A. y Valyi, I. (1999). *Ellipsoidal calculus for estimation and control*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser, Boston.



- Lee, E. B. y Markus, L. (1967). *Foundations of optimal control theory*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Lyapunov, A. M. (1966). *Stability of motion*. Texts in Applied Mathematics. Academic Press, New York.
- Ma, Y., Agarwal, M., y Banerjee, S. (2006). Border collision bifurcations in a soft impact system. *Physics Letters A*, 354:281–287.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.01.025>.
- Macki, J. y Strauss, A. (1982). *Introduction to optimal control theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York.
- Marius–Florin, D. (2001). On a class of discontinuous dynamical systems. *Miskolc Mathematical Notes*, 2(2):103–116.  
DOI: <https://doi.org/10.18514/MMN.2001.41>.
- Munkres, J. R. (2002). *Topología*. Prentice Hall, Madrid.
- Nagle, R. K., Saff, E. B., y Snider, A. D. (2012). *Fundamentals of differential equations and boundary value problems*. Addison-Wesley, Boston.
- Natsiavas, S. (1990). On the dynamics of oscillators with bi-linear damping and stiffness. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 25(5):535–554.  
DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(90\)90017-4](https://doi.org/10.1016/0020-7462(90)90017-4).
- Perko, L. (2001). *Differential equations and dynamical systems*. Texts in Applied Mathematics. Springer, New York.
- Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., y Mishechenko, E. F. (1962). *The mathematical theory of optimal processes*. John Wiley & Sons, Inc, New York.
- Putzer, E. J. (1966). Avoiding the Jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients. *The American Mathematical Monthly*, 73(1):2–7.  
DOI: <https://doi.org/10.2307/2313914>.



- Rios, V. R. (2016). *Curso introductorio sobre inclusiones diferenciales*. Ediciones IVIC (Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas), Venezuela.
- Roitemberg, Y. N. (1971). *Control automático*. Nauka, Moscú. (en Ruso).
- Royden, H. L. y Fitzpatrick, P. M. (2010). *Real analysis*. Pearson Education, New York.
- Sadovnichiy, V. A., Alexandrov, V. V., Lemak, S. S., Bugrov, D. I., Tikhonova, K. V., y Temoltzi–Ávila, R. (2015). Robust stability, minimax stabilization and maximin testing in problems of semi-automatic control. En Sadovnichiy, V. A. y Zgurovsky, M. Z., editores, *Continuous and Distributed Systems II. Theory and Applications*, capítulo 15, pp. 247–266. Springer, Cham.  
DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-19075-4\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-319-19075-4_15).
- Sánchez, D. A. (1968). *Ordinary differential equations and stability theory. An introduction*. Dover Publications Inc., New York.
- Shaw, S. W. y Holmes, P. J. (1983). A periodically forced piecewise linear oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 90(1):129–155.  
DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(83\)90407-8](https://doi.org/10.1016/0022-460X(83)90407-8).
- Sotomayor, T. J. (1979). *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura y Aplicada, Rio de Janeiro.
- Spraker, J. S. y Biles, D. C. (1994). Filippov's operation and some attributes. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 44(3):513–520.  
DOI: <https://doi.org/10.21136/cmj.1994.128474>.
- Temoltzi–Ávila, R. (2022a). A robust stability criterion on the time-conformable fractional heat equation in a axisymmetric cylinder. *SeMA Journal*.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/s40324-022-00317-x>.
- Temoltzi–Ávila, R. (2022b). Robust stability of the heat equation on a radial symmetric plate. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 28(1):14.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/s40590-021-00405-4>.



- Temoltzi-Ávila, R. (2022c). Trajectories of maximum deviation in a controllable mechanical system with conformable fractional derivatives. En *2022 XXIV Robotics Mexican Congress COMRob*, pp. 107–112.  
DOI: <https://doi.org/10.1109/COMRob57154.2022.9962318>.
- Temoltzi-Ávila, R. y Ávila-Pozos, R. (2020). Conjunto de alcanzabilidad de un sistema mecánico controlable y condiciones de estabilidad robusta. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 17:285–293.  
DOI: <https://doi.org/10.4995/riai.2020.11938>.
- Temoltzi-Ávila, R. y Zhermolenko, V. N. (2021). Sobre la convergencia de los conjuntos de alcanzabilidad de un sistema lineal de segundo orden. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 8(16):30–36.  
DOI: <https://doi.org/10.29057/icbi.v8i16.5780>.
- Utkin, V. I. (1978). *Sliding modes and their application in variable structure systems*. Mir, Moscow.
- Utkin, V. I. (1992). *Sliding modes in control and optimization*. Springer, Berlin.
- Waltman, P. (2004). *A second course in elementary differential equations*, volumen 23 de *Dover Books on Mathematics*. Dover Publications, New York.
- Yakubovich, V. A., Leonov, G. A., y Gelig, A. K. (2004). *Stability of stationary sets in control systems with discontinuous nonlinearities*. series on Stability, Vibration and Control of Systems. World Scientific, New Jersey.
- Zhermolenko, V. N. (1980). Sobre el problema de Bulgakov referente a la desviación máxima de un sistema oscilatorio de segundo orden. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2:87–91. (en Ruso).
- Zhermolenko, V. N. (2007). Maximum deviation of oscillating system of the second order with external and parametric disturbances. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 46:407–411.  
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064230707030094>.



---

Zhermolenko, V. N. y Temoltzi-Ávila, R. (2021). Bulgakov problem for a hyperbolic equation and robust stability. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 76(4):95–104.

DOI: <https://doi.org/10.3103/S0027133021040051>.



## Índice alfabético

- Casco convexo de Filippov, **16**
- Ciclo límite máximo, **112**
- Conjunto
  - de alcanzabilidad, **41**
  - desde un punto, **98**
  - en un instante, **41**
  - de perturbaciones externas admisibles, **40**
- Criterio
  - de calidad robusta, **121, 144**
- Desviación
  - máxima, **96**
  - mínima, **96**
- Extensión
  - continua, **6**
  - suave, **7**
- Función
  - absolutmente continua, **13**
  - continua a trozos, **6**
  - de elección, **22**
  - de múltiples valores (multifunción), **15**
  - escalar indicadora, **14**
  - secuencial, **27**
  - selección, **22**
  - de norma mínima, **22**
  - signo, **8**
  - suave a trozos, **6**
- Inclusión
  - diferencial, **16**
  - funcional, **39**
- Matriz
  - de controlabilidad, **41**
  - exponencial, **43**
- Movimiento
  - de intersección transversal, **18**
  - deslizante atractor, **19**
  - deslizante repulsor, **20**
- Método
  - de regularización de Filippov, **16**
  - de transformaciones puntuales, **26**
  - del plano soporte, **46**
- Perturbación externa, **40**
  - mejor, **96**
  - peor, **96**
- Problema



de acumulación de  
perturbaciones, **84**  
de máxima desviación, **90**  
en el sentido de Bulgakov,  
**84**

Salto de discontinuidad, **7**

Segmento de alcanzabilidad  
desde un punto, **95**

Solución

en el sentido de Filippov, **17**

no oscilante respecto a  
coordenadas, **90**

oscilante respecto a una  
coordenada, **90**

robustamente estable, **121**,  
**140**

Superficie de discontinuidad, **11**

Trayectoria

de máxima desviación, **97**

de mínima desviación, **97**

Wilfrido Miguel Contreras Sánchez  
Secretario de Investigación, Posgrado y Vinculación

Pablo Marín Olán  
Director de Difusión, Divulgación Científica y Tecnológica

Agustín Abreu Cornelio  
Jefe del Departamento Editorial de Publicaciones No Periódicas

**E**N ESTA MONOGRAFÍA se presenta una introducción al problema de máxima desviación en ecuaciones diferenciales definidas en el plano. El texto se destina a estudiantes de matemáticas y a lectores interesados en la optimización dinámica de ecuaciones diferenciales.

El objetivo del libro es presentar, de forma simple y amena, los principales elementos que permiten resolver el problema de máxima desviación en ecuaciones diferenciales definidas en el plano. En el texto se incluye una serie de figuras que pretenden ayudar al lector a comprender los resultados y ejemplos que se proponen.

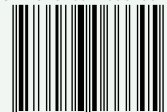
Raúl Temoltzi Ávila es Licenciado en Matemáticas Aplicadas por la Universidad Autónoma de Tlaxcala, Maestro y Doctor en Ciencias Matemáticas por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Actualmente es profesor en la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Sus líneas de investigación incluyen la estabilidad de sistemas dinámicos controlables y la optimización dinámica.



**UNIVERSIDAD JUÁREZ  
AUTÓNOMA DE TABASCO**

“ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE”

ISBN 978-607-606-664-5



9 786076 066645 >