

Modelación matemática y computacional de una inundación

DE VILLAHERMOSA, TABASCO, MÉXICO

C O L E C C I Ó N
HÉCTOR GARCÍA MOLINA
<i>Informática y sistemas computacionales</i>

José Manuel Piña Gutiérrez

Rector

Modelación matemática y computacional de una inundación

DE VILLAHERMOSA, TABASCO, MÉXICO

Justino Alavez Ramírez

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Jorge López López

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Juan Luis Hernández López

Universidad Tecnológica de la Mixteca

Darwin de la Fuente Vicente

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco



Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Modelación matemática y computacional de una inundación de Villahermosa, Tabasco, México / Justino Alavez Ramírez ... [et al.]. – 1ª ed. – Villahermosa, Tabasco : Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, 2013

240 p. : il., (Colección: HÉCTOR GARCÍA MOLINA, Informática y sistemas computacionales)

Incluye Referencias Bibliográficas: P. 205 - 211

ISBN: 978-607-606-122-0

1. Modelo Matemático – Inundación I. TITULO II. AUTOR III. SERIE

L.C. GB1401.72 .M32 M63 2013

Primera edición, 2013

D.R. © Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
Av. Universidad s/n. Zona de la Cultura
Colonia Magisterial, C.P. 86040
Villahermosa, Centro, Tabasco.

El contenido de la presente obra es responsabilidad exclusiva de los autores. Queda prohibida su reproducción total sin contar previamente con la autorización expresa y por escrito del titular; en términos de la Ley Federal de Derechos de Autor. Se autoriza su reproducción parcial siempre y cuando se cite la fuente.

ISBN: 978-607-606-122-0

Apoyo editorial: Francisco Morales Hoil
Diagramación de portada: David F. Mirabal León
Ilustración de portada: Manuel J. Ceballos Gómez

Hecho en Villahermosa, Tabasco, México

Contenido

Lista de Figuras	XI
Lista de Tablas	XVII
Prólogo	XIX
1. Planteamiento del Problema	1
1.1. Descripción del problema de estudio	1
1.2. Datos para la simulación numérica	6
1.3. Subproblemas a resolver	10
2. Ecuaciones de Movimiento	13
2.1. Ecuaciones de Euler	14
2.1.1. Conservación de la masa	15
2.1.2. Balance de momentos	16
2.1.3. Conservación de energía	39
2.2. Ecuaciones de Navier-Stokes	47
2.2.1. Fluidos viscosos	49
2.3. Ecuaciones de Reynolds	50
2.3.1. Flujo turbulento	50
2.3.2. Valor promedio y fluctuación	53
2.3.3. Ecuaciones de Reynolds en tres dimensiones	58
2.4. Ecuaciones de Saint-Venant en dos dimensiones	66

3. Método de Volúmenes Finitos	85
3.1. Discretización del dominio. Tipos de volúmenes finitos	86
3.1.1. Volumen finito tipo arista	86
3.1.2. Volumen finito tipo vértice	87
3.1.3. Volumen finito tipo celda	89
3.2. Discretización del modelo de Saint-Venant en dos dimen- siones	92
3.2.1. Integración y discretización temporal	93
3.2.2. Discretización del flujo	95
3.2.3. Discretización del término fuente	99
3.2.4. Paso temporal y algoritmo	101
4. Validación del Software GUADFlow 2D	103
4.1. Ejemplo 1: Canal con bordo	104
4.2. Ejemplo 2: Compuerta con abertura	110
4.3. Ejemplo 3: Río ciudad	120
4.4. Conclusiones	124
5. Modelación de la Batimetría del Río Grijalva	129
5.1. Ajuste del valor del terreno	130
5.2. Modelación del cauce de los ríos La Sierra y Grijalva	130
5.2.1. Interpolación por spline cúbico	132
5.2.2. Spline de tensión	138
5.2.3. Comparación de los splines	143
5.2.4. Aproximación por splines de las secciones trans- versales	143
5.3. Ajuste de la batimetría de los tramos limitados por las secciones transversales	146
5.4. Modelación del cauce de los ríos Viejo Mezcalapa y Pi- chucalco	147
5.4.1. Ajuste de la batimetría de secciones transversales	147
5.4.2. Interpolación de las secciones longitudinales de los ríos Viejo Mezcalapa y Pichucalco	156
5.5. Producto final	168

6. Simulación de una Inundación de Villahermosa	169
6.1. Experimento 1	170
6.1.1. Condiciones iniciales y de contorno	170
6.1.2. Triangulación y terreno interpolado con GUAD- Flow 2D	172
6.1.3. Situación aproximada del 1 de octubre de 2007 .	173
6.2. Experimento 2	174
6.2.1. Condiciones iniciales y de contorno	174
6.2.2. Resultados de la simulación numérica	176
6.3. Conclusiones	177
A. Glosario de Términos	189
Bibliografía	205
Índice Alfabético	213
Fotografías de la Inundación	217

Lista de Figuras

1.1.	Sección longitudinal del dominio ocupado por el fluido.	3
1.2.	Visualización del modelo digital tipo superficie del terreno de interés.	7
2.1.	Partícula de fluido fluyendo en una región $D \subset \mathbb{R}^3$	14
2.2.	La masa que cruza la frontera de W	15
2.3.	Fuerzas de presión a través de una superficie S	19
2.4.	W_t es la imagen de W	24
2.5.	Imágenes: (A) flujo laminar y (B) flujo turbulento.	50
2.6.	Ilustración de la variación de la magnitud φ	55
3.1.	Construcción de volúmenes finitos tipo arista.	86
3.2.	Construcción de volúmenes finitos tipo vértice.	88
3.3.	Vectores normales ν_1 y ν_2 a la frontera $\Gamma_{ij} = \overline{AM} \cup \overline{MB}$, dirigidos hacia el exterior de la celda C_i	88
3.4.	Malla de volumen finito tipo celda.	90
3.5.	Una función base ϕ_i	94
4.1.	Terreno del canal con bordo interno.	104
4.2.	Visualización de la triangulación de una parte del terreno de canal con bordo interno.	105
4.3.	Nivel de agua en el ejemplo de canal con bordo interno en el caso del flujo subcrítico a los 21 segundos.	106
4.4.	Nivel de agua en el ejemplo de canal con bordo interno en el caso del flujo subcrítico a los 30 segundos.	107

4.5. Nivel de agua en el ejemplo de canal con bordo interno en el caso del flujo subcrítico a los 80 segundos.	107
4.6. Velocidad del agua en el ejemplo de canal con bordo interno también en el caso del flujo subcrítico a los 9 segundos.	108
4.7. Velocidad del agua en el ejemplo de canal con bordo interno también en el caso del flujo subcrítico a los 21 segundos.	108
4.8. Velocidad del agua en el ejemplo de canal con bordo interno también en el caso del flujo subcrítico a los 80 segundos.	109
4.9. (A) Visualización del nivel del agua a los 19 segundos en el caso del flujo subcrítico. (B) Visualización de la velocidad del agua también a los 19 segundos en el caso del flujo subcrítico.	109
4.10. (A) Nivel del agua cuando el flujo ha alcanzado el régimen permanente en el caso transcrito con resalto hidráulico. (B) Velocidad del agua cuando el flujo ha alcanzado el régimen permanente.	111
4.11. (A) Nivel del agua cuando el flujo ha alcanzado el régimen permanente en el caso transcrito sin resalto hidráulico. (B) Visualización de la velocidad del agua cuando el flujo ha alcanzado el régimen permanente.	112
4.12. Terreno del Ejemplo 2.	113
4.13. Discretización del dominio del Ejemplo 2.	114
4.14. Avance global del agua y módulo de velocidad a los 11 segundos.	116
4.15. Visualización del nivel del agua del Ejemplo 2 en una sección horizontal a la altura de la abertura de entrada a los 2, 14 y 118 segundos.	117
4.16. Visualización del nivel del agua del Ejemplo 2, en una sección que va de la esquina inferior derecha hasta la barda superior pasando por la abertura que comunica las dos mitades a los 15, 39 y 119 segundos.	118

4.17. Visualización de la velocidad del agua del Ejemplo 2 en una sección horizontal a la altura de la abertura de entrada a los 2, 15 y 119 segundos.	119
4.18. Terreno de río en ciudad del Ejemplo 3.	120
4.19. Discretización de una parte del dominio del Ejemplo 3 con elementos triangulares.	121
4.20. (A) Condición inicial para simular el desborde de un río sobre una ciudad. (B) El tirante inicial en el río en la sección observada es de 2.80 m.	123
4.21. (A) Situación del río 30 minutos después del inicio de la simulación. (B) El tirante en el río en la sección observada es de aproximadamente 3.90 m.	125
4.22. (A) Una hora después se observan los primeros desbordes en el margen del río. (B) El tirante en el río en la sección observada es de 4.60 m.	126
4.23. (A) Dos horas después el río se ha desbordado por completo y el agua avanzó casi 250 m en la sección observada. (B) El tirante en el río en la sección observada es de 5.20 m.	127
5.1. Irregularidades detectadas sobre el río Pichucalco y La Sierra.	131
5.2. Secciones transversales de los ríos La Sierra y Grijalva, donde se midieron los datos batimétricos.	132
5.3. Comparación de los splines cúbico natural y completo con el spline de tensión.	144
5.4. Ampliación de la figura 5.3.	145
5.5. Visualización de los datos de la sección transversal G1 y de los splines que suavizan dichos datos.	146
5.6. Ubicación de la estación hidrométrica Gaviotas.	147
5.7. Ubicación de la sección transversal G1.	148
5.8. Visualización de los datos y aproximación del cauce del río Grijalva correspondiente a la sección transversal G1.	150

5.9. (A) Modelación del cauce del río en la sección transversal G1. (B) Modelación de la batimetría de la sección transversal G1.	150
5.10. Visualización de los datos de la sección transversal G2 y de los splines que suavizan dichos datos.	151
5.11. (A) Modelación del cauce del río en la sección transversal G2. (B) Modelación de la batimetría de la sección transversal G2.	152
5.12. (A) Modelación del cauce del río en la sección transversal G3. (B) Modelación de la batimetría de la sección transversal G3.	153
5.13. Tramo del río Grijalva de G1 a G2.	154
5.14. Modelación del tramo del río Grijalva de G1 a G2.	154
5.15. Tramo del río Grijalva de G2 a G3.	155
5.16. Secciones transversales M1 y M2 sobre el río Viejo Mezcalapa y sección transversal P1 sobre el río Pichucalco.	156
5.17. Croquis de la sección transversal M1.	158
5.18. (A) Modelación del cauce del río en la sección transversal M1. (B) Modelación de la batimetría de la sección transversal M1.	159
5.19. (A) Modelación del cauce del río Viejo Mezcalapa en la sección transversal M2. (B) Modelación de la batimetría de la sección transversal M2.	160
5.20. (A) Modelación del cauce del río Pichucalco en la sección P1. (B) Modelación de la batimetría de la sección transversal P1.	161
5.21. Variabilidad del fondo del río Viejo Mezcalapa interpolado con el spline de tensión.	162
5.22. Variabilidad del fondo del río Pichucalco también interpolado con el spline de tensión.	163
5.23. Esquematización del fondo en el entronque de los ríos Viejo Mezcalapa y Pichucalco.	163
5.24. Producto final del Capítulo 5.	168
6.1. Ubicación de las estaciones hidrométricas.	170

6.2.	Ubicación de las condiciones de contorno aguas arriba de los ríos.	172
6.3.	Hidrogramas $Q(t)$ que especifican las condiciones de contorno aguas arriba de los ríos.	173
6.4.	Visualización de la discretización de una parte del dominio con elementos triangulares.	174
6.5.	Terreno interpolado.	175
6.6.	Comparación entre el terreno inicial e interpolado.	176
6.7.	(A) Situación aproximada del día 1 de octubre de 2007. (B) Nivel de estabilidad que alcanzó el agua en el río Grijalva en la estación Gaviotas.	180
6.8.	Hidrogramas de entrada $Q(t)$ de los ríos de 0 a 453 600 segundos.	181
6.9.	Hidrograma de salida $Q(t)$ del río Grijalva desde 0 a 453 600 segundos.	182
6.10.	(A) Primer día de simulación que representa un escenario aproximado del día 23 de octubre de 2007. (B) Campo de velocidad que muestra la dirección en que está avanzando el agua. (C) Nivel del agua en el río Grijalva en la estación Gaviotas.	183
6.11.	(A) Segundo día de simulación que representa un escenario aproximado del día 28 de octubre de 2007. (B) Campo de velocidad que muestra la dirección en que está avanzando el agua. (C) Nivel del agua en el río Grijalva en la estación Gaviotas.	184
6.12.	(A) Tercer día de simulación que representa un escenario aproximado del día 29 de octubre de 2007. (B) Campo de velocidad que muestra la dirección en que está avanzando el agua. (C) Nivel del agua en el río Grijalva en la estación Gaviotas.	185

-
- 6.13. (A) Cuarto día de simulación que representa un escenario aproximado del día 30 de octubre de 2007. (B) Campo de velocidad que muestra la dirección en que está avanzando el agua. (C) Nivel del agua en el río Grijalva en la estación Gaviotas. 186
- 6.14. (A) Quinto día de simulación que representa un escenario aproximado del día 31 de octubre de 2007. (B) Campo de velocidad que muestra la dirección en que está avanzando el agua. (C) El nivel del agua en el río Grijalva en la estación Gaviotas es de 9.02 msnm. 187
- 6.15. (A) Dirección del agua en la confluencia de los ríos Viejo Mezcalapa y Pichucalco del primer día de simulación. (B) Desborde del río La Sierra en el segundo día de simulación. (C) Desborde del río Grijalva por la estación hidrométrica Gaviotas. (D) Dirección del desborde del río Grijalva sobre la Av. Coronel Gregorio Méndez Magaña. (E) Avance del agua entre las avenidas Coronel Gregorio Méndez Magaña y Francisco Javier Mina, y entre las calles Eusebio Castillo y Andrés Sánchez Magallanes, en el centro de la ciudad de Villahermosa. 188

Lista de Tablas

1.1.	Datos para generar hidrogramas de entrada de los ríos que aproximan la situación del 1 de octubre de 2007. . .	8
1.2.	Datos para generar hidrogramas de entrada de los ríos que aproximan la situación de finales de octubre de 2007.	9
1.3.	Datos que determinan el hidrograma de salida en el río Grijalva para el experimento 2.	10
4.1.	Datos de la condición inicial para simular el desborde de un río sobre una ciudad.	122
5.1.	Datos batimétricos de la sección transversal G1 sobre el río Grijalva.	131
5.2.	Coordenadas xy UTM de los puntos donde se midieron las batimetrías de la sección transversal M1 del río Viejo Mezcalapa.	157
5.3.	Coordenadas xy UTM de los puntos donde se midieron las batimetrías de las secciones M2 del río Viejo Mezcalapa y P1 del río Pichucalco.	164
5.4.	Resultados de la batimetría de la sección transversal M1 extraídos de la tabla 5.2.	165
5.5.	Resultados de la batimetría de las secciones transversales M2 y P1 extraídos de la tabla 5.3.	165
5.6.	Coordenadas xy UTM de los puntos $m_i, i = 1 : 24$, donde se midieron los tirantes c_i sobre el río Viejo Mezcalapa. .	166

5.7. Coordenadas xy UTM de los puntos p_i , $i = 1 : 18$, donde se midieron los tirantes c_i sobre el río Pichucalco.	167
6.1. Datos del día 1 de octubre de 2007 en las estaciones hidrométricas.	171
6.2. Comparación de resultados sobre el nivel que alcanzó el agua en la estación hidrométrica Gaviotas.	177
A.1. Algunos valores recomendados del coeficiente de rugosidad de Manning [36].	191

Prólogo

Este libro es el resultado de las diversas investigaciones que se han desarrollado hasta ahora en el sub-proyecto “Modelación de las Variables Hidrológicas en la Cuenca del Grijalva” Clave TAB-2007-C10-82422/04, financiado por el Fondo Mixto Conacyt – Gobierno del Estado de Tabasco. El sub-proyecto forma parte del proyecto denominado “Red Académica Sobre Desastres en Tabasco” (RASDET) Clave TAB-2007-C10-82422.

A raíz de la histórica inundación ocurrida en Tabasco a finales de octubre y principios de noviembre de 2007, un grupo de profesores integrados por el Dr. Justino Alavez Ramírez, M.C. Jorge López López, L.M. Juan Luis Hernández López y M.C. Adriana De la Cruz Uribe, impulsamos desde el principio de diciembre de ese mismo año, un seminario que lo denominamos “Simulación Numérica de Avenidas y Zonas Inundables”, cuyo propósito fue estudiar y desarrollar modelos matemáticos y computacionales que nos permitieran simular numéricamente el desborde de las principales avenidas fluviales que cruzan por la ciudad de Villahermosa, Tabasco; y de esa manera poder simular escenarios futuros de otras posibles inundaciones de la ciudad de Villahermosa.

Revisando la literatura sobre diversos modelos matemáticos y numéricos que se han desarrollado para simular inundaciones de zonas urbanas en otras regiones del mundo, llegamos a la conclusión de que uno de los modelos matemáticos de uso más reciente para la modelación de flujos de aguas poco profundas, como el caso que nos interesa, son las ecuaciones de Saint-Venant bidimensionales que se revisan en el Capítulo 2. También encontramos que un modelo numérico que implementa el

modelo de Saint-Venant bidimensional vía el método de volúmenes finitos, que se revisa en el Capítulo 3, es el software GUADFlow 2D. Este software es desarrollado por la empresa española INCLAM, S.A., por lo que nos pusimos en contacto con Don Alfonso Andrés Urrutia, representante de la empresa, quien nos facilitó una licencia gratuita de 50 usos de la versión académica del software, que utilizamos para realizar las primeras simulaciones que se reportan en el Capítulo 4.

Paralelamente, el 20 de diciembre de 2007, el Fondo Mixto de Fomento a la Investigación Científica y Tecnológica CONACYT - Gobierno del Estado de Tabasco, emitió la Convocatoria Especial 2007-02: Redes Académicas para la Atención de las Prioridades de Tabasco Relacionadas con Fenómenos Potencialmente Catastróficos, cuyo propósito fue: *Apoyar proyectos que generen conocimiento de frontera, que atiendan los problemas, necesidades u oportunidades del Estado, consoliden grupos de investigación y de tecnología y fortalezcan la competitividad científica y tecnológica del sector académico y productivo del Estado, para lograr un mayor desarrollo, armónico y equilibrado.* Nuestro grupo inicial respondió a dicha convocatoria y nos unimos a otros colegas para hacer una propuesta de proyecto de investigación sobre inundaciones. En agosto de 2008, se aprobó finalmente el proyecto RASDET, cuyo responsable quedó la M.A. Candita Victoria Gil Jiménez, ex-rectora de nuestra Universidad. Las instituciones participantes en este proyecto son: La Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, El Colegio de Posgraduados Campus Tabasco y El Colegio de la Frontera Sur Unidad Villahermosa, aunque posteriormente se incorporaron otras instituciones regionales.

La RASDET tiene como propósito articular y desarrollar tres ejes de acción: 1. Conocimiento e influencia de fenómenos globales. 2. Comprensión y articulación de las variables fisiográficas, hidrológicas y ecológicas. 3. Dinámica social en la génesis, atención y recuperación de desastres. En cada eje se integró el tema legislación y normatividad. También en cada eje de acción se aprobaron diversos sub-proyectos y el nuestro "Modelación de las Variables Hidrológicas en la Cuenca del Grijalva" se aprobó dentro del eje 2. Ya con financiamiento, pudimos otorgar beca

tesis a estudiantes de licenciatura y maestría que contribuyeron a generar diversos resultados, así mismo pudimos adquirir dos licencias de GUADFlow 2D ilimitadas celdas, que utilizamos para generar resultados que se reportan en los capítulos 5 y 6.

Nuestros más sinceros agradecimientos al Dr. Alberto Manuel Ortega Y Venzor, Director General de la Dirección General de Vinculación Estratégica del INEGI, por habernos autorizado el uso del modelo digital de elevación de alta resolución Lidar, Tipo Superficie y Tipo Terreno, con número de registro: DGAD-0062/2009; de la ciudad de Villahermosa, Tabasco, México.

También nuestros agradecimientos a los demás colaboradores del subproyecto: Dr. Gamaliel Blé González, Dr. Eugenio Gómez Reyes, M.C. Emmanuel Munguía Balvanera, M.I.H. Pedro Antonio Sánchez Ruiz, L.M. Juan Carlos González Aguirre y M.C. Edilberto Nájera Rangel. Al Dr. José G. Fabián Rivera Trejo y al Ing. Adolfo Cornelio Palacio, Profesores-Investigadores de la División Académica de Ingeniería y Arquitectura de la UJAT, al Ing. Víctor Rubén Concha y Concha, Técnico Superior del Área Técnica de la Dirección Local en Tabasco de la CONAGUA, a la Dra. María Elena Vázquez Cendón de la Universidad de Santiago de Compostela, y a los Ing. Alfonso Andrés Urrutia y Martín Jesús Rodríguez Pallarés de la empresa INCLAM, S.A., por las asesorías que brindaron a los diversos proyectos que se desarrollaron y cuyos resultados se recopilan en esta obra.

Finalmente, es importante resaltar que logramos el propósito de replicar la inundación de octubre-noviembre de 2007 con la simulación numérica y con una tolerable aproximación, por lo que el modelo numérico está validado. Este modelo validado se puede utilizar para realizar hipótesis varias, tales como: modelar obras de protección, elaborar mapas de riesgo, simular diferentes grados de inundación, simular bloqueo de los ríos por elevación del mar, entre muchas otras.

Capítulo 1

Planteamiento del Problema

1.1. Descripción del problema de estudio

Una inundación es la ocupación del agua en zonas que habitualmente están libres de ésta, que ocurre por desbordamiento de ríos, por subida de las mareas por encima del nivel habitual o por avalanchas causadas por tsunamis. Por ejemplo, el Huracán Katrina arrasó entre el 27 y el 31 de agosto del 2005 la ciudad de Nueva Orleans y otras ciudades costeras de los estados de Luisiana y Misisipi, causando 1619 muertos [60]. En Nueva Orleans el agua alcanzó 9 metros en algunos barrios y la ciudad tuvo que ser totalmente evacuada [60]. En el país y en particular en Tabasco en 2007, se sufrió la más grave inundación que ha enfrentado el estado en 50 años y que afectó a casi el 80 % del territorio tabasqueño [32, 33, 49, 60]. Las causas fueron las fuertes lluvias que originaron la mayor crecida histórica en los ríos Grijalva, Carrizal y Usumacinta, entre otros, y la desfogación de las presas Peñitas y Malpaso. En algunas colonias de Villahermosa como Gaviotas y La Manga, el agua alcanzó hasta los 4 metros de altura [18].

Las inundaciones por exceso de lluvias o desbordamiento de ríos son un problema común en la mayor parte de las planicies de nuestro país. En Tabasco, este problema es ya parte de nuestra cultura, la cultura del agua, mismo que ha dejado pérdidas millonarias y ha retrasado el desarrollo económico y dañado severamente la infraestructura del estado [10].

Villahermosa ha sufrido inundaciones cíclicas [10], sin embargo, las últimas inundaciones que ocurrieron en los años 2007, 2008, 2009, 2010 y 2011 han sido especialmente severas y devastadoras [32, 33, 49], por lo que urge estudiar este fenómeno desde diferentes puntos de vista, identificar los factores que lo originan con la finalidad de obtener información para el establecimiento de estrategias y políticas públicas de prevención, mitigación y coexistencia con las inundaciones. Una forma de estudiar este fenómeno es mediante la modelación matemática, en particular, con el estudio y aplicación de las ecuaciones de Navier-Stokes [11, 59] que se revisa en la sección 2.2 del Capítulo 2, o de las ecuaciones de Saint-Venant que modelan flujos de aguas poco profundas [8, 20, 56, 57], como es el caso que nos interesa. Estas últimas ecuaciones también se les llama “ecuaciones de las aguas someras” (*shallow water equations*). Estas ecuaciones se revisan a detalle en la sección 2.4 del Capítulo 2, y a continuación se presenta la versión en dos dimensiones espaciales que es uno de los objetos de estudio de este trabajo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) + \frac{\partial(huv)}{\partial y} &= -gh \left(\frac{\partial d}{\partial x} + \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \right), \\ \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) &= -gh \left(\frac{\partial d}{\partial y} + \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \right), \end{aligned}$$

donde la primera ecuación es la “ley de conservación de masa” o “ecuación de continuidad”, y las otras dos se les llama “las ecuaciones dinámicas” y describen la cantidad de movimiento del fluido bajo estudio, en este caso, la cantidad de movimiento del agua. La variable de estado $h = h(x, y, t)$ representa el tirante, también se dice calado, y es la altura del agua en cada punto (x, y) del dominio de interés en el tiempo $t > 0$, donde el dominio de interés se denotará por $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, es decir, Ω es la proyección del dominio ocupado por el fluido sobre el plano horizontal xy . Las otras variables de estado $q_1 = hu$ y $q_2 = hv$, se les

llama variables conservativas o descargas unitarias, donde $u = u(x, y, t)$ y $v = v(x, y, t)$ son las componentes del vector velocidad horizontal promedio del agua en cada punto $(x, y) \in \Omega$ en el instante $t > 0$. La función $d = d(x, y)$ describe la topografía del terreno y en este caso es la elevación del terreno sobre el punto $(x, y) \in \Omega$ con respecto al nivel medio del mar (véase figura 1.1), y $n = n(x, y)$ es el coeficiente de rugosidad de Manning sobre la superficie del terreno en cada punto $(x, y) \in \Omega$. Algunas veces es conveniente expresar $\partial d / \partial x$ y $\partial d / \partial y$ con respecto a una función $H(x, y)$, donde $H(x, y)$ representa la distancia al fondo desde un nivel de referencia fijo $z = z_0$ y con sentido positivo hacia abajo. En tal caso,

$$\frac{\partial d}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial d}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Más detalles en la sección 2.4 del Capítulo 2.

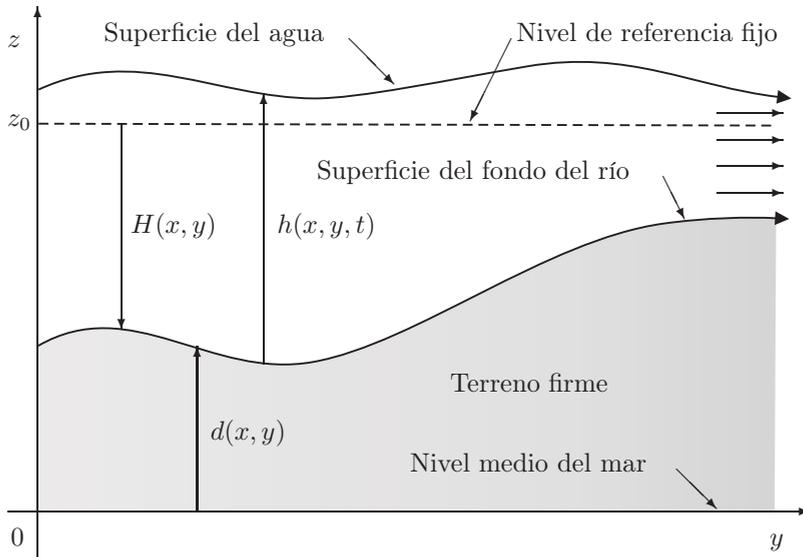


Figura 1.1: Sección longitudinal del dominio ocupado por el fluido en un plano vertical yz con $x = x_0$ fijo y desde una referencia fija en el nivel $z = z_0$. Se considera el plano xy correspondiente al nivel $z = 0$, como el nivel medio del mar.

Las ecuaciones de Saint-Venant son un caso concreto de sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales hiperbólica, cuasi-lineal y con término independiente, que no tienen solución analítica y deben ser resueltas por métodos numéricos [53, 56, 57]. Entre los métodos numéricos que se dispone en la literatura para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales parciales como el sistema de Saint-Venant, están el método de diferencias finitas, método de elementos finitos, métodos espectrales, y el método de volúmenes finitos. El método de diferencias finitas fue de los primeros que se desarrollaron históricamente, debido a la sencillez del planteamiento de las ecuaciones, y se usan mayoritariamente en los softwares comerciales. Sin embargo, desde el punto de vista numérico, la estabilidad de la solución puede estar comprometida. El método de elementos finitos presenta problemas si coexisten regímenes subcrítico y supercrítico [44]. Recientemente se ha desarrollado el método de volúmenes finitos, que se basa en la forma integral de las ecuaciones de conservación y presenta características muy atractivas para superar las dificultades de otros métodos [2, 8, 21, 34, 56, 57]. La modelación de planas inundables presenta una característica singular en comparación con otros problemas hidrodinámicos bidimensionales. Entre estas características destacan la geometría irregular de los contornos, la importancia de la pendiente y la rugosidad del lecho, la existencia de estructuras hidráulicas que imponen condiciones internas, la presencia frecuente de frentes de onda y resaltos hidráulicos y la necesidad de modelar ciclos de secado y mojado. La ventaja comparativa de un esquema sobre otro radicará más en la flexibilidad que tenga para adaptarse a estas singularidades que en la relativa precisión con la que pueda resolver los problemas numéricos de la integración de las ecuaciones [5].

Un modelo numérico (software) que implementa el método de volúmenes finitos para resolver las ecuaciones de Saint-Venant en dos dimensiones espaciales (2D) es el GUADFlow 2D, desarrollado en convenio entre el Área de Mecánica de Fluidos de la Universidad de Zaragoza, España y la empresa también española INCLAM, S.A., especializada en ingeniería del agua [5, 39, 40, 41, 42]; y es el que se propone utilizar en este proyecto.

GUADFlow 2D fue diseñado para el análisis de ondas de avenida provocadas por la lluvia o por la destrucción gradual o espontánea de presas y muros de contención de grandes depósitos de agua. Permite obtener resultados reales tanto en regímenes estacionarios supercríticos, subcríticos o mixtos. El módulo de inicio incluye todas las condiciones posibles (seco, mojado o partiendo de una simulación anterior). GUADFlow 2D ha sido probado con simulaciones de eventos reales y con ejemplos monitorizados en laboratorios de mecánica de fluidos [5, 40].

Años atrás, se utilizaban modelos unidimensionales demasiado simples. Tan solo tenían en cuenta el movimiento del agua confinada en el cauce del río. Eran, por tanto, insuficientes para captar el flujo del agua en todas las direcciones. Mediante GUADFlow 2D, se puede simular no solamente el movimiento en el río sino también la inundación de llanuras de cauces naturales y zonas urbanas anexas. Introduciendo la variación temporal, el software hace posible la simulación del avance de una onda de crecida sobre el cauce. Con todo esto, al hacer simulaciones en una computadora personal, desde la pantalla se visualiza con exactitud el avance del agua [39].

La aplicación exitosa de este modelo numérico, por ejemplo, en el estudio hidráulico de la inundación del núcleo urbano de Fraga, Huesca, España, provocado por el desborde del río Cinca en su cruce por esta ciudad [40], permite suponer que GUADFlow 2D puede ser adaptado e implementado al caso de Tabasco para simular eficientemente las inundaciones.

El primer trabajo enfocado a estudiar la simulación numérica de flujos de ríos que cruzan por la ciudad de Villahermosa, Tabasco, México, usando el software GUADFlow 2D, es el de González-Aguirre (2010) [22]. González-Aguirre aborda el problema de simular numéricamente el flujo del río Grijalva en su cruce por la ciudad de Villahermosa, en particular, el flujo de los ríos que cruzan en la sección que comprende la ortofoto E15D11A2 del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI). Aporta un avance significativo en el estudio y análisis del problema: resuelve parcialmente el problema de ajustar la topografía y la batimetría sobre el dominio de interés, y reporta simulaciones nu-

méricas con diferentes escenarios (inicio en seco, con valor constante y desde un resultado anterior). El inconveniente detectado en el trabajo de González-Aguirre es que utilizó Datos Tipo Terreno (Licencia DGAD-0062/2009, DVD con número de identificación: MDTLVIHR508131) que no muestran con detalle la infraestructura urbana y la vegetación del lugar, y no pudo tener acceso a datos batimétricos disponibles, ni pudo realizar trabajos de campo para obtener las batimetrías que se necesitaban.

El siguiente trabajo que aborda el problema de la simulación numérica del flujo de una sección del río Grijalva es el de Cruz-Vázquez (2012) [16]. Él reporta una primera calibración del coeficiente de fricción o coeficiente de rugosidad de Manning, en la sección que comprende la ortofoto E15D11A2 y parte de la ortofoto E15B81D4; así como la generación de campos de velocidad del flujo de un tramo del río Grijalva para un tiempo específico.

En este trabajo se aborda con mayor profundidad la simulación numérica del flujo del río Grijalva en su cruce por la ciudad de Villahermosa, y simula numéricamente la inundación de la ciudad por el desborde de este río. Para este propósito, se empleó un Modelo Digital Tipo Superficie que se caracteriza por un tamaño de celda de $5 \times 5 \text{ m}^2$ y ortofoto digital de 1 m de resolución en todo el tramo de estudio. El empleo de una herramienta bidimensional permitió estudiar con mucha mayor precisión los niveles y velocidades que alcanza el flujo de agua en las márgenes de inundación de la zona de interés.

1.2. Datos para la simulación numérica

Los datos que se utilizaron para resolver numéricamente las ecuaciones de Saint-Venant y generar las simulaciones con el modelo numérico GUADFlow 2D que se reportan en el Capítulo 6, fueron los siguientes:

1. **Terreno.** Zona limitada por la ortofoto E15D11A2 y parte de la ortofoto E15B81D4 de la base de Datos Tipo Superficie (Licencia DGAD-0062/2009, DVD con número de identificación: MDSL-VIHR508130), que muestran mejor resolución de la infraestructu-

ra de la zona urbana, como son las calles y los edificios. El fichero digital que contiene el terreno es una matriz cuya entrada d_{ij} es el valor de la elevación del terreno sobre el nivel medio del mar en cada celda de tamaño $5 \times 5 \text{ m}^2$ sobre el dominio Ω . La visualización gráfica del terreno de interés se muestra en la figura 1.2. El fichero está en formato de ESRI en código ASCII txt.

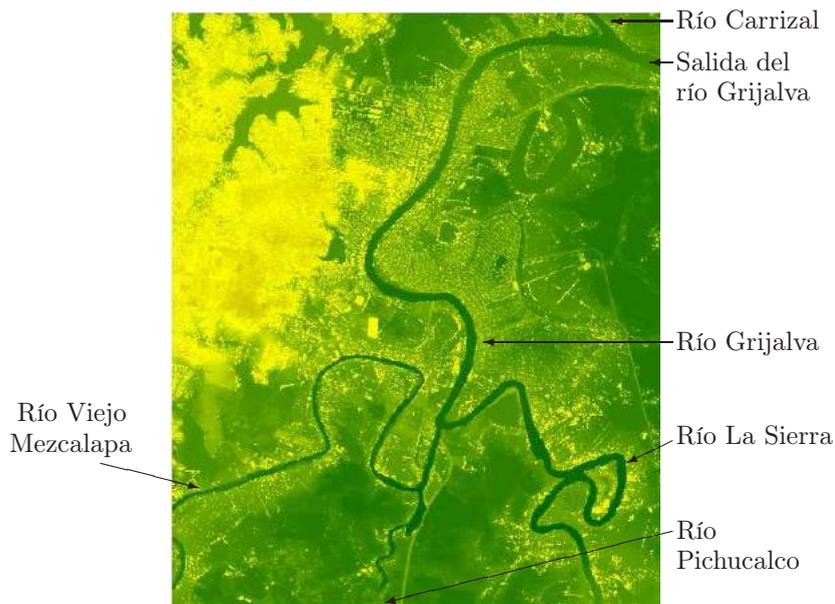


Figura 1.2: Visualización del modelo digital tipo superficie del terreno de interés que contiene la sección del río Grijalva y sus afluentes en su cruce por la ciudad de Villahermosa, Tabasco, México. Cortesía del INEGI, 2009.

2. **Mapa de rugosidades.** Como una primera aproximación se usó un valor constante para el coeficiente de rugosidad de Manning dado por $n(x, y) = 0.03$ para todo $(x, y) \in \Omega$ (validado por Cruz-Vázquez (2012) [16]).
3. **Condición de contorno aguas arriba.** Se reportan dos experimentos numéricos, donde las condiciones de contorno aguas arriba en cada caso fueron:

Experimento 1. Se introdujeron hidrogramas $Q(t)$ en las entradas de los ríos que alimentan el río Grijalva, iniciando desde 0 y creciendo gradualmente hasta que alcanzaron estabilidad de acuerdo a los datos que se muestran en la tabla 1.1. La estabilidad que alcanzó el modelo es aproximadamente la situación que se tuvo del día 1 de octubre de 2007 de acuerdo con los datos obtenidos en la Dirección Local en Tabasco de la Comisión Nacional del Agua (CONAGUA), donde se reportó para el río Grijalva en la estación hidrométrica Gaviotas un gasto de $316 \text{ m}^3/\text{s}$ y un nivel del agua de 3.18 m sobre el nivel medio del mar. Este gasto se repartió proporcionalmente en las entradas de los ríos Viejo Mezcalapa, Pichucalco y La Sierra, respectivamente. El gasto que se tomó para el río La Sierra es el que se reporta en la estación hidrométrica Pueblo Nuevo, y el gasto que se tomó para el río Carrizal es el que se reporta en la estación hidrométrica González (véase la tabla 6.1 del Capítulo 6).

Río	Caudal (m^3/s)
Viejo Mezcalapa	20
Pichucalco	30
La Sierra	266
Carrizal	211

Tabla 1.1: Datos utilizados para generar hidrogramas de entrada que se usaron para estabilizar el modelo numérico, que aproximó la situación en que se encontraban los ríos en la zona de interés el 1 de octubre de 2007. La suma de los caudales de entrada en los ríos Viejo Mezcalapa, Pichucalco y La Sierra es $316 \text{ m}^3/\text{s}$, que fue lo que reporta la Dirección Local en Tabasco de la CONAGUA para esa fecha para el río Grijalva en la estación hidrométrica Gaviotas [13].

Experimento 2. Se introdujeron ahora hidrogramas $Q(t)$ en las entradas de los ríos en la zona de interés, iniciando con caudales aproximados que se tenían del día 1 de octubre de 2007, y luego comienzan a crecer linealmente pasando por los caudales que se muestran en la tabla 1.2 cada 24 horas. Más detalles en el Capítulo 6.

Río	Caudal (m ³ /s)					
	1/oct.	23/oct.	28/oct.	29/oct.	30/oct.	31/oct.
V. Mezcalapa	20	72	53	157	214	219
Pichucalco	30	110	80	235	317	329
La Sierra	266	660	878	1008	1054	1070
Carrizal	211	312	448	435	861	1466

Tabla 1.2: Datos utilizados para generar hidrogramas de entrada de los ríos en la zona de interés, con el propósito de generar una inundación de la ciudad de Villahermosa, Tabasco, similar a la que se dió a finales de octubre de 2007. Los hidrogramas se generaron iniciando con la situación aproximada que se tenía el 1 de octubre, y luego fueron creciendo gradualmente pasando por las situaciones aproximadas de los días 23, 28, 29, 30 y 31, cada 24 horas hasta completar 5 días. Los caudales que reporta la Dirección Local en Tabasco de la CONAGUA en estas fechas para el río Grijalva en la estación hidrométrica Gaviotas son 316, 842, 1011, 1400, 1586 y 1618 m³/s, respectivamente [13].

4. **Condición de contorno aguas abajo.** Esta condición se estableció en la salida del río Grijalva en la zona de interés, y en cada uno de los experimentos fueron:

Experimento 1. Vertedero, es decir, se impone en cada una de las celdas en la frontera correspondiente (véase figura 1.2) un caudal de salida que satisface

$$Q = k(Z - Z_l)^{3/2},$$

donde Z es la cota mojada, Z_l es la cota superior del labio del vertedero que se tomó como 2.50 m, y k es el coeficiente de vertedero que se tomó como 2.0.

Experimento 2. El hidrograma de salida $Q(t)$ en el río Grijalva (figura 1.2), inicia con un caudal de 389 m³/s que corresponde el día 1 de octubre de 2007 de la tabla 1.3, y crece linealmente en el tiempo t pasando por cada uno de los demás puntos de dicha tabla en periodos de 24 horas, hasta alcanzar el caudal reportado del día 31 de octubre del mismo año que fue de 2720 m³/s. Los datos

se obtuvieron en la Dirección Local en Tabasco de la CONAGUA y corresponden al caudal del río Grijalva tomado en la estación hidrométrica Porvenir en las fechas indicadas.

Río	Caudal (m ³ /s)					
	1/oct.	23/oct.	28/oct.	29/oct.	30/oct.	31/oct.
Grijalva	389	837	1422	1522	1601	2720

Tabla 1.3: Datos que determinan el hidrograma de salida en el río Grijalva para el experimento 2. Dichos datos fueron tomados en la estación hidrométrica Porvenir en octubre de 2007. Cortesía de la Dirección Local en Tabasco de la CONAGUA [13].

- Definición de las condiciones iniciales de simulación.** Las condiciones iniciales en cada caso fueron:

Experimento 1. Inicio en seco, es decir,

$$h(x, y, 0) = 0, \quad u(x, y, 0) = 0 \quad \text{y} \quad v(x, y, 0) = 0,$$

para todo $(x, y) \in \Omega$.

Experimento 2. Se inició con las condiciones de estabilidad que alcanzó el modelo en el experimento 1, que como se dijo antes, corresponde a la situación aproximada en que se encontraban los ríos en la zona de interés el 1 de octubre de 2007.

1.3. Subproblemas a resolver

Los problemas que se han estudiado hasta ahora son:

- Ajustar la batimetría del río Grijalva y sus afluentes en la zona de interés limitada por la ortofoto E15D11A2 y parte de la ortofoto E15B81D4 (véase figura 1.2) modificando la base de Datos Tipo Superficie (DGAD-0062/2009), que muestran mejor resolución de la infraestructura de la zona urbana, como son las calles y los edificios.

2. Con la batimetría ajustada del río Grijalva y sus afluentes en la zona de interés, generar simulaciones numéricas con el software GUADFlow 2D para los siguientes casos:
 - 2.1. Generar una situación aproximada que se tuvo en la zona de interés (figura 1.2) según CONAGUA del día 1 de octubre de 2007. CONAGUA reporta para esa fecha que el río Grijalva en la estación hidrométrica Gaviotas llevaba un gasto de $316 \text{ m}^3/\text{s}$ y su nivel del agua era de 3.18 m sobre el nivel medio del mar, es decir, se encontraba muy por debajo de su nivel crítico que es de 5.42 m sobre el nivel medio del mar [14].
 - 2.2. Mostrar mediante la simulación numérica un escenario aproximado de la inundación que sufrió la ciudad de Villahermosa, Tabasco, en la zona de interés (figura 1.2) durante el mes de octubre de 2007, en particular, de los días 23, 28, 29, 30 y 31 de octubre de ese año.

El primer problema se aborda con detalle en el Capítulo 5 y el segundo problema se aborda en el Capítulo 6.

Como se dijo antes, para generar las simulaciones numéricas del flujo del río Grijalva en su cruce por la ciudad de Villahermosa, se propone utilizar el software GUADFlow 2D. Este software está basado en la solución numérica de las ecuaciones de Saint-Venant en dos dimensiones por el método de volúmenes finitos.

En el Capítulo 3 se reporta una breve introducción al método de volúmenes finitos y su aplicación para discretizar las ecuaciones de Saint-Venant en dos dimensiones espaciales. En el Capítulo 4 se reportan ejemplos de pruebas numéricas cuyo propósito es validar el software GUADFlow 2D, con la intención de verificar que el software está en condiciones de desarrollar las tareas esperadas, que es la de simular numéricamente la inundación de la ciudad de Villahermosa, Tabasco, que se realiza en el Capítulo 6.

Capítulo 2

Ecuaciones de Movimiento

En este capítulo se revisan las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos siguiendo la referencia [11]. Estas ecuaciones se obtienen de las leyes de conservación de la masa, el momento y la energía. Se inicia con las hipótesis más simples que llevan a las ecuaciones de Euler¹ para un fluido perfecto, es decir, fluidos que no sufren efectos viscosos.

¹Leonhard Paul Euler (1707–1783) conocido como Leonhard Euler, fue un matemático y físico suizo cuyos trabajos más importantes se centraron en el campo de las matemáticas puras, pero también hizo aportaciones a la astronomía, mecánica, óptica y acústica. Él mostró cómo utilizar la segunda ley de Newton (originalmente aplicable sólo a masas puntuales) para determinar la aceleración de cualquier parte infinitesimal del fluido, gracias a que descubrió el concepto moderno de presión, lo que le permitió calcular la resultante de estas fuerzas, de contacto, ejercidas por el resto del fluido considerado como medio continuo, sobre esa masa elemental. Fue Euler el que descubrió en 1755, las leyes que rigen el movimiento de los fluidos ideales, mucho antes de su descubrimiento de las leyes que gobiernan el movimiento de los cuerpos rígidos [30].

2.1. Ecuaciones de Euler

Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ una región que se encuentra lleno de algún tipo de fluido, agua por ejemplo. Sea $\mathbf{x} \in D$, $t \in [0, T]$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, y se considera la partícula de fluido que se mueve a través de \mathbf{x} al tiempo t con velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, donde $\mathbf{u} : D \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$, véase figura 2.1.

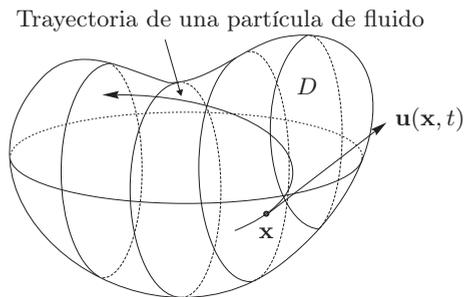


Figura 2.1: Partícula de fluido fluyendo en una región $D \subset \mathbb{R}^3$.

Para deducir las ecuaciones se parte de tres principios básicos:

1. La masa no se crea ni se destruye.
2. La tasa de cambio de momento de una porción del fluido es igual a la fuerza que se le aplica (segunda ley de Newton²).
3. La energía no se crea ni se destruye.

²Sir Isaac Newton (1643–1727) fue físico, filósofo, teólogo, inventor, alquimista y matemático inglés, autor de los *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, más conocidos como los *Principia*, donde describió la ley de la gravitación universal y estableció las bases de la mecánica clásica mediante las leyes que llevan su nombre. Comparte con Leibniz (1646–1716) el crédito por el desarrollo del cálculo integral y diferencial, que utilizó para formular sus leyes de la física. También contribuyó en otras áreas de la matemática, desarrollando el teorema del binomio y las fórmulas de Newton-Cotes, entre otras.

2.1.1. Conservación de la masa

Sea $W \subset D$ una subregión arbitraria fija en D (W no cambia con el tiempo). La masa m del fluido en W al tiempo t está dada por

$$m(W, t) = \int_W \rho(\mathbf{x}, t) dV ,$$

donde ρ es la densidad del fluido.

Así que la tasa de cambio de la masa en W con respecto al tiempo t es

$$\frac{d}{dt} m(W, t) = \frac{d}{dt} \int_W \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV .$$

La frontera de W , denotada por ∂W se supone una superficie suave, \mathbf{n} el vector normal exterior unitario definido en todos los puntos de ∂W , y dA el elemento de área sobre ∂W . La tasa del flujo de volumen a través de ∂W , por unidad de área es $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ y la tasa de flujo de masa por unidad de área es $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, véase figura 2.2.

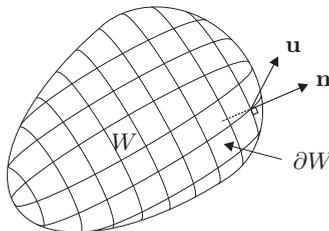


Figura 2.2: La masa que cruza la frontera de W por unidad de tiempo es igual a la integral de superficie de $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ sobre la ∂W .

La ley de la conservación de la masa se puede escribir más precisamente como: *La tasa del incremento de masa en W es igual a la tasa a la cual la masa cruza ∂W , hacia el interior de W , es decir*

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{\partial W} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA . \quad (2.1)$$

Esta ecuación se conoce como la **forma integral de la ley de conservación de la masa**.

Al aplicar el teorema de la divergencia de Gauss³ al segundo miembro de (2.1) se tiene

$$-\int_{\partial W} (\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, dA = -\int_W \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \, dV,$$

por lo que (2.1) toma la forma

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \, dV = -\int_W \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \, dV,$$

de donde

$$\int_W \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \right] dV = 0, \quad \text{para todo } W \subseteq D.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad (2.2)$$

que se llama **la forma diferencial de la ley de conservación de la masa o la ecuación de continuidad**.

Si ρ y \mathbf{u} no son suficientemente suaves para justificar los pasos que conducen a la forma diferencial de la ley de conservación de la masa, entonces la que se emplea es la forma integral (2.1).

2.1.2. Balance de momentos

Sea $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ la trayectoria que sigue una partícula de un fluido tal que su campo de velocidades está dado por

$$\mathbf{u}(x(t), y(t), z(t), t) = \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t) \right),$$

³Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) fue matemático, astrónomo, geodésico y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, el álgebra, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Es considerado “El príncipe de las matemáticas” y “El matemático más grande desde la antigüedad”.

esto es,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}.$$

La aceleración de una partícula del fluido es

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t).$$

Aplicando la regla de la cadena

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

Usando la notación

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{u}_x = \partial_x \mathbf{u}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \mathbf{u}_z = \partial_z \mathbf{u}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \mathbf{u}_y = \partial_y \mathbf{u}$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u}_t = \partial_t \mathbf{u},$$

y considerando que

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)),$$

entonces

$$\mathbf{a}(t) = u\mathbf{u}_x + v\mathbf{u}_y + w\mathbf{u}_z + \mathbf{u}_t,$$

o bien

$$\mathbf{a}(t) = \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u},$$

donde

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}.$$

El operador definido por

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla,$$

se llama **derivada material**, y surge al suponer que el fluido está en movimiento y que las posiciones de las partículas del fluido cambian

con respecto al tiempo t . De hecho, si $f(x, y, z, t)$ es una función de la posición y el tiempo (escalar o vectorial), entonces por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(x(t), y(t), z(t), t) &= \partial_t f + \mathbf{u} \cdot \nabla f \\ &= \frac{Df}{Dt}(x(t), y(t), z(t), t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para cualquier continuo D , las fuerzas que actúan sobre una subregión W son de dos tipos. En primer lugar, están las fuerzas de tensión que son las fuerzas que actúan a través de la superficie de la subregión W y que son originadas por la acción del resto del continuo D . En segundo lugar, hay fuerzas externas sobre el cuerpo como las fuerzas de gravedad o de un campo magnético, que ejercen una fuerza por unidad de volumen en el continuo.

En este trabajo se define un **fluido ideal** como un fluido que tiene la siguiente propiedad: Para cualquier movimiento del fluido existe una función $p(\mathbf{x}, t)$ llamada la presión tal que si S es una superficie en el fluido con un vector normal unitario \mathbf{n} , la fuerza de tensión ejercida a través de la superficie S por unidad de área en el punto $\mathbf{x} \in S$ es $p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$, es decir,

$$\text{La fuerza a través de } S \text{ por unidad de área} = p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}.$$

Note que la fuerza está en la dirección de \mathbf{n} y que la fuerza actúa ortogonalmente sobre la superficie S , esto es, no existen fuerzas tangenciales (véase figura 2.3)

Si W es una región en el fluido en un instante t , la fuerza total ejercida sobre el fluido dentro de W por medio de tensiones sobre su frontera es

$$S_{\partial W} = \{\text{fuerza sobre } W\} = - \int_{\partial W} p \mathbf{n} dA,$$

donde el signo negativo es por que el vector \mathbf{n} apunta hacia afuera. Si \mathbf{e} es cualquier vector fijo en el espacio, entonces

$$\mathbf{e} \cdot S_{\partial W} = - \int_{\partial W} (p \mathbf{e}) \cdot \mathbf{n} dA,$$

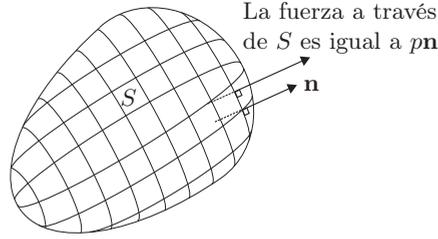


Figura 2.3: Fuerzas de presión a través de una superficie S .

y por el teorema de la divergencia de Gauss se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot S_{\partial W} &= - \int_W \operatorname{div}(p \mathbf{e}) dV = - \int_W \nabla \cdot (p \mathbf{e}) dV \\ &= - \int_W \nabla p \cdot \mathbf{e} dV = \left(- \int_W \nabla p dV \right) \cdot \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Dado que \mathbf{e} es arbitrario, resulta que

$$S_{\partial W} = - \int_W \nabla p dV. \quad (2.4)$$

Por otro lado, si $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ denota las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo por unidad de masa, entonces la fuerza total sobre W será

$$\mathbf{B} = \int_W \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV.$$

Así que sobre cualquier subregión W de material del fluido se tendrá

$$\text{fuerza por unidad de volumen} = -\nabla p + \rho \mathbf{b}.$$

Por la segunda ley de Newton ($f = ma$) se tiene que

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{b}. \quad (2.5)$$

Esta ecuación se conoce como **la forma diferencial de la ley de balance de momentos**.

Enseguida se obtendrá la forma integral de la ecuación de balance de momentos de dos maneras. La derivaremos primero como una deducción de la forma diferencial y después utilizando los principios básicos.

Al sustituir la derivada material en la forma diferencial de la ley de balance de momentos (2.5) se tiene que

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \rho \mathbf{b}, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \rho \mathbf{b}.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Pero

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} &= \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \mathbf{u}, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \mathbf{u}.\end{aligned}\quad (2.7)$$

De (2.6) y (2.7) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \mathbf{u} &= -\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \rho \mathbf{b}, \\ \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \mathbf{u} - \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \rho \mathbf{b}.\end{aligned}$$

De la ecuación de continuidad (2.2) se obtiene que

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} = -\text{div}(\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} - \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \rho \mathbf{b}.$$

Si \mathbf{e} es un vector fijo en el espacio tridimensional, al multiplicarlo en cada miembro de la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{e} \cdot \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} &= -\text{div}(\rho \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}) - \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{e} \\ &\quad - (\nabla p) \cdot \mathbf{e} + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{e},\end{aligned}$$

pero como

$$\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{e} = \rho [(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}]$$

$$\begin{aligned}
&= \rho [(u\mathbf{u}_x + v\mathbf{u}_y + w\mathbf{u}_z) \cdot \mathbf{e}] \\
&= \rho [u(u_x, v_x, w_x) + v(u_y, v_y, w_y) + w(u_z, v_z, w_z)] \cdot \mathbf{e} \\
&= \rho \begin{pmatrix} uu_x + vu_y + wu_z \\ uv_x + vv_y + vw_z \\ uw_x + vw_y + ww_z \end{pmatrix}^T \cdot (e_1, e_2, e_3) \\
&= \rho \left[\begin{array}{l} (uu_x + vu_y + wu_z) e_1 + (uv_x + vv_y + vw_z) e_2 \\ + (uw_x + vw_y + ww_z) e_3 \end{array} \right] \\
&= \rho \left[\begin{array}{l} u(u_x e_1 + v_x e_2 + w_x e_3) + v(u_y e_1 + v_y e_2 + w_y e_3) \\ + w(u_z e_1 + v_z e_2 + w_z e_3) \end{array} \right] \\
&= \rho \left[\begin{array}{l} u \frac{\partial}{\partial x} (ue_1 + ve_2 + we_3) + v \frac{\partial}{\partial y} (ue_1 + ve_2 + we_3) \\ + w \frac{\partial}{\partial z} (ue_1 + ve_2 + we_3) \end{array} \right] \\
&= \rho \left[u \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}) + v \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}) + w \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}) \right] \\
&= \rho \left[(u, v, w) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}), \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}), \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}) \right) \right] \\
&= \rho [\mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})] \\
&= (\rho \mathbf{u}) \cdot \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}) \\
&\equiv \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})) - \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}),
\end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{e} \cdot \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} &= -\operatorname{div}(\rho \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}) - \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})) \\
&\quad + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}) - (\nabla p) \cdot \mathbf{e} + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} \\
&= -\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})) - (\nabla p) \cdot \mathbf{e} + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} \\
&= -\operatorname{div}[p\mathbf{e} + (\rho \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})] + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}.
\end{aligned}$$

Si W es un volumen fijo en el espacio, la tasa de cambio de momento

en la dirección de \mathbf{e} en W es

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \frac{d}{dt} \int_W \rho \mathbf{u} dV &= \mathbf{e} \cdot \int_W \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} dV = \int_W \mathbf{e} \cdot \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} dV \\ &= - \int_W \operatorname{div} [p \mathbf{e} + (\rho \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})] dV \\ &\quad + \int_W \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} dV. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de la divergencia de Gauss se tiene

$$\mathbf{e} \cdot \frac{d}{dt} \int_W \rho \mathbf{u} dV = - \int_{\partial W} [p \mathbf{e} + (\rho \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})] \cdot \mathbf{n} dA + \int_W \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} dV.$$

Como

$$\begin{aligned} [p \mathbf{e} + (\rho \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})] \cdot \mathbf{n} &= (p \mathbf{e}) \cdot \mathbf{n} + (\rho \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{n} \\ &= p(\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}) + \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\ &= p(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) + \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \\ &= (p \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e} + \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}) \\ &= (p \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e} + (\rho \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e} \\ &= [p \mathbf{n} + (\rho \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})] \cdot \mathbf{e}, \end{aligned}$$

entonces

$$\mathbf{e} \cdot \frac{d}{dt} \int_W \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{e} \cdot \left\{ \int_{\partial W} - [p \mathbf{n} + (\rho \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})] dA + \int_W \rho \mathbf{b} dV \right\}$$

y dado que \mathbf{e} es arbitrario, se concluye que

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \mathbf{u} dV = - \int_{\partial W} [p \mathbf{n} + \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})] dA + \int_W \rho \mathbf{b} dV. \quad (2.8)$$

Esta ecuación es la **forma integral de balance de momentos** y la cantidad $p \mathbf{n} + \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$ se llama el **flujo de momento por unidad de área** que cruza ∂W .

Para el caso de balance de momento se puede proceder primero obteniendo la versión integral y a partir de ésta obtener la versión diferencial.

Se supondrá suficiente regularidad o diferenciabilidad en las funciones involucradas.

Como antes, sea D una región en la cual se tiene un fluido en movimiento. Sean $\mathbf{x} \in D$ y $\varphi : D \times [0, T] \rightarrow D$ donde $\varphi(\mathbf{x}, t)$ es la trayectoria seguida por la partícula que está en la posición \mathbf{x} en el momento $t = 0$. Se supone que φ es suficientemente diferenciable (suave) y que para t fijo φ es invertible. Sea además $\varphi_t : D \rightarrow D$ el mapeo $\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}, t)$, es decir con t fijo, el mapeo φ_t lleva cada partícula de fluido de su posición $\varphi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ al tiempo $t = 0$ a su posición $\varphi(\mathbf{x}, t)$ al tiempo t . A φ se le llama el mapeo del flujo del fluido. Si W es una región en D , entonces $\varphi_t(W) = W_t$ es el volumen W moviéndose con el fluido (véase figura 2.4). La forma integral “primitiva” de balance de momento establece que

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \mathbf{u} dV = S_{\partial W_t} + \int_{W_t} \rho \mathbf{b} dV, \quad (2.9)$$

esto es, la tasa de cambio de momento de una subregión W_t de fluido en movimiento es igual a la fuerza total (tensión superficial más fuerzas externas) que actúa sobre él. Estas dos formas de balance de momentos (2.5) y (2.9) son equivalentes. Para probar esto, se utiliza el teorema del cambio de variable

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \mathbf{u} dV = \frac{d}{dt} \int_W (\rho \mathbf{u})(\varphi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t) dV,$$

donde $J(\mathbf{x}, t)$ es el determinante Jacobiano del mapeo

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = (\xi_1(\mathbf{x}, t), \xi_2(\mathbf{x}, t), \dots, \xi_n(\mathbf{x}, t)),$$

dado por

$$J(\mathbf{x}, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

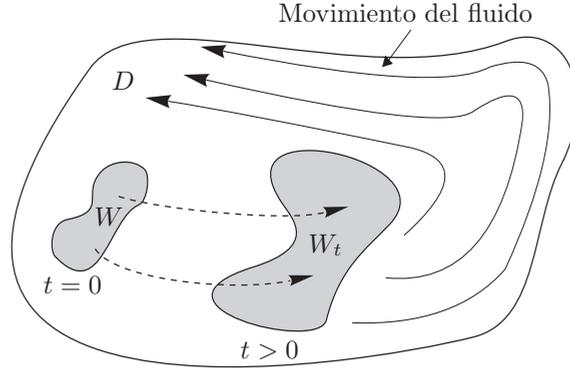


Figura 2.4: W_t es la imagen de W como partículas del fluido en W que fluyen en un tiempo t [11].

Como el volumen es constante se puede derivar bajo el signo de la integral, por lo que

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \mathbf{u} \, dV = \int_W \frac{\partial}{\partial t} [(\rho \mathbf{u})(\varphi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t)] \, dV. \quad (2.11)$$

Pero

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [(\rho \mathbf{u})(\varphi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t)] = \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u})(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \right] J(\mathbf{x}, t) + (\rho \mathbf{u})(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \left[\frac{\partial}{\partial t} J(\mathbf{x}, t) \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\phi(\mathbf{x}, t)),$$

se sigue de (2.3) que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u})(\varphi(\mathbf{x}, t), t) = \left(\frac{D}{Dt} \rho \mathbf{u} \right) (\varphi(\mathbf{x}, t), t). \quad (2.13)$$

Lema 2.1.1 *Sea*

$$J = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix},$$

donde f_{ij} son funciones que dependen de t . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \begin{vmatrix} f'_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f'_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & f'_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f'_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f'_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} \\ &+ \cdots + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f'_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f'_{nn} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

donde $f'_{ij} = \frac{df_{ij}}{dt}$.

Demostración. Se demostrará por inducción sobre n .

Para $n = 1$ es claro.

Si $n = 2$, entonces

$$J = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= f'_{11}f_{22} + f_{11}f'_{22} - f'_{21}f_{12} - f_{21}f'_{12} \\ &= (f'_{11}f_{22} - f'_{21}f_{12}) + (f_{11}f'_{22} - f_{21}f'_{12}) \\ &= \begin{vmatrix} f'_{11} & f_{12} \\ f'_{21} & f_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & f'_{12} \\ f_{21} & f'_{2,2} \end{vmatrix} \\ &= J^1 + J^2, \end{aligned}$$

donde J^j denota que la columna j de la matriz asociada a J está derivada con respecto a t . Se denota también por J_{1k} al determinante de la matriz obtenida al eliminar la primera fila y la columna k de la matriz asociada a J . En este sentido, por J_{1k}^j se entenderá que la columna j de la matriz asociada a J_{1k} está derivada con respecto a t .

Se supone que el lema se cumple para $n - 1$ con $n > 3$ y se demuestra para n .

Desarrollando J en la primera fila se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} f_{1k} J_{1k} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(f_{1k} \frac{dJ_{1k}}{dt} + f'_{1k} J_{1k} \right), \end{aligned}$$

y como J_{1k} es de orden $n - 1$ se le aplica la hipótesis de inducción para obtener que

$$\frac{dJ_{1k}}{dt} = \sum_{j=1}^{n-1} J_{1k}^j.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(f_{1k} \sum_{j=1}^{n-1} J_{1k}^j + f'_{1k} J_{1k} \right) \\ &= f_{11} J_{11}^1 + f_{11} J_{11}^2 + f_{11} J_{11}^3 + \cdots + f_{11} J_{11}^{n-1} + f'_{11} J_{11} \\ &\quad - f_{12} J_{12}^1 - f_{12} J_{12}^2 - f_{12} J_{12}^3 - \cdots - f_{12} J_{12}^{n-1} - f'_{12} J_{12} \\ &\quad + f_{13} J_{13}^1 + f_{13} J_{13}^2 + f_{13} J_{13}^3 + \cdots + f_{13} J_{13}^{n-1} + f'_{13} J_{13} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+1} f_{1n} J_{1n}^1 + (-1)^{n+1} f_{1n} J_{1n}^2 + (-1)^{n+1} f_{1n} J_{1n}^3 \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+1} f_{1n} J_{1n}^{n-1} + (-1)^{n+1} f'_{1n} J_{1n} \\ &= f'_{11} J_{11} + f_{11} J_{11}^1 + f_{11} J_{11}^2 + f_{11} J_{11}^3 + \cdots + f_{11} J_{11}^{n-1} \\ &\quad - f_{12} J_{12}^1 - f'_{12} J_{12} - f_{12} J_{12}^2 - f_{12} J_{12}^3 - \cdots - f_{12} J_{12}^{n-1} \\ &\quad + f_{13} J_{13}^1 + f_{13} J_{13}^2 + f'_{13} J_{13} + f_{13} J_{13}^3 + \cdots + f_{13} J_{13}^{n-1} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+1} f_{1n} J_{1n}^1 + (-1)^{n+1} f_{1n} J_{1n}^2 + (-1)^{n+1} f_{1n} J_{1n}^3 \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+1} f_{1n} J_{1n}^{n-1} + (-1)^{n+1} f'_{1n} J_{1n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f'_{11}J_{11} - f_{12}J_{12}^1 + f_{13}J_{13}^1 - \cdots + (-1)^{n+1} f_{1n}J_{1n}^1 + \\
&\quad f_{11}J_{11}^1 - f'_{12}J_{12} + f_{13}J_{13}^2 - \cdots + (-1)^{n+1} f_{1n}J_{1n}^2 + \\
&\quad f_{11}J_{11}^2 - f_{12}J_{12}^2 + f'_{13}J_{13} - \cdots + (-1)^{n+1} f_{1n}J_{1n}^3 \\
&\quad + \cdots + f_{11}J_{11}^{n-1} - f_{12}J_{12}^{n-1} + f_{13}J_{13}^{n-1} - \cdots + (-1)^{n+1} f'_{1n}J_{1n} \\
&= J^1 + J^2 + J^3 + \cdots + J^n. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 2.1.2

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\mathbf{x}, t) = J(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}, t), t).$$

Demostración. La prueba que aquí se presenta también se puede consultar en [3] o [58]. Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = (\xi_1(\mathbf{x}, t), \xi_2(\mathbf{x}, t), \dots, \xi_n(\mathbf{x}, t)).$$

Por definición del campo de velocidades del fluido

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}, t), t).$$

De aquí que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \xi_1(\mathbf{x}, t) &= u_1(\varphi(\mathbf{x}, t), t), \\
\frac{\partial}{\partial t} \xi_2(\mathbf{x}, t) &= u_2(\varphi(\mathbf{x}, t), t), \\
&\vdots \\
\frac{\partial}{\partial t} \xi_n(\mathbf{x}, t) &= u_n(\varphi(\mathbf{x}, t), t).
\end{aligned}$$

Y también

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}, t), t) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial \xi_n} \right).$$

El lema se demostrará por inducción sobre n .

Para $n = 1$, $J(\mathbf{x}, t) = \partial\xi_1/\partial x_1$, por lo que para \mathbf{x} fijo se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}, t), t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = (\operatorname{div} \mathbf{u})J(\mathbf{x}, t).\end{aligned}$$

Se supone que el lema se cumple para $n - 1$ con $n > 2$ y se demuestra para n . Para \mathbf{x} fijo y aplicando el lema 2.1.1 a J dada como en (2.10) se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{x}, t) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \\ &+ \cdots + \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Pero

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} u_i(\varphi(\mathbf{x}, t), t)$$

para $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$.

Además las componentes u_i de \mathbf{u} en esta expresión son funciones de x_1, x_2, \dots, x_n a través de $\varphi(\mathbf{x}, t)$, por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial x_j} u_i(\varphi(\mathbf{x}, t), t) = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j}.$$

Cuando estas ecuaciones son sustituidas en la expresión anterior para $\partial J/\partial t$, se obtiene para los términos respectivos que

$$\frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots +$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_n}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_2} & \frac{\partial u_n}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_n}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_n} & \frac{\partial u_n}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Con esto, los sumandos que se han escrito de $\partial J/\partial t$ se transforman a su vez, cada uno de ellos, en n sumandos (puesto que la función determinante es multilinear en las columnas y en filas):

$$+ \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial \xi_n} \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Pero el determinante de cada sumando que tiene dos columnas iguales vale cero, por lo que resulta

$$\frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial \xi_n} \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Se concluye que

$$\frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial \xi_n} \right) J,$$

como se quería demostrar. ■

Al aplicar (2.12), (2.13) y el lema 2.1.2 en (2.11) se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \mathbf{u} dV &= \int_W \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u})(\varphi, t) \right] J + (\rho \mathbf{u})(\varphi, t) \frac{\partial J}{\partial t} \right\} dV \\
 &= \int_W \left\{ \left[\frac{D(\rho \mathbf{u})}{Dt}(\varphi, t) \right] J + (\rho \mathbf{u})(\varphi, t) [(\nabla \cdot \mathbf{u})(\varphi, t)] J \right\} dV \\
 &= \int_W \left\{ \frac{D(\rho \mathbf{u})}{Dt}(\varphi, t) + (\rho \mathbf{u})(\varphi, t) [(\nabla \cdot \mathbf{u})(\varphi, t)] \right\} J dV,
 \end{aligned}$$

donde $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ y $J = J(\mathbf{x}, t)$.

Del teorema del cambio de variable, resulta

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \mathbf{u} dV &= \int_{W_t} \left[\frac{D(\rho \mathbf{u})}{Dt} + (\rho \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] dV \\
 &= \int_{W_t} \left[\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{u}) + (\rho \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] dV \\
 &= \int_{W_t} \left[\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\rho \mathbf{u}) + (\rho \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] dV.
 \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \cdot \nabla(\rho \mathbf{u}) &= u \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial z} \\
 &= u \left[\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \mathbf{u} \right] + v \left[\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \mathbf{u} \right] + w \left[\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \mathbf{u} \right] \\
 &= \rho \left(u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) + \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \mathbf{u} \\
 &= \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) \mathbf{u},
 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \mathbf{u} dV &= \\
 &\int_{W_t} \left[\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) \mathbf{u} + (\rho \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] dV
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{W_t} \left[\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \mathbf{u} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) \right] dV \\
&= \int_{W_t} \left[\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \mathbf{u} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \right] dV.
\end{aligned}$$

Al desarrollar la derivada material de ρ :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}).$$

Así, de la ecuación de continuidad (2.2) se concluye que

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (2.14)$$

que es otra forma equivalente a la ley de conservación de la masa, por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \mathbf{u} dV = \int_{W_t} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV.$$

Este argumento prueba el siguiente teorema:

Teorema 2.1.1 (del transporte) *Si $f : D \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable, entonces*

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho f dV = \int_{W_t} \rho \frac{Df}{Dt} dV.$$

De manera similar, se puede derivar una forma del teorema del transporte sin incluir un factor de densidad de masa, a saber

Teorema 2.1.2 *Si $f : D \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces*

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} f dV = \int_{W_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \mathbf{u}) \right) dV.$$

Demostración. Del teorema del cambio de variable, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{W_t} f \, dV &= \frac{d}{dt} \int_W f(\varphi, t) J dV = \int_W \frac{\partial}{\partial t} [f(\varphi, t) J] \, dV \\
 &= \int_W \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial t}(\varphi, t) \right] J + f(\varphi, t) \left[\frac{\partial J}{\partial t} \right] \right\} dV \\
 &= \int_W \left\{ \left[\frac{Df}{Dt}(\varphi, t) \right] J + f(\varphi, t) [\operatorname{div} \mathbf{u}(\varphi, t)] J \right\} dV \\
 &= \int_W \left[\frac{Df}{Dt}(\varphi, t) + f(\varphi, t) (\operatorname{div} \mathbf{u}(\varphi, t)) \right] J dV,
 \end{aligned}$$

donde $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ y $J = J(\mathbf{x}, t)$. Aplicando de nuevo el teorema de cambio de variable, se sigue que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{W_t} f \, dV &= \int_{W_t} \left[\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \mathbf{u} \right] dV \\
 &= \int_{W_t} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) f + f \operatorname{div} \mathbf{u} \right] dV \\
 &= \int_{W_t} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f + f \operatorname{div} \mathbf{u} \right] dV \\
 &= \int_{W_t} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \mathbf{u}) \right] dV. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Si W y por lo tanto W_t son arbitrarios, y los integrandos son continuos, se ha probado que la forma diferencial (2.5) y la forma integral de balance de momentos (2.8) son equivalentes. De ésto y del teorema del transporte 2.1.1 se tiene que las tres ecuaciones siguientes son equivalentes:

i) Forma integral primitiva

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \mathbf{u} \, dV = S_{\partial W_t} + \int_{W_t} \rho \mathbf{b} \, dV.$$

ii) Forma diferencial

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{b}.$$

iii) Forma integral

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \mathbf{u} dV = - \int_{\partial W} [p \mathbf{n} + (\rho \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})] dA + \int_W \rho \mathbf{b} dV.$$

Demostración. i) \implies ii): De (2.4) se sigue que

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \mathbf{u} dV = - \int_{W_t} \nabla p dV + \int_{W_t} \rho \mathbf{b} dV = \int_{W_t} (-\nabla p + \rho \mathbf{b}) dV,$$

y aplicando el teorema del transporte 2.1.1 al primer miembro de la desigualdad anterior, resulta

$$\int_{W_t} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{W_t} (-\nabla p + \rho \mathbf{b}) dV,$$

para toda W_t , por lo tanto

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{b}.$$

ii) \implies i): Puesto que

$$\int_{W_t} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{W_t} -\nabla p dV + \int_{W_t} \rho \mathbf{b} dV,$$

así que aplicando de nuevo el teorema del transporte 2.1.1 y (2.4), resulta que

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \mathbf{u} dV = S_{\partial W_t} + \int_{W_t} \rho \mathbf{b} dV.$$

ii) \iff iii): Ya fue demostrado. ■

Se puede usar el lema 2.1.2 para caracterizar la incompresibilidad de un fluido.

Definición 2.1.1 *Un fluido es incompresible si para cualquier subregión W del fluido se tiene*

$$\text{volumen}(W_t) = \int_{W_t} dV = \text{constante en } t.$$

Se observa que

a) $\frac{d}{dt} \int_{W_t} dV = 0.$

b) Del teorema del cambio de variable resulta que

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} dV = \frac{d}{dt} \int_W J dV.$$

c) Del lema 2.1.2 se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_W J dV = \int_W \frac{\partial}{\partial t} J dV = \int_W (\text{div } \mathbf{u}) J dV.$$

d) De nuevo del teorema del cambio de variable se tiene que

$$\int_W (\text{div } \mathbf{u}) J dV = \int_{W_t} (\text{div } \mathbf{u}) dV.$$

Así, la incompresibilidad de un fluido es equivalente a

$$\int_{W_t} (\text{div } \mathbf{u}) dV = 0,$$

para todas las regiones W_t en movimiento.

De lo anterior, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) El fluido es incompresible,
- ii) $\text{div } \mathbf{u} = 0,$
- iii) $J \equiv 1.$

Demostración. **i) \implies ii):** Dado que el fluido es incompresible, se tiene que

$$\int_{W_t} (\operatorname{div} \mathbf{u}) dV = 0, \quad \forall W_t,$$

por lo tanto, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$.

ii) \implies iii): Si $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, entonces

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} dV = \int_{W_t} (\operatorname{div} \mathbf{u}) dV = 0,$$

por lo que $\int_{W_t} dV$ es constante para todo t . Ahora del teorema del cambio de variable se tiene que

$$\int_{W_t} dV = \int_W J dV,$$

para todo t , por lo tanto $J \equiv 1$.

iii) \implies i): Si $J \equiv 1$, entonces del teorema de cambio de variable se sigue que

$$\int_{W_t} dV = \int_W J dV = \int_W dV, \quad \forall t > 0,$$

luego

$$\text{volumen}(W_t) = \int_W dV$$

que es constante en t , así el fluido es incompresible. ■

De la ecuación (2.14) y del hecho de que $\rho > 0$, se tiene que un fluido es incompresible si y sólo si $D\rho/Dt = 0$, esto es, la densidad de masa es constante a través del fluido. Si el fluido es homogéneo, es decir, $\rho = \text{constante}$ en el espacio, este será incompresible si y sólo si ρ es constante en el tiempo. Problemas que involucran flujos no homogéneos incompresibles ocurren por ejemplo en la oceanografía. Enseguida se obtendrá la ecuación de continuidad expresando ρ en términos de su valor en $t = 0$, del mapeo de flujo $\varphi(\mathbf{x}, t)$ y del Jacobiano $J(\mathbf{x}, t)$.

En efecto, al tomar $f = 1$ en el teorema del transporte 2.1.1, resulta que

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho dV = \int_{W_t} \rho \frac{D1}{Dt} dV = 0,$$

de donde

$$\int_{W_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \text{constante} = \int_{W_0} \rho(\mathbf{x}, 0) dV.$$

Por el teorema del cambio de variable,

$$\int_{W_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{W_0} \rho(\varphi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t) dV,$$

luego

$$\int_{W_0} \rho(\varphi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t) dV = \int_{W_0} \rho(\mathbf{x}, 0) dV,$$

y dado que W_0 es arbitrario

$$\rho(\varphi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, 0), \quad \mathbf{x} \in D, t \geq 0.$$

Esta es otra forma de la conservación de la masa. Una consecuencia de lo anterior es: *Un fluido que es homogéneo en $t = 0$ pero es compresible, generalmente no permanece homogéneo.* Sin embargo, el fluido permanecerá homogéneo si es incompresible.

Ejemplo 2.1.1 Sea $\varphi((x, y, z), t) = ((1+t)x, y, z)$. Entonces

$$J((x, y, z), t) = \begin{vmatrix} 1+t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+t,$$

por lo tanto el fluido es compresible.

Ejemplo 2.1.2 Sea $\rho((x, y, z), t) = \frac{1}{1+t}$, en este caso se tiene homogeneidad para todo tiempo t , ya que la densidad no depende del punto (x, y, z) , es decir, es constante en el espacio. También se tiene conservación de la masa.

2.1.3. Conservación de energía

Hasta el momento se han deducido las ecuaciones siguientes:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{b}, \quad \text{“Ecuación de balance de momentos (2.5)”},$$

y

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad \text{“Conservación de la masa (2.14)”},$$

que expresadas en términos de sus componentes, resultan ser

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + b_1 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + b_2 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + b_3 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} &= -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Este es un sistema de 4 ecuaciones con 5 incógnitas: las tres componentes de la velocidad u, v, w , la presión p y la densidad ρ , así que hace falta por lo menos una ecuación más para describir completamente el movimiento del fluido. La quinta ecuación se obtendrá del principio de conservación de la energía.

Sea D un dominio donde se mueve el fluido con campo de velocidad \mathbf{u} . La energía cinética contenida en una región $W \subseteq D$ está dada por [11]:

$$E_{\text{cinética}} = \frac{1}{2} \int_W \rho \|\mathbf{u}\|^2 dV,$$

donde $\|\mathbf{u}\|^2 = u^2 + v^2 + w^2$. Se supone que la energía total del fluido puede ser escrita como

$$E_{\text{total}} = E_{\text{cinética}} + E_{\text{interna}},$$

donde $E_{interna}$ es la energía interna que no puede ser vista a escala macroscópica, pero que nace de interacciones potenciales internas y las vibraciones moleculares. Si se suministra energía al fluido o si el fluido realiza algún trabajo, la energía total cambiará.

La tasa de cambio de la energía cinética de una porción en movimiento W_t del fluido se calcula usando el teorema del transporte 2.1.1 como sigue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{cinética} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{W_t} \rho \|\mathbf{u}\|^2 dV \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{W_t} \rho \left(\frac{D}{Dt} \|\mathbf{u}\|^2 \right) dV. \end{aligned}$$

Considerando que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} \|\mathbf{u}\|^2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \|\mathbf{u}\|^2 + \mathbf{u} \cdot \nabla \left(\|\mathbf{u}\|^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \|\mathbf{u}\|^2 + u \frac{\partial}{\partial x} \|\mathbf{u}\|^2 + v \frac{\partial}{\partial y} \|\mathbf{u}\|^2 + w \frac{\partial}{\partial z} \|\mathbf{u}\|^2 \right), \end{aligned}$$

y dado que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \|\mathbf{u}\|^2 &= \frac{\partial}{\partial t} (u^2 + v^2 + w^2) = 2u \frac{\partial u}{\partial t} + 2v \frac{\partial v}{\partial t} + 2w \frac{\partial w}{\partial t} = 2\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \|\mathbf{u}\|^2 &= \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) = 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} + 2w \frac{\partial w}{\partial x} = 2\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \|\mathbf{u}\|^2 &= \frac{\partial}{\partial y} (u^2 + v^2 + w^2) = 2u \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} + 2w \frac{\partial w}{\partial y} = 2\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \|\mathbf{u}\|^2 &= \frac{\partial}{\partial z} (u^2 + v^2 + w^2) = 2u \frac{\partial u}{\partial z} + 2v \frac{\partial v}{\partial z} + 2w \frac{\partial w}{\partial z} = 2\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{D}{Dt} \|\mathbf{u}\|^2 &= \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) + v \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) + w \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) \\
&= \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{u} \cdot v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{u} \cdot w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \\
&= \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{u} \\
&= \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \\
&= \mathbf{u} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] \\
&= \mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt}.
\end{aligned}$$

Así

$$\frac{d}{dt} E_{\text{cinética}} = \int_{W_t} \rho \left(\mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) dV. \quad (2.15)$$

Una discusión más general de conservación de la energía requiere más termodinámica, pero lo expuesto basta para el tratamiento que se quiere hacer aquí, que es determinar una quinta ecuación a fin de tener un sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas. Para esto, se limitará a dos casos particulares:

1) Flujos incompresibles

Se supone que toda la energía es cinética y que *la tasa de cambio de la energía cinética en una porción del fluido es igual a la tasa a la cual la presión y las fuerzas externas hacen un trabajo* [11]:

$$\frac{d}{dt} E_{\text{cinética}} = - \int_{\partial W_t} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{W_t} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV.$$

De (2.15) y del teorema de la divergencia de Gauss, la ecuación anterior se convierte en

$$\begin{aligned}
\int_{W_t} \rho \left(\mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) dV &= - \int_{W_t} \operatorname{div} (p \mathbf{u}) dV + \int_{W_t} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV \\
&= - \int_{W_t} [\operatorname{div} (p \mathbf{u}) - \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}] dV \\
&= - \int_{W_t} [p \operatorname{div}(\mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla p - \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}] dV .
\end{aligned}$$

Como el fluido es incompresible, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, por lo que

$$\int_{W_t} \rho \left(\mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) dV = - \int_{W_t} (\mathbf{u} \cdot \nabla p - \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) dV ,$$

de donde

$$\int_{W_t} \mathbf{u} \cdot \left[\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \nabla p - \rho \mathbf{b} \right] dV = 0 .$$

La ecuación anterior es también una consecuencia del balance de momento (2.5). Este argumento, además, muestra que *si se supone que $E_{\text{total}} = E_{\text{cinética}}$, entonces el fluido debe ser incompresible, al menos que $p = 0$* . En resumen, las **ecuaciones de Euler para fluidos incompresibles**⁴ son

$$\begin{aligned}
\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\nabla p + \rho \mathbf{b}, \quad \text{en } D \\
\frac{D\rho}{Dt} &= 0, \quad \text{en } D \\
\operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \quad \text{en } D \\
\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \text{en } \partial D .
\end{aligned} \tag{2.16}$$

⁴Al no considerar las fuerzas externas \mathbf{b} , resulta la ecuación $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$, que fue obtenida por primera vez por Euler en 1755, y es una de las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos (Landau y Lifshitz (1986) [27].

2) Fluidos isoentrópicos

Un fluido compresible se llama si existe una función ω , que se le llama la entalpía, tal que

$$\nabla\omega = \frac{1}{\rho}\nabla p.$$

Esta terminología proviene de la termodinámica, en donde se tienen las siguientes cantidades básicas, cada una de las cuales es una función de \mathbf{x} y de t , dependiendo del flujo dado:

p = presión

ρ = densidad

T = temperatura

s = entropía

w = entalpía (por unidad de masa)

$\epsilon = \omega - \frac{p}{\rho}$ = energía interna (por unidad de masa).

Estas cantidades están relacionadas por la primera ley de la termodinámica que se acepta como un principio básico

$$d\omega = Tds + \frac{1}{\rho} dp. \quad (2.17)$$

La primera ley es una afirmación de la conservación de la energía. Una afirmación equivalente a (2.17) es

$$d\epsilon = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho. \quad (2.18)$$

En efecto, puesto que $\epsilon = \omega - p/\rho$, entonces

$$\begin{aligned} d\epsilon &= d\omega - d\left(\frac{p}{\rho}\right) \\ &= d\omega - \frac{\rho(dp) - (d\rho)p}{\rho^2} \\ &= d\omega - \frac{1}{\rho} dp + \frac{p}{\rho^2} d\rho, \end{aligned}$$

de donde

$$d\omega = d\epsilon + \frac{1}{\rho} dp - \frac{p}{\rho^2} d\rho. \quad (2.19)$$

Sustituyendo $d\omega$ en (2.17) se tiene

$$d\epsilon + \frac{1}{\rho} dp - \frac{p}{\rho^2} d\rho = T ds + \frac{1}{\rho} dp$$

por lo que

$$d\epsilon = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho.$$

Recíprocamente, si se despeja $d\epsilon$ en (2.19) y se sustituye en (2.18) se obtiene (2.17). ■

Si la presión es una función únicamente de ρ , entonces el flujo es claramente isoentrópico con s como una constante (de ahí el nombre de isoentrópico) por lo que de (2.17):

$$d\omega = T ds + \frac{1}{\rho} dp(\rho)$$

$$d\omega = \frac{1}{\rho} p'(\rho) d\rho$$

$$\omega = \int_0^\rho \frac{p'(\lambda)}{\lambda} d\lambda,$$

que es la versión integral de $d\omega = dp/\rho$. Como antes, la energía interna $\epsilon = \omega - p/\rho$ satisface que

$$d\epsilon = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho = \frac{p}{\rho^2} d\rho,$$

o como una función de ρ :

$$p = \rho^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho},$$

o bien

$$\epsilon = \int_0^\rho \frac{p(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda.$$

Para flujos isoentrópicos con p como una función de ρ , la forma integral de balance de energía está dada por: *La tasa de cambio de la energía en una porción del fluido es igual a la tasa a la que el trabajo se realiza sobre ésta:*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_{\text{total}} &= \frac{d}{dt} \int_{W_t} \left(\frac{1}{2} \rho \|\mathbf{u}\|^2 + \rho \epsilon \right) dV \\ &= \int_{W_t} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV - \int_{\partial W_t} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Ahora como

$$E_{\text{total}} = E_{\text{cinética}} + E_{\text{interna}}$$

y aplicando el teorema de la divergencia de Gauss al último término del lado derecho de (2.20), se sigue que

$$\frac{d}{dt}E_{\text{cinética}} + \frac{d}{dt}E_{\text{interna}} = \int_{W_t} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV - \int_{W_t} \text{div}(p \mathbf{u}) dV,$$

de donde

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_{\text{cinética}} + \frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \epsilon dV &= \\ \int_{W_t} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV - \int_{W_t} \text{div}(p \mathbf{u}) dV.\end{aligned}\tag{2.21}$$

De (2.15), el teorema del transporte 2.1.1 y desarrollando el segundo miembro de (2.21), resulta

$$\int_{W_t} \rho \left(\mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) dV + \int_{W_t} \rho \frac{D\epsilon}{Dt} dV = \int_{W_t} (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} - p \text{div} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla p) dV,$$

o bien

$$\begin{aligned}\int_{W_t} \rho \left(\mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) dV &= \\ \int_{W_t} \left[\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} - \left(\rho \frac{D\epsilon}{Dt} + p \text{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla p \right) \right] dV.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Como la energía interna $\epsilon = \omega - p/\rho$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{D\epsilon}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\omega - \frac{p}{\rho} \right) + \mathbf{u} \cdot \nabla \left(\omega - \frac{p}{\rho} \right) \\ &= \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega - \mathbf{u} \cdot \left(\frac{\rho \nabla p - p \nabla \rho}{\rho^2} \right) \\ &= \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega - \frac{1}{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla p + \frac{p}{\rho^2} \mathbf{u} \cdot \nabla \rho. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\epsilon}{Dt} + p \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla p &= \\ &= \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \omega + \frac{p}{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + p \operatorname{div} \mathbf{u} \\ &= \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \omega + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \right) \\ &= \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \omega + \rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right). \end{aligned}$$

Dado que el fluido es isoentrópico la diferencia del segundo sumando es cero, y de la ecuación de continuidad (2.2) se tiene que

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} + p \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla p = \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \omega.$$

Así, (2.22) toma la forma

$$\int_{W_t} \rho \left(\mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) dV = \int_{W_t} (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \omega) dV,$$

y de la definición de la derivada material se tiene que

$$\int_{W_t} \rho \mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) dV = \int_{W_t} \rho \mathbf{u} \cdot (-\nabla \omega + \mathbf{b}) dV.$$

Así que las **ecuaciones de Euler para un flujo isoentrópico**, resultan ser

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla \omega + \mathbf{b}, \quad \text{en } D \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \quad \text{en } D \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \text{en } \partial D.\end{aligned}\tag{2.23}$$

O también

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n},$$

si ∂D se mueve con velocidad \mathbf{V} .

Ahora éste es un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, el cual se puede ver que es un problema bien planteado si $p'(\rho) > 0$ [11]. Esto está de acuerdo con la experiencia común de que incrementando la presión al volumen del fluido, decrecerá el volumen ocupado y por lo tanto se incrementará la densidad.

2.2. Ecuaciones de Navier-Stokes

La ley de conservación de la cantidad de movimiento afirma que la variación de la cantidad de movimiento se debe a la acción de fuerzas [59], es decir,

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{F}_e(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}_c(\mathbf{x}, t),\tag{2.24}$$

donde el término \mathbf{F}_e es la fuerza debida a campos externos, como el gravitatorio. La particularidad de los fluidos reside en la **fuerza de contacto** \mathbf{F}_c . Identificar sus componentes llevó siglo y medio y en la tarea participaron Johann Bernoulli (1667–1748) en su obra Hidráulica que publicó en 1743 y de su hijo Daniel Bernoulli (1700–1782) que también publicó su obra Hidrodinámica en 1738 [30], así como de Leonhard Euler (1707–1783), que contribuyeron a describir la componente de presión como

$$\mathbf{F}_p = -\nabla p.$$

Digno de mención es Augustin Louis Cauchy (1789–1857) que añadió el análisis del concepto de tensor de esfuerzos como forma general del efecto de contacto, en 1822. En los decenios que siguen varios prominentes científicos identificaron el efecto que deba añadirse al gradiente de presión para obtener el conjunto de fuerzas de contacto. Entre ellos la posteridad ha seleccionado los nombres de Claude-Louis Navier (1785–1836) que propuso en 1822 la fórmula del efecto viscoso [43], y sir George Gabriel Stokes (1819–1903), que culminó en 1845 la modelización con una deducción racional y matemáticamente elegante, al uso actual [52]. Según estos autores, en los fluidos usuales, llamados newtonianos, el esfuerzo de contacto toma la forma de una fuerza viscosa, de la forma

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{x}, t) = \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u}.$$

Este es un hito histórico de la modelización matemática de los problemas de la Física. Aparecen nuevas variables o parámetros cuyo significado físico ha de ser examinado: la presión $p(\mathbf{x}, t)$ es una variable reconocida como relevante desde la antigüedad. Los parámetros de λ y μ describen la viscosidad, de hecho μ se llama la **viscosidad dinámica**, y se puede suponerlos en primera aproximación constantes medibles que dependen del fluido. Poniendo todo junto en (2.24), se llega a la ley conocida como **ecuaciones de Navier-Stokes**:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}_e(\mathbf{x}, t). \quad (2.25)$$

El término no lineal $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ se llama término convectivo o de transporte. Su no linealidad, aunque sea solo cuadrática, es la razón de que las soluciones de la ecuación puedan en principio desarrollar singularidades y no se ha logrado decidir si este fenómeno ocurre o no tras incesantes esfuerzos teóricos y computacionales durante todo el pasado siglo.

2.2.1. Fluidos viscosos

La extremada simplificación inherente a los fluidos perfectos, que no admiten el arrastre lateral (¡contradiendo a Newton y a la realidad!), fue notada desde sus comienzos por los precursores y puesta muy de relieve por D' Alembert (1717–1783). Aunque según esa teoría, un barco flotaría en el agua, ¡sin embargo los aviones no volarían, grave defecto que retrasó el comienzo de la ciencia aeronáutica! Remediar esta situación con “un modelo de nivel superior” nos ha llevado de la mano de Cauchy, Navier y Stokes a considerar fluidos más realistas que incluyen efectos de viscosidad. Cuando se impone la incompresibilidad, el sistema de Navier-Stokes (2.25), toma la forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}_e(\mathbf{x}, t) \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Por costumbre, se usa la notación $\nu = \mu/\rho$ para el parámetro que caracteriza la propiedad de viscosidad de cada fluido “real” y que se conoce como la **viscosidad cinemática**. Se necesitan datos adicionales, condiciones iniciales y/o de contorno, dependiendo del dominio donde se plantea el problema y del tipo de datos que tengan interés para las aplicaciones.

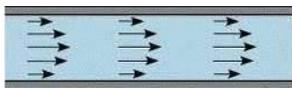
En el último siglo y medio, estas ecuaciones han pasado la prueba de la aplicación siendo utilizadas por físicos e ingenieros con notable éxito en muy diversos campos, entre ellos la hidráulica, la meteorología y la aeronáutica, y su rango de validez está bien establecido. Pertenecen ya, junto a las ecuaciones de Newton (1643–1727), Maxwell (1831–1879) y Schrödinger (1887–1961), a las ecuaciones básicas de la Física.

2.3. Ecuaciones de Reynolds

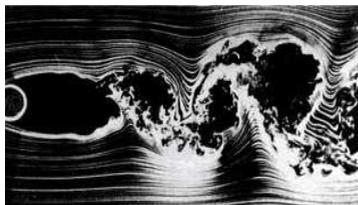
El material que aquí se presenta está basado principalmente en la referencia [20].

2.3.1. Flujo turbulento

Cuando un líquido fluye en un tubo y su velocidad es baja, fluye en líneas paralelas a lo largo del eje del tubo, a este régimen se le conoce como **flujo laminar** (véase figura 2.5(A)). Conforme aumenta la velocidad y se alcanza la llamada **velocidad crítica**, el flujo se dispersa hasta que adquiere un movimiento de torbellino en el que se forman corrientes cruzadas y remolinos; a este régimen se le conoce como **flujo turbulento** (véase figura 2.5(B)). El paso de régimen laminar a turbulento no es inmediato, sino que existe un comportamiento intermedio indefinido que se conoce como **régimen de transición**.



(A) Flujo laminar



(B) Flujo turbulento

Figura 2.5: Imágenes: (A) flujo laminar y (B) flujo turbulento, obtenidos en www.google.com.mx.

Los diferentes regímenes de flujo y la asignación de valores numéricos a cada uno fueron reportados por primera vez en 1883 por Osborne Reynolds⁵. Reynolds observó que el tipo de flujo adquirido por un líquido que fluye dentro de una tubería depende de la velocidad del flujo, el diámetro de la tubería y de algunas propiedades físicas del fluido.

⁵Osborne Reynolds (1842–1912) fue un ingeniero y físico irlandés que realizó importantes contribuciones en los campos de la hidrodinámica y la dinámica de fluidos, siendo la más notable la introducción del Número de Reynolds en 1883.

En general, el número adimensional de Reynolds en un determinado flujo, se calcula como el cociente entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas.

Como se verá en la fórmula (2.40) de la sección 2.3.3, las tensiones viscosas dependen de la variación respecto al tiempo de la deformación angular de los elementos del fluido, lo cual se expresa en su forma más elemental como

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y},$$

siendo u la velocidad del flujo, y la distancia en la dirección perpendicular a la del movimiento y μ la **viscosidad dinámica** (constante para cada fluido a una determinada temperatura). Para un volumen unidad, la resultante de las fuerzas de fricción debidas a la viscosidad es

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Por otro lado las fuerzas de inercia en una dimensión valen

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x},$$

de modo que el número de Reynolds puede calcularse como

$$R_e = \frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}.$$

En la fórmula anterior, las derivadas espaciales de u en el numerador y en el denominador tienen dimensiones de

$$\text{velocidad}/\text{longitud} \text{ y } \text{velocidad}/(\text{longitud})^2,$$

respectivamente, de donde se obtiene la expresión habitual de R_e :

$$R_e = \frac{\rho v^2/L}{\mu v/L^2} = \frac{vL}{\nu},$$

donde v es la velocidad media del flujo, L es la longitud característica del flujo y $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática. Se observa experimentalmente que para valores inferiores al llamado número de Reynolds crítico las capas adyacentes de fluido se deslizan unas sobre otras de modo ordenado, lo cual constituye el **régimen laminar**. En un régimen laminar, si las condiciones de contorno no varían con el tiempo, el flujo es **permanente** [20].

Para valores de Re superiores al crítico el comportamiento del flujo cambia, tornándose aleatorio y caótico. El movimiento se vuelve no permanente, incluso con condiciones de contorno constantes. Es lo que se denomina **régimen turbulento**. El número de Reynolds crítico no está exactamente determinado. Reynolds obtuvo los números 2000 y 12000 como valores inferior y superior respectivamente en el caso de tubos, tomando como L el diámetro y como v la velocidad media. Para tubos suele considerarse que el flujo es laminar por debajo de 2000, con una zona de transición entre 2000 y 4000 [37]. Para flujos en superficie libre, se utiliza el radio hidráulico como longitud característica por lo que los valores críticos resultan menores: laminar por debajo de 500 y turbulento por encima de 2000 [37].

La naturaleza aleatoria del flujo turbulento y la elevada frecuencia con la que varían las diversas magnitudes, dificultan enormemente en la práctica los cálculos basados en una descripción completa del movimiento de todas las partículas del fluido. Se puede descomponer una magnitud (por ejemplo la primera componente u del vector velocidad \mathbf{u}) en la suma de su valor promedio turbulento \bar{u} y su fluctuación turbulenta u' . Se caracteriza entonces un flujo turbulento por los valores promedios ($\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}$) y las propiedades estadísticas de sus fluctuaciones (u', v', w', p'). Al hacer estas consideraciones en el modelo de Navier-Stokes, se obtendrá el modelo de Reynolds en tres dimensiones.

Incluso en flujos donde las velocidades y presiones promedio varían solo en una o dos dimensiones espaciales, las fluctuaciones turbulentas tienen siempre un carácter tridimensional. Si se logra visualizar un flujo turbulento se encuentran porciones de fluido en rotación que se llaman remolinos turbulentos. Estos presentan un amplio espectro de tamaños

siendo el de los remolinos mayores comparable a las dimensiones del dominio. Las fuerzas de inercia predominan en los remolinos de mayor tamaño, mientras que su efecto es despreciable frente al de las fuerzas viscosas en los más pequeños.

La energía necesaria para mantener el movimiento de los remolinos de mayor tamaño procede del flujo medio. Por otra parte, los remolinos menores obtienen energía principalmente de otros mayores y más débilmente del flujo medio. De esta manera la energía cinética se va transmitiendo a remolinos cada vez más pequeños, a través de un proceso en cascada, hasta que es disipada por las fuerzas viscosas. Esta disipación produce las pérdidas de energía adicionales relacionadas con los flujos turbulentos.

Los remolinos de mayor tamaño tienen un comportamiento altamente anisótropo y dependiente del flujo medio, debido a su fuerte interacción con éste. Sin embargo, durante el proceso en cascada, la acción difusiva de la viscosidad va disminuyendo esta direccionalidad por lo que, para números de Reynolds suficientemente altos, el comportamiento de los remolinos más pequeños puede considerarse isótropo.

2.3.2. Valor promedio y fluctuación

Como se ha mencionado en el apartado anterior, una magnitud φ como las componentes del vector velocidad \mathbf{u} o la presión p , se puede descomponer como la suma de su **valor promedio turbulento** $\bar{\varphi}$ más una componente de **fluctuación** φ' en torno a dicho valor, es decir

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \bar{\varphi}(\mathbf{x}, t) + \varphi'(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0.$$

El valor promedio temporal $\bar{\varphi}(\mathbf{x}, t)$, en un punto fijo \mathbf{x} , se puede definir de diversos modos. Para flujos permanentes se utiliza la expresión [20]:

$$\bar{\varphi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\mathbf{x}, t) dt,$$

mientras que para flujos no permanentes utilizan

$$\bar{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi(\mathbf{x}, t_n), \quad 0 \leq t_n \leq t.$$

En el segundo caso, el promedio se calcula a partir de los valores obtenidos en un número N de mediciones del fenómeno, en las que todas las variables controladas son idénticas, N debe ser suficientemente grande para eliminar los efectos de las fluctuaciones.

Para los casos que se van a estudiar, de flujo no permanente, es más adecuada la expresión [20]:

$$\overline{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \varphi(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \quad (2.27)$$

siendo T un periodo tal que el valor promedio obtenido es independiente de este valor (véase figura 2.6). T es mucho más pequeño que la variación del valor promedio de forma que éste último podrá depender del valor del tiempo t alrededor del cual se toma el promedio pero no de la amplitud elegida para realizarlo. T debe ser superior a la escala temporal de la turbulencia e inferior a la escala temporal del flujo promedio. Por ejemplo, en un estuario se puede considerar que el período de oscilación turbulenta de la velocidad es inferior a 1 segundo, mientras que el de la marea es de unas 12 horas. Tras realizar el promedio temporal (2.27), el flujo medio seguirá oscilando bajo los efectos de la marea.

Teorema 2.3.1 *Propiedades del promedio temporal:*

- a) $\overline{\varphi + \psi} = \overline{\varphi} + \overline{\psi}$.
- b) $\overline{\varphi - \psi} = \overline{\varphi} - \overline{\psi}$.
- c) $\overline{c\varphi} = c\overline{\varphi}$, para cualquier constante c .
- d) $\overline{\overline{\varphi}} = \overline{\varphi}$.
- e) $\overline{\varphi'} = 0$. “El promedio de las fluctuaciones de una magnitud es siempre nula”
- f) $\overline{\varphi\psi} = \overline{\varphi}\overline{\psi} + \overline{\varphi'\psi'}$.

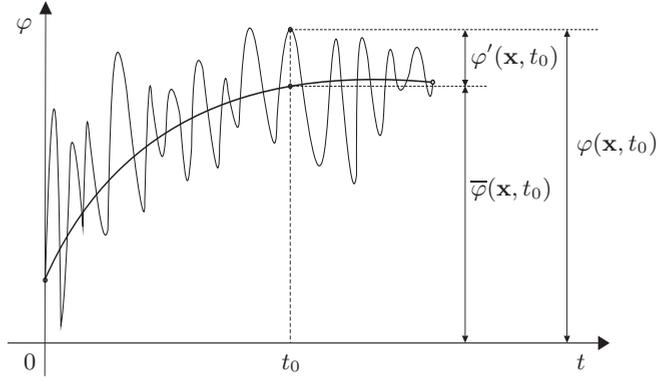


Figura 2.6: Ilustración de la variación de la magnitud φ con respecto al tiempo t en un punto fijo \mathbf{x} en un régimen turbulento. Como antes, $\varphi(\mathbf{x}, t) = \bar{\varphi}(\mathbf{x}, t) + \varphi'(\mathbf{x}, t)$, $t \geq 0$, donde $\bar{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ es el valor promedio al tiempo t de la magnitud φ y $\varphi'(\mathbf{x}, t)$ es la fluctuación de φ al tiempo t .

- g) Si φ y $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ son continuas, donde s es el tiempo o cualesquiera de las componentes de \mathbf{x} , entonces

$$\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial s}.$$

- h) Si φ es continua, entonces

$$\overline{\int_{s_0}^s \varphi(x_1, x_2, x_3, t) dx_i} = \int_{s_0}^s \bar{\varphi}(x_1, x_2, x_3, t) dx_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

- i) Para toda función escalar φ y \mathbf{u} función vectorial:

$$\overline{\varphi \mathbf{u}} = \bar{\varphi} \bar{\mathbf{u}} + \overline{\varphi' \mathbf{u}'}$$

Demostración. Es claro que c) se sigue directamente de la definición.

Para $a)$ y $b)$ se tiene de (2.27) que

$$\begin{aligned}
 \overline{(\varphi \pm \psi)}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} (\varphi \pm \psi)(\mathbf{x}, \tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \varphi(\mathbf{x}, \tau) d\tau \pm \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \psi(\mathbf{x}, \tau) d\tau \\
 &= \overline{\varphi}(\mathbf{x}, t) \pm \overline{\psi}(\mathbf{x}, t).
 \end{aligned}$$

$d)$ Puesto que $\overline{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ es constante en el intervalo $[t - T/2, t + T/2]$, se sigue que

$$\begin{aligned}
 \overline{\overline{\varphi}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \overline{\varphi}(\mathbf{x}, t) d\tau \\
 &= \frac{\overline{\varphi}(\mathbf{x}, t)}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} d\tau \\
 &= \frac{\overline{\varphi}(\mathbf{x}, t)}{T} T \\
 &= \overline{\varphi}(\mathbf{x}, t).
 \end{aligned}$$

$$e) \overline{\varphi'} = \overline{\varphi - \overline{\varphi}} = \overline{\varphi} - \overline{\overline{\varphi}} = \overline{\varphi} - \overline{\varphi} = 0.$$

$$\begin{aligned}
 f) \overline{\varphi\psi} &= \overline{(\overline{\varphi} + \varphi')(\overline{\psi} + \psi')} = \overline{\overline{\varphi}\overline{\psi} + \overline{\varphi}\psi' + \varphi'\overline{\psi} + \varphi'\psi'} \\
 &= \overline{\overline{\varphi}\overline{\psi}} + \overline{\overline{\varphi}\psi'} + \overline{\varphi'\overline{\psi}} + \overline{\varphi'\psi'} = \overline{\varphi}\overline{\psi} + \overline{\varphi'\psi'}.
 \end{aligned}$$

$g)$ De la definición de promedio temporal dada en (2.27), se sigue que

$$\begin{aligned}
 \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial s}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(\mathbf{x}, \tau) d\tau = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial s} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \varphi(\mathbf{x}, \tau) d\tau \\
 &= \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \varphi(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right] \\
 &= \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial s}(\mathbf{x}, t).
 \end{aligned}$$

h) Aplicando una vez más la definición del promedio temporal dada en (2.27) se tiene que

$$\begin{aligned} \overline{\int_{s_0}^s \varphi(x_1, x_2, x_3, t) dx_i} &= \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \left(\int_{s_0}^s \varphi(x_1, x_2, x_3, \tau) dx_i \right) d\tau \\ &= \int_{s_0}^s \left(\frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \varphi(x_1, x_2, x_3, \tau) d\tau \right) dx_i \\ &= \int_{x_0}^x \overline{\varphi}(x_1, x_2, x_3, t) dx_i. \end{aligned}$$

i) Si $\mathbf{u} = (u, v, w)$ y φ es una función escalar, entonces

$$\begin{aligned} \overline{\varphi \mathbf{u}} &= \overline{\varphi(u, v, w)} = \overline{(\varphi u, \varphi v, \varphi w)} = (\overline{\varphi u}, \overline{\varphi v}, \overline{\varphi w}) \\ &= (\overline{\varphi u} + \overline{\varphi' u'}, \overline{\varphi v} + \overline{\varphi' v'}, \overline{\varphi w} + \overline{\varphi' w'}) \\ &= (\overline{\varphi u}, \overline{\varphi v}, \overline{\varphi w}) + (\overline{\varphi' u'}, \overline{\varphi' v'}, \overline{\varphi' w'}) \\ &= \overline{\varphi} (\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) + \overline{(\varphi' u', \varphi' v', \varphi' w')} \\ &= \overline{\varphi} \overline{\mathbf{u}} + \overline{\varphi' (\mathbf{u}', v', w')} = \overline{\varphi} \overline{\mathbf{u}} + \overline{\varphi' \mathbf{u}'}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 2.3.2 *Otras propiedades del promedio temporal:*

- a) $\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}} = \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}}$
- b) $\overline{\nabla \varphi} = \nabla \overline{\varphi}$.
- c) $\overline{\nabla \cdot \varphi \mathbf{u}} = \nabla \cdot \overline{\varphi \mathbf{u}} + \nabla \cdot \overline{\varphi' \mathbf{u}'}$.
- d) $\overline{\Delta \varphi} = \Delta \overline{\varphi}$, donde $\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$.

Demostración. Tomando $\mathbf{u} = (u, v, w)$ y haciendo uso del teorema 2.3.1 en cada caso, se tiene que

$$\begin{aligned} a) \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}} &= \overline{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}} \\ &= \frac{\overline{\partial u}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial v}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial w}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

$$b) \overline{\nabla\varphi} = \overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)} = \left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}, \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}, \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}\right) = \left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}, \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial y}, \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial z}\right) \\ = \nabla\overline{\varphi}.$$

$$c) \overline{\nabla \cdot \varphi \mathbf{u}} = \nabla \cdot \overline{\varphi \mathbf{u}} = \nabla \cdot (\overline{\varphi} \mathbf{u} + \overline{\varphi' \mathbf{u}'}) = \nabla \cdot \overline{\varphi} \mathbf{u} + \nabla \cdot \overline{\varphi' \mathbf{u}'}$$

$$d) \overline{\Delta\varphi} = \overline{\nabla \cdot \nabla\varphi} = \nabla \cdot \overline{\nabla\varphi} = \nabla \cdot \nabla\overline{\varphi} = \Delta\overline{\varphi}. \blacksquare$$

2.3.3. Ecuaciones de Reynolds en tres dimensiones

Las ecuaciones de Reynolds se obtendrán de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos incompresibles dado por (2.26), que se reescribe a continuación como

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} \quad (2.28) \\ \text{div } \mathbf{u} = 0,$$

donde \mathbf{F} es la fuerza debido a campos externos \mathbf{F}_e en (2.26). Desarrollando (2.28) se obtiene para la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.29)$$

y para la ecuación dinámica

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta w. \quad (2.32)$$

Al sumar a la ecuación (2.30) la ecuación (2.29) multiplicada por u , se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial w}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\
\frac{\partial u}{\partial t} + 2u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\
\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\
\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u.
\end{aligned}$$

Similarmente, al sumar a las ecuaciones (2.31) y (2.32) la ecuación (2.29) multiplicada por v y w respectivamente, se obtiene el siguiente sistema equivalente a las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot u\mathbf{u} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot v\mathbf{u} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot w\mathbf{u} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w. \quad (2.36)$$

Teorema 2.3.3 *Las ecuaciones de Navier-Stokes (2.33)-(2.36) para fluidos incompresibles se transforman en el sistema*

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u}\bar{\mathbf{u}} &= \\
F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} - \left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right), & \quad (2.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{v}\bar{\mathbf{u}} &= \\
F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \Delta \bar{v} - \left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right), & \quad (2.38)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{w} \bar{\mathbf{u}} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \Delta \bar{w} - \left(\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right), \quad (2.39)$$

que se conoce como las *ecuaciones de Reynolds en 3D*.

Demostración. Se sustituyen las componentes de la velocidad u, v, w y la presión p que dependen del tiempo por sus valores promedio más los términos de fluctuación definidos en la sección 2.3.2 como

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad \text{y} \quad p = \bar{p} + p',$$

y se calcula el promedio temporal de cada ecuación, aplicando las propiedades que se dieron en los teoremas 2.3.1 y 2.3.2. Para la ecuación (2.33) se tiene

$$\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}} = \bar{0} \quad \text{implica} \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0.$$

Y para (2.34):

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot u \mathbf{u}} &= \overline{F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u} \\ \overline{\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot u \mathbf{u}} &= \overline{F_x} - \frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial p}{\partial x}} + \overline{\nu \Delta u} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u} \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \overline{u' \mathbf{u}'} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u} \bar{\mathbf{u}} + \left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right) &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} \end{aligned}$$

o bien

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u} \bar{\mathbf{u}} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} - \left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right).$$

Operando de manera análoga (2.35) y (2.36), se obtienen las otras dos ecuaciones a saber:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{v} \bar{\mathbf{u}} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \Delta \bar{v} - \left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{w} \bar{\mathbf{u}} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \Delta \bar{w} - \left(\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right). \blacksquare\end{aligned}$$

Los productos cruzados de las fluctuaciones turbulentas de la velocidad multiplicados por la densidad tienen dimensiones de *fuerza/superficie* y se denominan tensiones de Reynolds, ellos son:

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= -\rho \overline{u'^2}, & \tau_{yy} &= -\rho \overline{v'^2}, \\ \tau_{zz} &= -\rho \overline{w'^2}, & \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -\rho \overline{u'v'}, \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= -\rho \overline{u'w'}, & \tau_{yz} = \tau_{zy} &= -\rho \overline{v'w'}.\end{aligned}$$

La ley de viscosidad de Newton establece que las tensiones viscosas son proporcionales a la tasa o velocidad de deformación angular de los elementos de fluido lo que, para un fluido incompresible, se expresa en notación de subíndices como

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.40)$$

Boussinesq⁶ [9], propuso en 1877 una relación análoga entre los promedios temporales de las velocidades de deformación y las tensiones de Reynolds como

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.41)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker⁷.

⁶Joseph Valentin Boussinesq (1842–1929) fue un matemático y físico francés que hizo importantes contribuciones a la teoría de la hidrodinámica, vibración, luz y calor.

⁷Leopold Kronecker (1823–1891) fue un matemático alemán, reconocido por su contribución a la teoría de ecuaciones.

El coeficiente de proporcionalidad μ_t se denomina **viscosidad dinámica turbulenta** o de **remolino**, y a diferencia de la viscosidad dinámica μ , no es una propiedad del fluido sino del flujo, y por lo tanto es una variable que depende precisamente de las velocidades del flujo; k es la **energía cinética turbulenta por unidad de masa** dada por

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right). \quad (2.42)$$

Por otra parte, la energía cinética media es

$$K = \frac{1}{2} \left(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2} \right).$$

Teorema 2.3.4 *Si k_i es el promedio temporal de la energía cinética instantánea, entonces*

$$k_i = K + k.$$

Es decir, k_i es la suma de la energía cinética media K y la energía cinética turbulenta k .

Demostración. Aplicando el teorema 2.3.1(d) al calcular el promedio temporal k_i se obtiene que

$$\begin{aligned} k_i &= \frac{1}{2} \left[\overline{u^2 + v^2 + w^2} \right] = \frac{1}{2} \left[\overline{(u + u')^2} + \overline{(v + v')^2} + \overline{(w + w')^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\overline{u^2 + 2\bar{u}u' + u'^2} + \overline{v^2 + 2\bar{v}v' + v'^2} + \overline{w^2 + 2\bar{w}w' + w'^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right) \\ &= K + k, \end{aligned}$$

es decir, la suma de las energías cinéticas media y turbulenta. ■

Es conveniente notar que el coeficiente μ_t empleado en (2.41) puede en general depender de la dirección considerada, siendo realmente un tensor de viscosidad turbulenta. En este estudio se supondrá que tiene el mismo valor en todas las direcciones del espacio.

El término $-\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}$ es una tensión normal y hace que la fórmula sea válida para las tensiones τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{zz} . En efecto, aplicando (2.41) a $i = j = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} -\overline{\rho u' u'} &= \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{11}, \\ -\overline{\rho u'^2} &= \mu_t \left(2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \rho k, \\ -\overline{u'^2} &= \nu_t \left(2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} k, \end{aligned}$$

donde $\nu_t = \mu_t/\rho$ es la **viscosidad cinemática turbulenta**. Similarmente, para $i = j = 2$ e $i = j = 3$:

$$\begin{aligned} -\overline{v'^2} &= \nu_t \left(2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} k, \\ -\overline{w'^2} &= \nu_t \left(2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} k, \end{aligned}$$

al sumar las tres últimas expresiones y teniendo en cuenta la ecuación de continuidad (2.33) se comprueba que se verifica (2.42).

Al desarrollar (2.41) para $i, j = 1, 2, 3$, con $i \neq j$ se tiene

$$\begin{aligned} -\overline{u' v'} &= \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right), \\ -\overline{u' w'} &= \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right), \\ -\overline{v' w'} &= \nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (2.37):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u} \bar{\mathbf{u}} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu_t \left(2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} k \right] +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \right] \\
= & F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \\
= & F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Dado que ν es constante para cada fluido, entonces

$$\nu \Delta \bar{u} = \nabla \cdot \nu \nabla \bar{u},$$

por lo que (2.37) toma la forma

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u} \bar{\mathbf{u}} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} + \nabla \cdot (\nu + \nu_t) \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}. \quad (2.43)$$

Similarmente, las ecuaciones (2.38) y (2.39) toman la forma

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{v} \bar{\mathbf{u}} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial y} + \nabla \cdot (\nu + \nu_t) \nabla \bar{v} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (2.44)$$

y

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{w} \bar{\mathbf{u}} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial z} + \nabla \cdot (\nu + \nu_t) \nabla \bar{w} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}. \quad (2.45)$$

Para simplificar las ecuaciones anteriores observamos lo siguiente:

- a) Los términos que contienen $\partial k / \partial x$, $\partial k / \partial y$ y $\partial k / \partial z$, proceden de la derivación de las tensiones normales de Reynolds. Estas tensiones actúan, como la presión, perpendiculares a las caras del volumen de control, por lo que se pueden incluir en los términos que contienen $\partial \bar{p} / \partial x$, $\partial \bar{p} / \partial y$ y $\partial \bar{p} / \partial z$, respectivamente [46].

- b) El valor de la viscosidad turbulenta ν_t es normalmente muy superior al de ν , por lo que se considera despreciable ν frente a ν_t , es decir $\nu + \nu_t \cong \nu_t$.

Con estas consideraciones las ecuaciones (2.43)-(2.45), junto con la ecuación de continuidad para el promedio temporal $\bar{\mathbf{u}}$, forman el siguiente sistema

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u} \bar{\mathbf{u}} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x}, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{v} \bar{\mathbf{u}} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{v} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial y}, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{w} \bar{\mathbf{u}} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{w} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z}. \quad (2.49)$$

Estas expresiones son similares a las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles (2.33)-(2.36), con la diferencia de que los valores de la velocidad y la presión se han cambiado por sus promedios temporales, la viscosidad cinemática por la viscosidad turbulenta y se ha añadido un nuevo sumando al término fuente de las tres últimas ecuaciones. Dicho sumando desaparecería haciendo la hipótesis adicional de que la variación espacial de ν_t es muy pequeña. En efecto, en (2.47)

$$\nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} \cong \nu_t \nabla \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} = \nu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial z} \right),$$

y al suponer que las derivadas son continuas y de la ecuación de continuidad (2.46), se obtiene

$$\nu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial z} \right) = \nu_t \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = 0,$$

y lo mismo sucede en las otras dos ecuaciones. En la siguiente sección no se despreciará este término.

2.4. Ecuaciones de Saint-Venant en dos dimensiones

Un problema que acompaña al sistema de ecuaciones formado por (2.46)-(2.49) de la sección anterior, es que dicho sistema cuenta con cuatro ecuaciones y cinco incógnitas, una por cada componente de la velocidad $\bar{\mathbf{u}}$ y dos adicionales correspondientes a la presión \bar{p} y a la viscosidad turbulenta ν_t ; esto hace que el sistema sea muy difícil y hasta ahora, imposible de resolver [59]. Sin embargo, en el caso que nos ocupa, las ecuaciones dadas pueden ser llevadas bajo determinadas condiciones a un nuevo modelo llamado ecuaciones de Reynolds en dos dimensiones, el cual consiste de tres ecuaciones con tres incógnitas, que si bien, no puede ser resuelto analíticamente, si se cuentan con métodos numéricos para resolverlas.

Las condiciones a las que se refiere el párrafo anterior se deben a la naturaleza propia de los fluidos de aguas poco profundas y al entorno en el que se estudian. En este sentido, se van a considerar flujos en superficie libre, turbulentos y no permanentes en los que la profundidad del fluido es pequeña en relación a las dimensiones horizontales. Se tomará el plano x, y horizontal y el sentido ascendente del eje z como positivo.

Las hipótesis fundamentales de este modelo son las siguientes [20]:

- a) La pendiente del fondo es pequeña, esto significa que el valor del tirante medido en la dirección vertical y en la dirección perpendicular al fondo es casi el mismo.
- b) La curvatura de las líneas de corriente es pequeña, por lo que la distribución de presiones puede considerarse hidrostática.
- c) El movimiento principal de las partículas ocurre en planos horizontales.
- d) La distribución en la vertical de las componentes en x e y de la velocidad (\bar{u}, \bar{v}) es prácticamente uniforme. Esto permite, al integrar en la vertical, sustituir \bar{u} y \bar{v} por sus valores medios.

- e) Las fuerzas de masa que actúan son la gravedad en dirección vertical y la fuerza de Coriolis⁸ en el plano horizontal, por lo que

$$\mathbf{F} = (f\bar{v}, -f\bar{u}, -g)^T,$$

siendo

$$f = 2\Omega \text{sen } \phi, \quad (2.50)$$

donde f es el parámetro de Coriolis, $\Omega \cong 7.292 \times 10^{-5}$ rad/s es la velocidad angular de la Tierra y ϕ es la latitud.

Las dos primeras componentes de \mathbf{F} son las componentes zonales de la fuerza de Coriolis para movimientos meridional y vertical, respectivamente [25].

- f) La aceleración vertical de las partículas se considera despreciable frente a la aceleración de la gravedad g .
- g) La pérdida de energía por fricción en los contornos, en flujo no permanente, puede evaluarse mediante la fórmulas empíricas válidas para flujo permanente, como las de Chézy⁹ o Manning¹⁰.
- h) Se considera despreciable la variación de la viscosidad turbulenta ν_t con respecto a la profundidad.

⁸Gaspard-Gustave de Coriolis (1792–1843) fue ingeniero y matemático francés. En 1836 describió el efecto que se observa en un sistema de referencia en rotación (y por tanto no inercial) cuando un cuerpo se encuentra en movimiento respecto de dicho sistema de referencia, que se conoce como efecto de Coriolis.

⁹Antoine de Chézy (1718–1798) fue un ingeniero hidráulico francés, conocido por la fórmula de Chézy que estima la velocidad del flujo en una tubería.

¹⁰Robert Manning (1816–1897) fue un ingeniero irlandés que mejoró en 1889 la fórmula de Chézy para el cálculo de la velocidad del flujo en canales abiertos y tuberías.

Al integrar sobre la vertical se aplicará la regla de Leibnitz¹¹ dada por

$$\int_{g_1(\lambda)}^{g_2(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) dx = \frac{d}{d\lambda} \int_{g_1(\lambda)}^{g_2(\lambda)} f(x, \lambda) dx - f(g_2(\lambda), \lambda) g_2'(\lambda) + f(g_1(\lambda), \lambda) g_1'(\lambda). \quad (2.51)$$

Se denotará por z_b el fondo del fluido, z_s la superficie libre y h el tirante o la profundidad del fluido, esto es $h = z_s - z_b$. De la hipótesis d), se denotan los promedios verticales de \bar{u} y \bar{v} por \hat{u} y \hat{v} respectivamente, y que a su vez se definen como

$$\hat{u} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz \quad \text{y} \quad \hat{v} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} \bar{v} dz. \quad (2.52)$$

Teorema 2.4.1 *El promedio en la vertical de la ecuación de continuidad es igual a cero, es decir*

$$\frac{\partial h \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial h \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \quad (2.53)$$

Demostración. Desarrollando la ecuación de continuidad (2.46) se tiene

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0. \quad (2.54)$$

Integrando (2.54) con respecto a z entre el fondo y la superficie libre, se tiene

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} dz = 0, \\ \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dz + \bar{w}(z_s) - \bar{w}(z_b) = 0. \quad (2.55)$$

¹¹Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) fue uno de los grandes pensadores alemanes del siglo XVII y principios del siglo XVIII, se le reconoce como “El último genio universal”. Realizó profundas e importantes contribuciones en las áreas de metafísica, epistemología, lógica, filosofía de la religión, así como a la matemática, física, geología, jurisprudencia e historia. Inventó el cálculo infinitesimal, independientemente de Newton y su notación es la que se emplea desde entonces.

Al aplicar la regla de Leibnitz (2.51) al primer y segundo sumando de (2.55), resulta

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz - \bar{u}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{u}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (2.56)$$

y

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \bar{v} dz - \bar{v}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} + \bar{v}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial y}. \quad (2.57)$$

El tercer sumando de (2.55), $\bar{w}(z_s)$, es la velocidad del flujo en la dirección z de los puntos de la superficie libre z_s del fluido, y está dada por la derivada total de $z_s(x, y, t)$, esto es

$$\bar{w}(z_s) = \frac{dz_s}{dt} = \frac{\partial z_s}{\partial t} + \bar{u}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{v}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y}. \quad (2.58)$$

Por un argumento análogo

$$\bar{w}(z_b) = \frac{dz_b}{dt} = \frac{\partial z_b}{\partial t} + \bar{u}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + \bar{v}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial y}.$$

Como se está considerando fijo el fondo, esto implica que $\frac{\partial z_b}{\partial t} = 0$, y así, $\bar{w}(z_b)$ toma la forma

$$\bar{w}(z_b) = \bar{u}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + \bar{v}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial y}. \quad (2.59)$$

Sustituyendo (2.56)-(2.59) en (2.55) se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz - \bar{u}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{u}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \bar{v} dz \\ &\quad - \bar{v}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} + \bar{v}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial y} + \frac{\partial z_s}{\partial t} + \bar{u}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} \\ &\quad + \bar{v}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} - \bar{u}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} - \bar{v}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial y}, \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \bar{v} dz + \frac{\partial z_s}{\partial t} = 0. \quad (2.60)$$

De la definición de los promedios verticales \widehat{u} y \widehat{v} se tiene que

$$\int_{z_b}^{z_s} \overline{u} dz = h \widehat{u} \quad \text{y} \quad \int_{z_b}^{z_s} \overline{v} dz = h \widehat{v}. \quad (2.61)$$

Como la cota del fondo no varía con respecto al tiempo t , entonces

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(z_b + h) = \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (2.62)$$

Al sustituir (2.52) y (2.62) en (2.60), se obtiene el **promedio en la vertical de la ecuación de continuidad**

$$\frac{\partial h \widehat{u}}{\partial x} + \frac{\partial h \widehat{v}}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0,$$

como se quería demostrar. ■

Cálculo del promedio en la vertical de las ecuaciones dinámicas (2.47)-(2.49). Para ello, se observa que, por la hipótesis e):

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)^T = (f\overline{v}, -f\overline{u}, -g)^T. \quad (2.63)$$

Considerando (2.46) y (2.63) en la ecuación (2.47), se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}(\nabla \cdot \overline{\mathbf{u}}) + \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla \overline{u} &= f\overline{v} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \overline{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} &= f\overline{v} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \overline{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Análogamente al aplicar (2.46) y (2.63) a las ecuaciones (2.48) y (2.49), se obtienen

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \overline{u} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} = -f\overline{u} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \overline{v} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial y} \quad (2.65)$$

y

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} + \overline{u} \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{w}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \overline{w} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial z}. \quad (2.66)$$

Como

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$$

es la aceleración vertical del fluido, las hipótesis c) y f) permiten considerarla despreciable, al igual que el gradiente de la componente vertical de la velocidad $\nabla \bar{w}$ y $\partial \bar{\mathbf{u}}/\partial z$. Así, (2.66) se transforma en

$$-g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0.$$

O bien,

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\rho g.$$

Integrando esta ecuación desde la superficie libre z_s hasta z , con $z_b \leq z \leq z_s$, resulta:

$$\int_{z_s}^z \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} d\zeta = - \int_{z_s}^z \rho g d\zeta,$$

de donde

$$\bar{p}(z) - \bar{p}(z_s) = -\rho g(z - z_s),$$

por lo que

$$\bar{p}(z) = \bar{p}(z_s) + \rho g(z_s - z), \quad z_b \leq z \leq z_s. \quad (2.67)$$

Como el valor promedio de la presión sobre la superficie libre del fluido $\bar{p}(z_s)$ es la presión atmosférica, se puede suponer constante sobre la superficie libre del fluido en el dominio. Así que al derivar con respecto a x , resulta

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \rho g \frac{\partial z_s}{\partial x},$$

luego

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = g \frac{\partial z_s}{\partial x}. \quad (2.68)$$

Similarmente, si se deriva (2.67) con respecto a y , se tiene

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = g \frac{\partial z_s}{\partial y}. \quad (2.69)$$

Si se multiplica la ecuación de continuidad (2.54) por \bar{u} y se le suma a (2.64), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \\ f\bar{v} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}. \end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + 2\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \\ f\bar{v} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{w})}{\partial z} = f\bar{v} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}.$$

Considerando (2.68), la ecuación anterior queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{w})}{\partial z} = \\ f\bar{v} - g \frac{\partial z_s}{\partial x} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Análogamente, al multiplicar (2.54) por \bar{v} , sumarlo a (2.65) y aplicar (2.69), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v}^2)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{v}\bar{w})}{\partial z} = \\ -f\bar{u} - g \frac{\partial z_s}{\partial y} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{v} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Igual a como se trabajó para obtener el promedio en la vertical de la ecuación de continuidad (2.53), enseguida se integran (2.70) y (2.71) con respecto a z entre el fondo z_b y la superficie libre z_s :

$$\int_{z_b}^{z_s} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} \right] dz = \int_{z_b}^{z_s} \left(f\bar{v} - g \frac{\partial z_s}{\partial x} \right) dz + \int_{z_b}^{z_s} \left(\nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} \right) dz \quad (2.72)$$

y

$$\int_{z_b}^{z_s} \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{w})}{\partial z} \right] dz = \int_{z_b}^{z_s} \left(-f\bar{u} - g \frac{\partial z_s}{\partial y} \right) dz + \int_{z_b}^{z_s} \left(\nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{v} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial y} \right) dz. \quad (2.73)$$

Al aplicar la regla de Leibnitz (2.51) a cada término del primer miembro de (2.72):

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz - \bar{u}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial t} + \bar{u}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial t}, \quad (2.74)$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\bar{u}^2)}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u}^2 dz - \bar{u}^2(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{u}^2(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad (2.75)$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u}\bar{v} dz - \bar{u}(z_s)\bar{v}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} + \bar{u}(z_b)\bar{v}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial y}, \quad (2.76)$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} dz = \bar{u}(z_s)\bar{w}(z_s) - \bar{u}(z_b)\bar{w}(z_b). \quad (2.77)$$

Sustituyendo (2.58) y (2.59) en (2.77):

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} dz = \bar{u}(z_s) \left[\frac{\partial z_s}{\partial t} + \bar{u}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{v}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} \right] - \bar{u}(z_b) \left[\bar{u}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + \bar{v}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial y} \right],$$

de donde

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial z} dz = \bar{u}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial t} + \bar{u}^2(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{u}(z_s)\bar{v}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} - \bar{u}^2(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} - \bar{u}(z_b)\bar{v}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial y}. \quad (2.78)$$

Sumando (2.74)-(2.76) y (2.78) y considerando que $\partial z_b/\partial t = 0$, resulta

$$\int_{z_b}^{z_s} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} \right] dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u}^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u}\bar{v} dz. \quad (2.79)$$

Para integrar \bar{u}^2 y $\bar{u}\bar{v}$ se tiene en cuenta la hipótesis d) y se sustituye \bar{u} y \bar{v} por sus valores promedio \widehat{u} y \widehat{v} definidos en (2.52). Como la distribución de estas variables no es exactamente uniforme, los valores promedio temporal \bar{u} y \bar{v} se están descomponiendo en

$$\bar{u} = \widehat{u} + \bar{u}'' \quad \text{y} \quad \bar{v} = \widehat{v} + \bar{v}'',$$

lo que da lugar a la aparición de unos términos adicionales que se pueden considerar tensiones efectivas de un tipo distinto a las de Reynolds, pero con un significado físico similar [20]. En algunos casos su contribución puede llegar a ser considerable, pero en el presente trabajo no se consideran estos términos. Así pues se toma

$$\int_{z_b}^{z_s} \bar{u}^2 dz = h \widehat{u}^2 \quad \text{y} \quad \int_{z_b}^{z_s} \bar{u}\bar{v} dz = h \widehat{u}\widehat{v},$$

con lo que al considerar (2.52), la ecuación (2.79) toma la forma

$$\int_{z_b}^{z_s} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} \right] dz = \frac{\partial(h\widehat{u})}{\partial t} + \frac{\partial(h\widehat{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(h\widehat{u}\widehat{v})}{\partial y}. \quad (2.80)$$

Para la primera integral del segundo miembro de (2.72) se observa que la cota de la superficie libre no varía respecto a z , por lo que

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_s} \left(f\bar{v} - g\frac{\partial z_s}{\partial x} \right) dz &= fh\widehat{v} - gh\frac{\partial z_s}{\partial x} \\ &= fh\widehat{v} - gh\left(\frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2.81)$$

El integrando de la segunda integral del lado derecho de (2.72) se desarrolla de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(2\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_s} \left(\nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} \right) dz &= \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(2\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) dz \\ &\quad + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] dz \\ &\quad + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \right] dz. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Para calcular las dos primeras integrales se aplica la regla de Leibnitz (2.51):

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(2\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} 2\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dz$$

$$- 2 \left(\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)_{z=z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + 2 \left(\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)_{z=z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (2.83)$$

y

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right] dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) dz$$

$$- \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right]_{z=z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y} + \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right]_{z=z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y}. \quad (2.84)$$

De la hipótesis h) ν_t no varía con la profundidad, y de la hipótesis d) la distribución en la vertical de las componentes en x y en y de la velocidad (\bar{u}, \bar{v}) es prácticamente uniforme, esto implica que

$$\left(\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)_{z=z_s} \cong \left(\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)_{z=z_b}$$

y

$$\left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right]_{z=z_s} \cong \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right]_{z=z_b}.$$

Considerando el caso en que la lámina de agua es aproximadamente paralela al fondo, se tiene que la pendiente en la superficie es aproximadamente igual a la pendiente en el fondo, es decir

$$\frac{\partial z_s}{\partial x} \cong \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z_s}{\partial y} \cong \frac{\partial z_b}{\partial y}.$$

Así, al aproximar \bar{u} y \bar{v} por sus valores promedios \widehat{u} y \widehat{v} , las ecuaciones (2.83) y (2.84) toman la forma

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(2\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \left(2\nu_t h \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x} \right), \quad (2.85)$$

y

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right] dz = \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t h \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) \right]. \quad (2.86)$$

La última integral de (2.82) queda

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right] dz &= \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right]_{z=z_s} \\ &\quad - \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right]_{z=z_b}. \end{aligned}$$

Ahora de la hipótesis c) se tiene que $\partial \bar{w} / \partial x = 0$, y recordando que $\nu_t = \mu_t / \rho$, entonces

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right] dz = \frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} (z_s) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} (z_b) \right),$$

o bien

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right] dz = \frac{1}{\rho} (\tau_{s_x} - \tau_{b_x}), \quad (2.87)$$

donde τ_{s_x} y τ_{b_x} , son las componentes en la dirección x de la tensión tangencial que actúa sobre la superficie libre y el fondo respectivamente. Luego, de (2.85), (2.86) y (2.87) la integral en (2.82) está dada por

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_s} \left(\nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} \right) dz &= \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(2\nu_t h \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t h \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{\rho} (\tau_{s_x} - \tau_{b_x}). \end{aligned} \quad (2.88)$$

Al fin, de las ecuaciones (2.80), (2.81) y (2.88), la ecuación (2.72) se convierte en

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (h\widehat{u})}{\partial t} + \frac{\partial (h\widehat{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial (h\widehat{u}\widehat{v})}{\partial y} &= fh\widehat{v} \\
&-gh \left(\frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\nu_t h \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t h \left(\frac{\partial \widehat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{\rho} (\tau_{s_x} - \tau_{b_x}) .
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Con argumentos similares, la ecuación (2.73) se transforma en

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (h\widehat{v})}{\partial t} + \frac{\partial (h\widehat{u}\widehat{v})}{\partial x} + \frac{\partial (h\widehat{v}^2)}{\partial y} &= -fh\widehat{u} \\
&-gh \left(\frac{\partial z_b}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu_t h \left(\frac{\partial \widehat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial y} \right) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \left(2\nu_t h \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} (\tau_{s_y} - \tau_{b_y}) .
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Enseguida se realizan algunas modificaciones a las ecuaciones (2.89) y (2.90):

- a) Se eliminan los símbolos $\widehat{\quad}$, con lo que las variables u y v representan en lo sucesivo el promedio en la vertical de la media temporal de las componentes del vector velocidad \mathbf{u} .
- b) Las tensiones tangenciales en la superficie τ_{s_x}, τ_{s_y} debidas al viento, se suelen despreciar a no ser que el tamaño de la superficie sometida a la acción del viento sea muy grande. En estos casos hay diferentes expresiones que por lo regular son de la forma

$$\frac{\tau_{s_x}}{\rho} = kW^2 \cos \theta_x \quad \text{y} \quad \frac{\tau_{s_y}}{\rho} = kW^2 \cos \theta_y, \tag{2.91}$$

donde k es un coeficiente empírico, W es la velocidad del viento y θ_x, θ_y son los ángulos que forma la dirección del viento con los

ejes. Hay casos en que el exponente de W es distinto de 2 y se ajusta de manera experimental.

- c) Se denota por S_{0_x}, S_{0_y} a las variaciones del fondo del cauce en forma de pendiente y se llaman **pendiente geométrica** según x y y , respectivamente. Es positiva si el fondo desciende con respecto a x o y y negativa si el fondo es creciente, es decir

$$S_{0_x} = -\frac{\partial z_b}{\partial x} \quad \text{y} \quad S_{0_y} = -\frac{\partial z_b}{\partial y}. \quad (2.92)$$

- d) Las tensiones en el fondo τ_{b_x}, τ_{b_y} se calculan por medio de la fórmula de Chézy cuyo valor para las tensiones según x e y son

$$\tau_{b_x} = \rho g \frac{u\sqrt{u^2 + v^2}}{C^2} \quad \text{y} \quad \tau_{b_y} = \rho g \frac{v\sqrt{u^2 + v^2}}{C^2}.$$

El coeficiente C de Chézy depende del coeficiente de Manning n y está dado por

$$C = \frac{R_h^{1/6}}{n},$$

de donde

$$\tau_{b_x} = \rho g \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{R_h^{1/3}} \quad \text{y} \quad \tau_{b_y} = \rho g \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{R_h^{1/3}}.$$

R_h es el radio hidráulico, que suele tomarse igual a h . El coeficiente de Manning n se determina, en la práctica, a partir de medidas experimentales o se estima a partir de valores que ya han sido almacenados en tablas (más información en el Glosario de Términos o en la referencia [36]).

- e) Se denotan por S_{f_x}, S_{f_y} a los términos (o pendientes) de fricción del agua con el fondo del cauce en cada una de las direcciones coordenadas x, y , respectivamente:

$$S_{f_x} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad \text{y} \quad S_{f_y} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}. \quad (2.93)$$

f) Se llama término turbulento a las siguientes expresiones:

$$S_{t_1} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2\nu_t h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t h \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right) \quad (2.94)$$

y

$$S_{t_2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t h \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\nu_t h \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (2.95)$$

Con estas modificaciones, las ecuaciones (2.89) y (2.90) toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} &= fhv + ghS_{0_x} - gh \frac{\partial h}{\partial x} + S_{t_1} \\ &\quad + \frac{\tau_{s_x}}{\rho} - g \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \\ &= fhv + gh(S_{0_x} - S_{f_x}) - gh \frac{\partial h}{\partial x} \\ &\quad + S_{t_1} + \frac{\tau_{s_x}}{\rho} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} &= -fhu + ghS_{0_y} - gh \frac{\partial h}{\partial y} + S_{t_2} \\ &\quad + \frac{\tau_{s_y}}{\rho} - g \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \\ &= -fhu + gh(S_{0_y} - S_{f_y}) - gh \frac{\partial h}{\partial y} \\ &\quad + S_{t_2} + \frac{\tau_{s_y}}{\rho}. \end{aligned}$$

que corresponden el promedio en la vertical de las ecuaciones dinámicas (2.47)-(2.49). De estas dos últimas ecuaciones junto con el promedio en la vertical de la ecuación de continuidad (2.53), de acuerdo con las nuevas notaciones, se obtiene el sistema:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0, \quad (2.96)$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = fhv + \frac{\tau_{sx}}{\rho} + gh(S_{0x} - S_{fx}) + S_{t1}, \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) = -fhu + \frac{\tau_{sy}}{\rho} + gh(S_{0y} - S_{fy}) + S_{t2}. \quad (2.98)$$

Las ecuaciones (2.96), (2.97) y (2.98), forman el sistema que se conoce como las **ecuaciones de Reynolds en 2D**, **ecuaciones de Saint-Venant en 2D**¹² o **ecuaciones de las aguas someras en forma conservativa**.

La forma matricial del sistema (2.96)-(2.98) está dada por

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} = \mathbf{G}, \quad (2.99)$$

donde

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix},$$

¹²Jean-Claude Barré de Saint-Venant (1797–1886) fue un ingeniero francés contemporáneo de Navier (1785–1836). Trabajó principalmente en elasticidad, hidrostática e hidrodinámica. Aunque Navier no llegó a apreciar el significado físico de sus ecuaciones para flujo de fluidos, Saint-Venant sí lo hizo y siete años después de la muerte de Navier, re-derivó las ecuaciones de Navier para un flujo viscoso considerando tensiones viscosos internos y evitando por completo el desarrollo molecular de Navier; aunque su nombre nunca se le asoció a estas ecuaciones. Se debe recalcar que tanto Stokes (1819–1903) como Saint-Venant, derivaron correctamente la ecuación de Navier para flujo de fluidos, pero Stokes publicó sus resultados en 1845, dos años después de que Saint-Venant publicara los suyos que fue en 1843 [4].

y el término fuente es

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ fhv + \frac{\tau_{sx}}{\rho} + gh(S_{0x} - S_{fx}) + S_{t_1} \\ -fhu + \frac{\tau_{sy}}{\rho} + gh(S_{0y} - S_{fy}) + S_{t_2} \end{pmatrix}.$$

La variable h representa el tirante medido verticalmente, u y v son los promedios en la vertical de las medias temporales de las componentes horizontales del vector velocidad \mathbf{u} , f es el parámetro de Coriolis dado en (2.50), y los valores de $\tau_{sx}, \tau_{sy}, S_{0x}, S_{0y}, S_{fx}, S_{fy}, S_{t_1}$ y S_{t_2} están dados en (2.91)-(2.95).

Con frecuencia no se tienen en cuenta los términos de Coriolis f , tensiones del viento τ_{sx}, τ_{sy} , ni los términos turbulentos S_{t_1}, S_{t_2} , que al no considerarlos, el término fuente \mathbf{G} se reduce a

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{pmatrix}. \quad (2.100)$$

Si z_b es la elevación del terreno con respecto al nivel medio del mar, es decir, $z_b = d(x, y)$ en cada punto $(x, y) \in \Omega$ como en la figura 1.1, entonces las pendientes geométricas S_{0x} y S_{0y} dadas en (2.92) se expresan en función de $H(x, y)$, donde $H(x, y)$ representa la distancia al fondo desde un nivel de referencia fijo $z = z_0$, con sentido positivo hacia abajo. Así, las pendientes son positivas si el fondo desciende y negativas si el fondo asciende, esto es

$$S_{0x} = \frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{y} \quad S_{0y} = \frac{\partial H}{\partial y}.$$

Las variables conservativas hu y hv representan los caudales unitarios, o caudales por unidad de ancho en un canal rectangular. En la figura 1.1, se presenta una sección longitudinal del dominio ocupado por el fluido en un plano vertical $x = x_0$.

Son necesarias condiciones iniciales y de contorno para la resolución del sistema (2.99). En situaciones generales no es posible obtener soluciones analíticas del sistema y se recurre a los métodos numéricos.

En el siguiente capítulo se revisa cómo se aborda este problema vía volúmenes finitos, que es la que está implementada en el software GUAD-Flow 2D, que a su vez se usa en los capítulos 4, 5 y 6.

Capítulo 3

Método de Volúmenes Finitos

El presente capítulo describe las ideas básicas del método de volúmenes finitos para aproximar numéricamente la solución de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas. En la primera sección se revisa la discretización del dominio que hace el método de volúmenes finitos para resolver numéricamente ecuaciones en dos dimensiones espaciales con condiciones iniciales y de frontera. Para esto, se mencionarán de manera general tres de los diferentes tipos de volúmenes finitos que se aplican a este tipo de problemas: tipo arista, tipo vértice y tipo celda. Una vez que se tiene la discretización del dominio, se discretiza en el tiempo y en el espacio la forma integral de las ecuaciones en consideración, que en nuestro caso será la forma integral de las de Saint-Venant. Se hará ésto último en la sección 3.2.

3.1. Discretización del dominio. Tipos de volúmenes finitos

3.1.1. Volumen finito tipo arista

Para formar la malla de volúmenes finitos se parte de una malla formada por triángulos, cada triángulo se parte en tres subtriángulos uniendo sus respectivos vértices con su baricentro. Cada volumen finito se obtiene al unir dos subtriángulos que poseen en común una arista de la malla inicial. El centro del volumen finito es el punto medio de la arista. Una de las ventajas del método es que evita los problemas derivados del cálculo de la perpendicular a las aristas fronteras en los puntos angulosos del contorno, en donde habría dos perpendiculares, pues dichos puntos nunca son nodos de la malla. Hay que mencionar que no se utilizan los nodos ni las celdas iniciales, véase la figura 3.1.

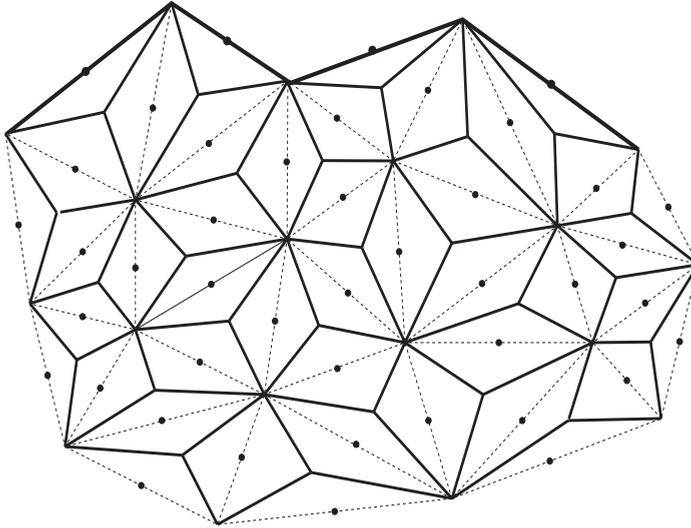


Figura 3.1: Construcción de volúmenes finitos tipo arista, donde los puntos que se muestran son los centros de los volúmenes finitos correspondientes.

3.1.2. Volumen finito tipo vértice

Los volúmenes finitos tipo vértice (*cell vertex*) tienen la característica que los nodos de la malla original son los nodos de la malla de volúmenes finitos, y en torno a cada uno de estos se construyen las nuevas celdas. A los vértices de la malla se les asignan los valores de las variables en cada celda. En este método es más sencilla la aplicación de condiciones de contorno, pues se conoce el valor de las variables en cada nodo frontera. Un problema del método es que se tiene que construir una malla nueva (malla dual). La malla previa puede constar de triángulos o cuadriláteros, aunque las mallas triangulares son más recomendables por su sencillez y flexibilidad para el tipo de problema que nos ocupa [20]. Dado el nodo i , se toman los baricentros de los triángulos que tienen a i como vértice común. La frontera Γ_i del volumen finito C_i se obtiene uniendo un baricentro de un triángulo con los puntos medios de las aristas que pertenecen a este triángulo y que confluyen en i , y así para todos los baricentros, a modo de cerrar el polígono. Así, la frontera Γ_i del volumen finito C_i se compone de medianas de los triángulos que confluyen en el nodo i (véase la figura 3.2). Una variante de este método consiste en unir directamente centros de triángulos (sin pasar por el punto medio de la arista común); otra en trazar la perpendicular por cada punto medio de una arista, hasta que se corte con la perpendicular por el punto medio de la arista siguiente.

Dadas las celdas C_i y C_j , se denota por Γ_{ij} a la frontera común de ambas celdas. En la figura 3.3, Γ_{ij} es la unión de los segmentos AM y MB , donde A y B son los baricentros de los triángulos que comparten el lado ij y M el punto medio de dicho lado. Se denota también por K_i al conjunto de todos los nodos que tienen al i como vecino.

El vector normal a Γ_{ij} dirigido hacia el exterior de la celda C_i está definido como

$$\eta_{ij} = \begin{cases} \nu_1, & \text{en el segmento } AM \\ \nu_2, & \text{en el segmento } MB. \end{cases}$$

La magnitud del vector η_{ij} , representado por $\|\eta_{ij}\|$ coincide con la longitud de la arista correspondiente.

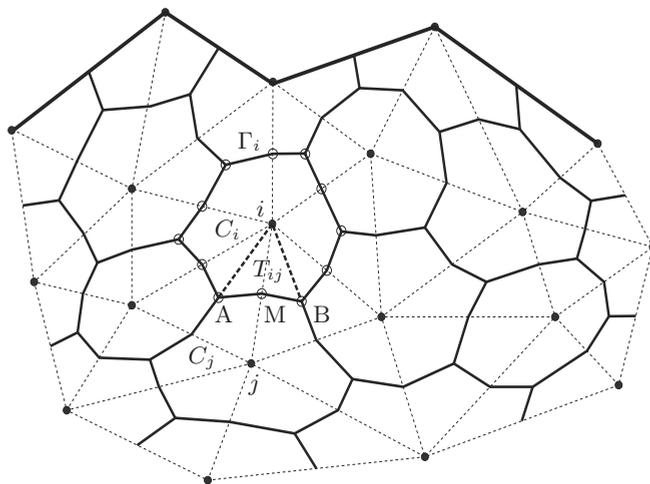


Figura 3.2: Construcción de volúmenes finitos tipo vértice, donde la malla previa consta de triángulos. La subcelda T_{ij} es la unión de los triángulos iAM e iBM .

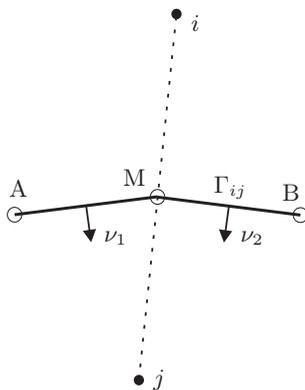


Figura 3.3: Vectores normales ν_1 y ν_2 a la frontera $\Gamma_{ij} = \overline{AM} \cup \overline{MB}$, dirigidos hacia el exterior de la celda C_i , véase figura 3.2.

También se define $\tilde{\eta}_{ij}$ como

$$\tilde{\eta}_{ij} = \frac{\eta_{ij}}{\|\eta_{ij}\|} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})^T. \quad (3.1)$$

Se denomina subcelda T_{ij} a la unión de los dos triángulos ΔiAM y ΔiBM . Como el ΔiAM tiene base $\|\nu_1\|$, entonces su área está dada por

$$A_{ij_1} = \frac{\|\nu_1\|d_{ij_{AM}}}{2}, \quad (3.2)$$

donde $d_{ij_{AM}}$ es su altura. Análogamente el área del ΔiBM es

$$A_{ij_2} = \frac{\|\nu_2\|d_{ij_{MB}}}{2}. \quad (3.3)$$

3.1.3. Volumen finito tipo celda

Los volúmenes finitos tipo celda (*cell centered*) coinciden con las celdas de la malla inicial y los valores de las variables dependientes se almacenan en los centros de cada celda (centros de cuadriláteros o baricentros de los triángulos, según el caso). Este método tiene la ventaja de utilizar la malla previa y el inconveniente de que los nodos a los que se asignan los valores medios o representativos de las variables en las celdas no coinciden con los nodos de la malla original, véase la figura 3.4.

El proceso para construir la malla de volumen finito a partir de una malla inicial triangular es la siguiente: Cada triángulo T_i de la malla inicial da lugar a un volumen finito C_i , se calculan los baricentros de todos los triángulos o volúmenes finitos y esos son los nodos de la malla del volumen finito. La frontera Γ_i del volumen finito C_i son los lados del triángulo T_i . Si las celdas C_i y C_j tienen frontera común y esta consta de más de un punto se le denotará por Γ_{ij} y al centro de la celda C_j se le llamará nodo vecino al nodo i , véase figura 3.4. Se denota también por K_i al conjunto de todos los nodos vecinos del nodo i .

El vector que es normal a Γ_{ij} dirigido hacia el exterior de la celda C_i , está definido como

$$\eta_{ij} = \nu_1.$$

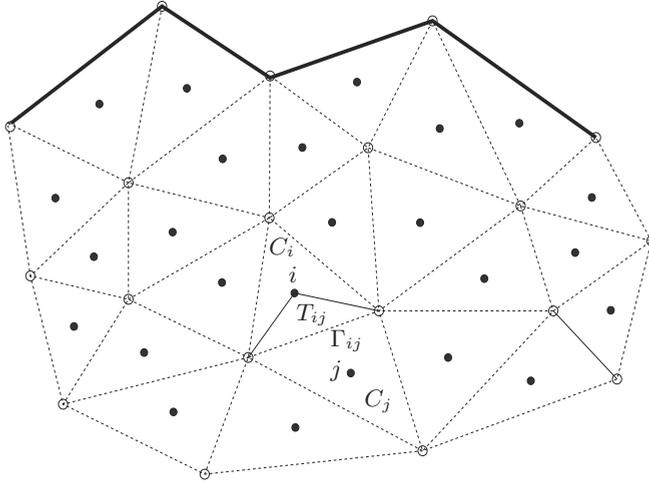


Figura 3.4: Malla de volumen finito tipo celda formado por triángulos, donde los puntos que se muestran son los baricentros de los triángulos o volúmenes finitos, y son justamente los nodos de la malla del volumen finito.

La magnitud del vector η_{ij} , coincide con la longitud de la arista correspondiente. También se define $\tilde{\eta}_{ij}$, como

$$\tilde{\eta}_{ij} = \frac{\eta_{ij}}{\|\eta_{ij}\|} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})^T. \quad (3.4)$$

Aquí la subcelda T_{ij} es el triángulo definido por la arista común a las dos celdas C_i y C_j y el vértice i , de tal modo que su área está dada por

$$A_{ij} = \frac{\|\nu_1\| d_{ij}}{2}, \quad (3.5)$$

donde d_{ij} es su altura.

En la siguiente sección se aplica la discretización tipo celda para mostrar cómo el método de volúmenes finitos discretiza las ecuaciones de Saint-Venant. En cada uno de estos volúmenes se realiza la discretización de la forma integral de las ecuaciones, que expresan leyes de conservación

y que mediante la aplicación del teorema de la divergencia de Gauss se simplifican de manera significativa. Las expresiones resultantes establecen la exacta conservación de propiedades relevantes del flujo en cada celda. Los términos de las derivadas con respecto al tiempo se sustituyen por aproximaciones del tipo diferencias finitas, obteniendo ecuaciones algebraicas simples en el que el valor de las variables en el tiempo t_{n+1} dependen del valor de dichas variables en el tiempo t_n . Los cálculos de la siguiente sección se hacen pensando en una discretización tipo celda con malla inicial triangular para el dominio Ω (T_{ij} y Γ_{ij} son más simples que en tipo vértice) ya que ésta es la usada por el modelo computacional GUADFlow 2D al que haremos mención más adelante.

Históricamente, muchas de las ideas del método de volúmenes finitos fueron desarrolladas para el caso especial de la dinámica de gases compresibles (ecuaciones de Euler), que se aplicaron en aerodinámica, astrofísica, ondas de detonación y campos relacionados en donde aparecen ondas de choque. En el estudio de las ecuaciones más simples como la ecuación de advección, ecuación de Burger y ecuaciones de las aguas someras, han jugado un papel importante en el desarrollo de estos métodos, pero sólo como problemas modelo, el fin último es la aplicación a las ecuaciones de Euler [29].

Las ecuaciones de Euler son no lineales. Esta no linealidad y la consiguiente formación de choque observado en las soluciones, dieron lugar a muchos desafíos computacionales que motivaron el desarrollo de este método. La teoría matemática de problemas hiperbólicos no lineales es muy rica, y el desarrollo y análisis de los métodos de volúmenes finitos requiere de una rica interacción entre esta teoría matemática, el modelado físico y el análisis numérico.

El método de volúmenes finitos está estrechamente relacionado con el método de diferencias finitas, y un método de volúmenes finitos a menudo puede ser interpretado directamente como una aproximación de diferencias finitas para la ecuación diferencial. Sin embargo, el método de volúmenes finitos discretiza la forma integral de las ecuaciones de conservación directamente en el espacio físico, un punto de partida que le da muchas ventajas [29, 54].

El empleo del método de volúmenes finitos en la dinámica de fluidos computacional es relativamente reciente. Lo introdujeron McDonald en 1971 y de manera independiente por McCormack y Paullay en 1972, para la resolución de las ecuaciones de Euler bidimensionales, y extendido en 1973 por A. Rizzi y M. Inouye para flujos tridimensionales [24]. Eymard *et al.* (2000) [19] atribuyen su introducción a principios de los sesentas del siglo pasado a Tikhonov (1906–1993) y Samarskiĭ (1919–) para la resolución de las ecuaciones de convección difusión.

3.2. Discretización del modelo de Saint-Venant en dos dimensiones

Enseguida se aplica el método de volúmenes finitos tipo celda con malla inicial triangular para el dominio Ω , para discretizar la forma integral de las ecuaciones de Saint-Venant en dos dimensiones espaciales. Para esto se hace una discretización hacia delante de la derivada temporal y una discretización de los términos flujo y fuente, obteniendo así, un método iterativo explícito que permite calcular el valor de las variables desconocidas en las ecuaciones de Saint-Venant en cada volumen finito C_i y en cada instante de tiempo t_n .

A fin de transformar el sistema de ecuaciones (2.99) a una forma integral, se define

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}) = (\mathbf{F}_1(\mathbf{U}), \mathbf{F}_2(\mathbf{U})), \quad (3.6)$$

por lo que el sistema de Saint-Venant (2.99) se puede escribir como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F} = \mathbf{G}, \quad (3.7)$$

donde se considera el término fuente \mathbf{G} como en (2.100).

3.2.1. Integración y discretización temporal

Si el dominio del sistema (2.99) está dividido en un conjunto de volúmenes finitos C_i , tipo celda descrito en la sección 3.1.3, al calcular la integral de superficie de (3.7) en cada uno de ellos, se obtiene

$$\iint_{C_i} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dA + \iint_{C_i} \nabla \cdot \mathcal{F} dA = \iint_{C_i} \mathbf{G} dA. \quad (3.8)$$

Al aplicar el teorema de la divergencia de Gauss al segundo sumando (término de flujo) del sistema (3.8), la integral de superficie se convierte en una integral de línea sobre Γ_i (donde Γ_i es la frontera de la celda C_i):

$$\iint_{C_i} \nabla \cdot \mathcal{F} dA = \int_{\Gamma_i} \mathcal{F} \cdot \tilde{\eta} dl,$$

que al sustituirlo en (3.8) se obtiene

$$\iint_{C_i} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dA + \int_{\Gamma_i} \mathcal{F} \cdot \tilde{\eta} dl = \iint_{C_i} \mathbf{G} dA. \quad (3.9)$$

Equivalentemente, se puede escribir como

$$\iint_{C_i} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dA = \int_{\Gamma_i} \mathcal{F} \cdot (-\tilde{\eta}) dl + \iint_{C_i} \mathbf{G} dA.$$

Esta ecuación dice que en cada volumen finito C_i , la variación de \mathbf{U} en el tiempo se debe al flujo neto de \mathcal{F} hacia dentro de la celda más la variación producida debido al término fuente \mathbf{G} .

La solución del sistema (2.99) por el método de volúmenes finitos se aproxima por medio de unos valores \mathbf{U}_i^n , constantes en cada celda C_i y cada instante de tiempo t_n , que se asignan al nodo i correspondiente a C_i . La derivada temporal se discretiza aplicando el método de Euler hacia adelante

$$\left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right|_{C_i, t_n} \cong \frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t},$$

por lo que

$$\iint_{C_i} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dA = \iint_{C_i} \frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} dA.$$

Pero como \mathbf{U}_i^{n+1} , \mathbf{U}_i^n y Δt toman valores constantes en cada celda C_i , es decir a cada celda se asocia una función base como la que se muestra en la figura 3.5, entonces

$$\iint_{C_i} \frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} dA = \frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} A_i,$$

donde A_i es el área de la celda C_i . Así, la ecuación (3.9) toma la forma

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} A_i + \int_{\Gamma_i} \mathcal{F} \cdot \tilde{\eta} dl = \iint_{C_i} \mathbf{G} dA. \quad (3.10)$$

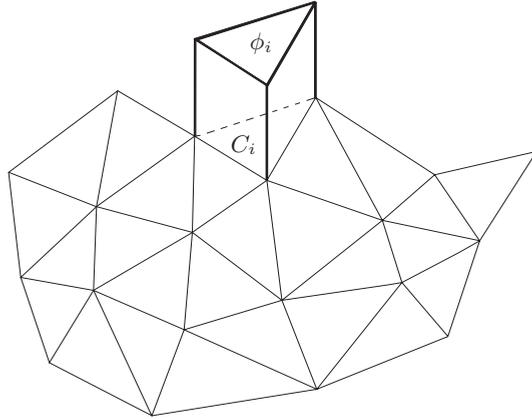


Figura 3.5: Una función base ϕ_i , con valor 1 en el volumen finito C_i y 0 en todo lo demás.

Como Γ_i es la frontera de C_i , entonces

$$\Gamma_i = \bigcup_{j \in K_i} \Gamma_{ij}.$$

De aquí que

$$\int_{\Gamma_i} \mathcal{F} \cdot \tilde{\eta} dl = \sum_{j \in K_i} \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{F} \cdot \tilde{\eta} dl. \quad (3.11)$$

Por otro lado, por ser C_i la unión de todas las subceldas T_{ij} , $j \in K_i$,

$$\iint_{C_i} \mathbf{G} \, dA = \sum_{j \in K_i} \iint_{T_{ij}} \mathbf{G} \, dA. \quad (3.12)$$

Sustituyendo (3.11) y (3.12) en (3.10) se tiene que

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} A_i + \sum_{j \in K_i} \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{F} \cdot \tilde{\eta} \, dl = \sum_{j \in K_i} \iint_{T_{ij}} \mathbf{G} \, dA. \quad (3.13)$$

3.2.2. Discretización del flujo

El producto escalar $\mathcal{F} \cdot \tilde{\eta}$ en (3.13) se llama flujo en 2D a través de un segmento de longitud unidad, y es igual por (3.1) y (3.6) a

$$\mathbf{Z} = \mathcal{F} \cdot \tilde{\eta} = \tilde{\alpha} \mathbf{F}_1 + \tilde{\beta} \mathbf{F}_2.$$

Para discretizar el flujo se utiliza el Q-esquema de van Leer [7, 55, 56, 57], que son una familia de esquemas descentrados *upwind* [19, 24, 29, 54], en los que el flujo numérico se obtiene de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n, \tilde{\eta}_{ij}) &= \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{U}_i^n, \tilde{\eta}_{ij}) + \mathbf{Z}(\mathbf{U}_j^n, \tilde{\eta}_{ij})}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2} |\mathbf{Q}(\mathbf{U}_Q^n, \tilde{\eta}_{ij})| (\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_i^n), \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde \mathbf{U}_i^n y \mathbf{U}_j^n representan los valores del vector de variables en los nodos i y j , y \mathbf{Q} es la matriz Jacobiana del flujo

$$\mathbf{Q} = \frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{U}} = \tilde{\alpha} \frac{d\mathbf{F}_1}{d\mathbf{U}} + \tilde{\beta} \frac{d\mathbf{F}_2}{d\mathbf{U}}, \quad (3.15)$$

y la matriz $|\mathbf{Q}|$ se obtiene como

$$|\mathbf{Q}| = \mathbf{X} |\mathbf{\Lambda}| \mathbf{X}^{-1},$$

donde $|\mathbf{\Lambda}|$ es la matriz diagonal de los valores absolutos de los autovalores de \mathbf{Q} , y \mathbf{X} es la matriz cuyas columnas son los autovectores

correspondientes a cada autovalor. En el Q -esquema de van Leer, $|\mathbf{Q}|$ se evalúa en el estado intermedio

$$\mathbf{U}_Q^n = \frac{\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_j^n}{2}.$$

La expresión (3.14) que discretiza el flujo en $2D$ en un punto intermedio entre i y j se obtiene como la semisuma de los flujos en ambos puntos más un término de descentrado.

Obsérvese que en (3.15), las derivadas de \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 con respecto al vector de variables \mathbf{U} son los factores que aparecen al escribir el sistema (2.99) en la forma no conservativa

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{F}_1}{d\mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \frac{d\mathbf{F}_2}{d\mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{G}.$$

Es importante notar que las ecuaciones de aguas poco profundas forman un sistema estrictamente hiperbólico [53], por lo que la matriz Jacobiana del flujo tiene tres autovalores distintos y en consecuencia tres autovectores linealmente independientes, lo que garantiza la existencia de \mathbf{X}^{-1} . En efecto, denotando hu por q_1 y hv por q_2 , se tiene que

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} q_1 \\ \frac{q_1^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \\ \frac{q_1q_2}{h} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} q_2 \\ \frac{q_1q_2}{h} \\ \frac{q_2^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{q_1^2}{h^2} + gh & \frac{2q_1}{h} & 0 \\ -\frac{q_1q_2}{h^2} & \frac{q_2}{h} & \frac{q_1}{h} \end{pmatrix}$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{q_1 q_2}{h^2} & \frac{q_2}{h} & \frac{q_1}{h} \\ -\frac{q_2^2}{h^2} + gh & 0 & \frac{2q_2}{h} \end{pmatrix}.$$

O bien

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix}$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + gh & 0 & 2v \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (3.15), resulta que

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \tilde{\alpha}(-u^2 + gh) + \tilde{\beta}(-uv) & 2\tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}v & \tilde{\beta}u \\ \tilde{\alpha}(-uv) + \tilde{\beta}(-v^2 + gh) & \tilde{\alpha}v & \tilde{\alpha}u + 2\tilde{\beta}v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ -\tilde{\alpha}u^2 + \tilde{\alpha}gh - \tilde{\beta}uv & 2\tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}v & \tilde{\beta}u \\ -\tilde{\alpha}uv - \tilde{\beta}v^2 + \tilde{\beta}gh & \tilde{\alpha}v & \tilde{\alpha}u + 2\tilde{\beta}v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Denotando como c a la celeridad de la onda dada por $c = \sqrt{gh}$, los autovalores de \mathbf{Q} que se obtuvieron con MATLAB, fueron

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}v \\ \lambda_2 &= \lambda_1 + c \\ \lambda_3 &= \lambda_1 - c, \end{aligned}$$

y sus respectivos autovectores

$$\mathbf{v}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{\beta}c \\ \tilde{\alpha}c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ u + \tilde{\alpha}c \\ v + \tilde{\beta}c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ u - \tilde{\alpha}c \\ v - \tilde{\beta}c \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$|\mathbf{\Lambda}| = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 & 0 \\ 0 & |\lambda_2| & 0 \\ 0 & 0 & |\lambda_3| \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\tilde{\beta}c & u + \tilde{\alpha}c & u - \tilde{\alpha}c \\ \tilde{\alpha}c & v + \tilde{\beta}c & v - \tilde{\beta}c \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} 2\tilde{\beta}u - 2\tilde{\alpha}v & -2\tilde{\beta} & 2\tilde{\alpha} \\ c - \tilde{\alpha}u - \tilde{\beta}v & \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ c + \tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}v & -\tilde{\alpha} & -\tilde{\beta} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Sustituyendo en (3.14) y denotando $\Phi(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n, \tilde{\eta}_{ij})$ por Φ_{ij}^n , se obtiene el flujo unitario discreto

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^n &= \frac{(\tilde{\alpha}\mathbf{F}_1 + \tilde{\beta}\mathbf{F}_2)_i^n + (\tilde{\alpha}\mathbf{F}_1 + \tilde{\beta}\mathbf{F}_2)_j^n}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2}(\mathbf{X}|\mathbf{\Lambda}|\mathbf{X}^{-1})_{U_{ij}^n}(\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_i^n). \end{aligned}$$

Así, la sumatoria de las integrales de línea en (3.13) se discretiza como

$$\sum_{j \in K_i} \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{F} \cdot \tilde{\eta} \, dl \cong \sum_{j \in K_i} \int_{\Gamma_{ij}} \Phi_{ij}^n \, dl = \sum_{j \in K_i} \Phi_{ij}^n \int_{\Gamma_{ij}} dl,$$

de donde

$$\sum_{j \in K_i} \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{F} \cdot \tilde{\eta} \, dl \cong \sum_{j \in K_i} \|\eta_{ij}\| \Phi_{ij}^n. \quad (3.19)$$

Si alguno de los autovalores de la matriz \mathbf{Q} se anula, entonces el término de descentrado, que es el que garantiza que no se produzcan oscilaciones,

disminuye considerablemente. Para evitar este problema se utiliza para los valores absolutos de los autovalores la regularización parabólica de Harten [23]:

$$|\lambda|_\epsilon = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{|\lambda|^2}{\epsilon} + \epsilon \right), & \text{si } |\lambda| < \epsilon \\ |\lambda|, & \text{si } |\lambda| \geq \epsilon, \end{cases}$$

donde ϵ es un parámetro pequeño, que puede elegirse en cada caso. Con esta regularización, si el $|\lambda|$ es superior a ϵ no se modifica, pero si es menor que ϵ el valor más pequeño que puede alcanzar es $\epsilon/2$ que es precisamente cuando $\lambda = 0$.

3.2.3. Discretización del término fuente

Se distinguen dos partes del término fuente \mathbf{G} , la parte que contiene la pendiente geométrica S_0 , y la parte que contiene la pendiente de fricción S_f . En la literatura se mencionan trabajos hechos considerando descentrados ambos términos S_0 y S_f , y descentrado para S_0 y centrado para S_f . Fe Marqués (2005) [20], dice que ha obtenido resultados muy similares con ambas opciones, por lo que él opta por descentrar S_0 y centrar S_f . Para ello, se escribe \mathbf{G} como

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_f,$$

donde

$$\mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ ghS_{0x} \\ ghS_{0y} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{G}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghS_{fx} \\ -ghS_{fy} \end{pmatrix},$$

la fuente discreta bidimensional en cada subcelda T_{ij} se define como

$$\Psi = \mathbf{X}(\mathbf{I} - |\mathbf{\Lambda}|\mathbf{\Lambda}^{-1})\mathbf{X}^{-1}\widehat{\mathbf{G}}_0 + \widehat{\mathbf{G}}_f, \quad (3.20)$$

donde \mathbf{X} , \mathbf{X}^{-1} , $|\mathbf{\Lambda}|$ y $\mathbf{\Lambda}^{-1}$ dependen de $(\mathbf{U}_{\mathbf{Q}}^n, \tilde{\eta}_{ij})$, por lo que $\Psi = \Psi(N_i, N_j, \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n, \tilde{\eta}_{ij})$, $\widehat{\mathbf{G}}_0 = \widehat{\mathbf{G}}_0(N_i, N_j, \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n, \tilde{\eta}_{ij})$ y $\widehat{\mathbf{G}}_f = \widehat{\mathbf{G}}_f(\mathbf{U}_i^n)$.

Las matrices $|\mathbf{\Lambda}|$, \mathbf{X} y \mathbf{X}^{-1} están dadas en (3.16), (3.17) y (3.18) respectivamente, y

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 \end{pmatrix}.$$

$\widehat{\mathbf{G}}_0$ aproxima la pendiente geométrica en el término fuente y está dada por

$$\widehat{\mathbf{G}}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ g \frac{h_i^n + h_j^n}{2} \frac{H_j - H_i}{d_{ij}} \tilde{\alpha} \\ g \frac{h_i^n + h_j^n}{2} \frac{H_j - H_i}{d_{ij}} \tilde{\beta} \end{pmatrix},$$

y $\widehat{\mathbf{G}}_f$ aproxima la pendiente de fricción en el centro de cada celda que a su vez está dada por

$$\widehat{\mathbf{G}}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ gh_i^n (-S_{fx})_i^n \\ gh_i^n (-S_{fy})_i^n \end{pmatrix}.$$

Denotando por Ψ_{ij}^n a $\Psi(N_i, N_j, \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n, \tilde{\eta}_{ij})$, se tiene que el segundo miembro de (3.13) se discretiza como

$$\sum_{j \in K_i} \iint_{T_{ij}} \mathbf{G} dA \cong \sum_{j \in K_i} \iint_{T_{ij}} \Psi_{ij}^n dA = \sum_{j \in K_i} \Psi_{ij}^n \iint_{T_{ij}} dA,$$

por lo tanto,

$$\sum_{j \in K_i} \iint_{T_{ij}} \mathbf{G} dA \cong \sum_{j \in K_i} A_{ij} \Psi_{ij}^n, \quad (3.21)$$

donde A_{ij} se define en (3.2) y (3.3) para cada uno de los subtriángulos que componen la subcelda T_{ij} , y Ψ_{ij}^n se calcula a partir de (3.20).

3.2.4. Paso temporal y algoritmo

Sustituyendo (3.19) y (3.21) en (3.13) se tiene

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} A_i + \sum_{j \in K_i} \|\eta_{ij}\| \Phi_{ij}^n = \sum_{j \in K_i} A_{ij} \Psi_{ij}^n. \quad (3.22)$$

Como se puede observar en los elementos interiores del dominio, estas evaluaciones se realizan a partir de los valores de las variables en el nodo i y en los nodos vecinos j , $j \in K_i$. Sin embargo, en la frontera del dominio de cálculo habrá unos nodos, de cada uno de los cuales parten dos aristas, que por el lado exterior no tendrán nodos vecinos. El sistema que se sigue es suponer (para estas aristas) que el nodo vecino es el mismo nodo i , lo cual equivale a no descentrar el flujo (pues el término de descentrado se anula). Por otro lado, uno de los factores de cada sumando de la fuente discreta es el área del subtriángulo correspondiente. Como las aristas tienen área nula, parece lógico no considerar aportaciones de la fuente en las aristas frontera.

El paso temporal que propone Alcrudo (1992) [1] para el caso $2D$, corresponde a la condición CFL (Courant-Friedrichs-Lewy)¹ y está dado por

$$\Delta t \leq \min_{i, j \in K_i} \left(\frac{d_{ij}}{2 \left(\sqrt{u^2 + v^2} + c \right)_{ij}} \right),$$

donde d_{ij} son las distancias entre el nodo i y nodos vecinos $j \in K_i$. En casos de fuerte pendiente se producen inestabilidades, lo que ha obligado al uso de un coeficiente corrector de 0.8 [20].

¹Es una condición necesaria para la convergencia de un esquema en diferencias finitas cuando se le aplica para resolver ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas (no confundir con estabilidad numérica). Como consecuencia de esta condición, el paso de tiempo debe ser inferior a un cierto valor, pues en caso contrario la simulación producirá resultados incorrectos. Esta condición se llama así en honor a Richard Courant (1888–1972), Kurt O. Friedrichs (1901–1982) y Hans Lewy (1904–1988), que la publicaron en 1928 [15].

Una vez que se ha definido el paso temporal, ya se está en condiciones de definir el algoritmo a partir de la ecuación (3.22). Al despejar de (3.22) el término \mathbf{U}_i^{n+1} , se obtiene

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{A_i} \left(\sum_{j \in K_i} A_{ij} \Psi_{ij}^n - \sum_{j \in K_i} \|\eta_{ij}\| \Phi_{ij}^n \right).$$

Esta ecuación proporciona un método iterativo explícito en el tiempo para calcular el valor del vector de variables

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \begin{pmatrix} h_i^{n+1} \\ (hu)_i^{n+1} \\ (hv)_i^{n+1} \end{pmatrix},$$

en cada nodo i y en cada instante de tiempo t_{n+1} , a partir de los valores de las variables en el instante t_n , en el nodo i y en todos los nodos vecinos j , $j \in K_i$. Si en el nodo i se establece una condición de frontera en alguna de las variables h , hu o hv , se calculan solo las variables desconocidas.

Capítulo 4

Validación del Software GUADFlow 2D

En este capítulo se presentan ejemplos de pruebas numéricas cuyo propósito fue validar el software GUADFlow 2D, con la intención de verificar que dicho software está en condiciones de desarrollar las tareas esperadas, que es la de simular numéricamente la inundación de la ciudad de Villahermosa, Tabasco. Los ejemplos fueron previamente reportados en la referencia [31].

4.1. Ejemplo 1: Canal con bordo

Este ejemplo tiene como fin ilustrar cómo influye un obstáculo en el fondo de un canal y cómo se alcanza el flujo permanente. Para esto se considera un canal de 25 m de largo por 1 m de ancho con bardas laterales de 0.1 m de ancho y 3 m de altura. El canal tiene un bordo interno que inicia a los 8 m y termina a los 12 m, véase figura 4.1.



Figura 4.1: Terreno del canal con bordo interno. Dimensiones en metros.

El terreno

El terreno con el bordo considerado corresponde a tomar el fondo z de acuerdo a la fórmula

$$z(x, y) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10)^2, & \text{si } 8 < x < 12, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

siendo x medido a lo largo del canal.

La triangulación

En este caso, para la triangulación se tomó un error máximo de cota de 0.01 y el lado máximo de triángulo 0.25. La malla resultante consta de 6 024 triángulos con 3 277 nodos. En la figura 4.2 se muestra una parte del terreno con la malla triangular.

Condiciones iniciales y de frontera

Como condiciones iniciales se considera un nivel de 2 m y velocidad nula en las dos direcciones en todo el canal. Para las condiciones de

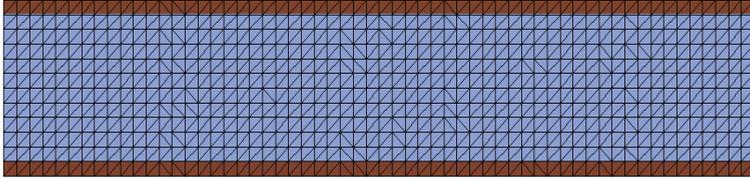


Figura 4.2: Visualización de la triangulación de una parte del terreno de canal con bordo interno.

contorno se consideran los siguientes tres casos considerados también por Fe-Marqués (2005) [20]:

- i) Flujo subcrítico. Se especifica una condición de entrada en la parte izquierda del canal fijando un caudal Q de $4.42 \text{ m}^3/\text{s}$. En la parte derecha del canal se establece una condición de salida de 2 m para el tirante.
- ii) Flujo transcrito con resalto hidráulico. Se especifica una condición de entrada en la parte izquierda del canal fijando un caudal Q de $0.18 \text{ m}^3/\text{s}$. En la parte derecha del canal se establece una condición de salida de 0.33 m para el tirante.
- iii) Flujo transcrito sin resalto hidráulico. Se especifica una condición de entrada en la parte izquierda del canal fijando un caudal Q de $1.53 \text{ m}^3/\text{s}$. En la parte derecha del canal se establece una condición de salida de 0.66 m para el tirante.

Fricción y Parámetros de simulación

En este caso se consideró un parámetro de fricción constante en todo el terreno de 0.01 . El tiempo de simulación fue de 120 segundos, registrando datos cada segundo.

Resultados

- i) Este es un ejemplo de flujo subcrítico, es decir el nivel del agua está determinado por la condición de frontera aguas abajo [20].

También corresponde a un flujo lento con disminución del tirante sobre el bordo. Esto implica un aumento en la velocidad sobre el bordo. Esto se refleja en las figuras 4.3, 4.4 y 4.5, donde se muestra el nivel del agua a los 21 segundos, 30 segundos y 80 segundos a lo largo del canal, y en las figuras 4.6, 4.7 y 4.8, donde se muestra la velocidad del agua a lo largo del canal a los 9 segundos, 21 segundos y 80 segundos, respectivamente. La simulación mostró que el régimen permanente se alcanzó a los 80 segundos, aproximadamente. Note que este ejemplo puede reducirse a un problema en una dimensión, pues ni las condiciones de contorno ni las condiciones iniciales varían con respecto a y . En la figura 4.9 se muestran dos vistas panorámicas del canal, donde la primera vista representa el nivel del agua a los 19 segundos y la segunda representa la velocidad del agua también a los 19 segundos.

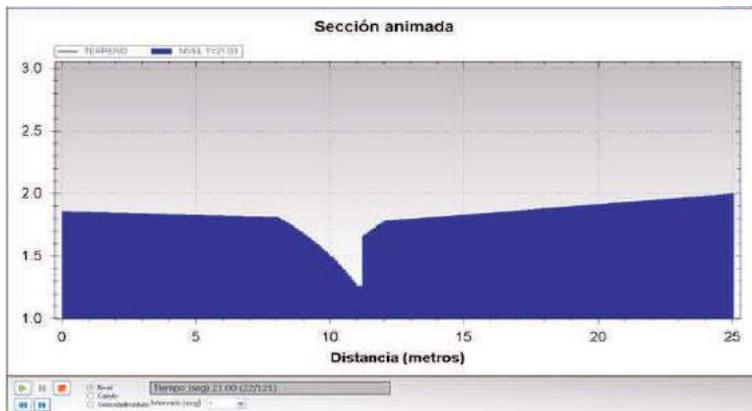


Figura 4.3: Nivel de agua en el ejemplo de canal con bordo interno en el caso del flujo subcrítico a los 21 segundos.

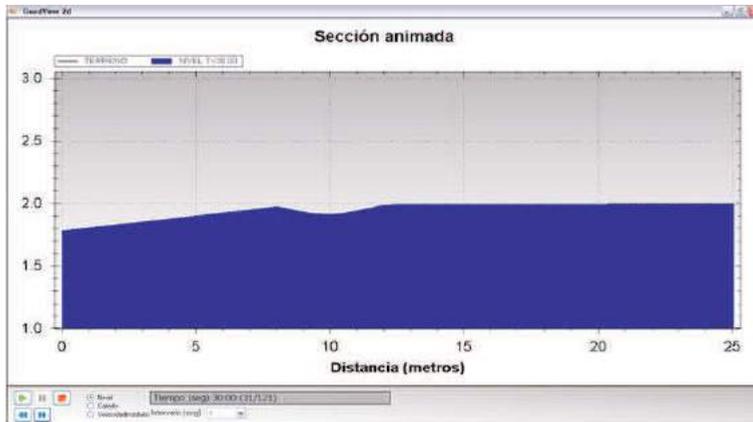


Figura 4.4: Nivel de agua en el ejemplo de canal con bordo interno en el caso del flujo subcrítico a los 30 segundos.

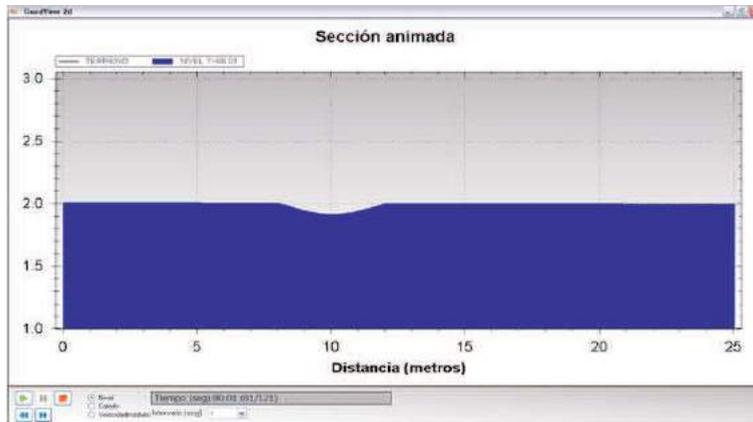


Figura 4.5: Nivel de agua en el ejemplo de canal con bordo interno en el caso del flujo subcrítico a los 80 segundos que es aproximadamente cuando el flujo alcanza el régimen permanente.

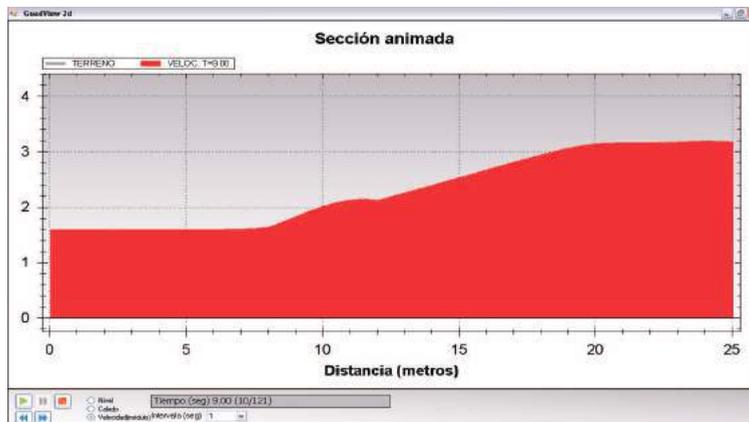


Figura 4.6: Velocidad del agua en el ejemplo de canal con bordo interno también en el caso del flujo subcrítico a los 9 segundos.



Figura 4.7: Velocidad del agua en el ejemplo de canal con bordo interno también en el caso del flujo subcrítico a los 21 segundos. Nótese que la velocidad es mayor sobre el bordo interno.



Figura 4.8: Velocidad del agua en el ejemplo de canal con bordo interno también en el caso del flujo subcrítico a los 80 segundos que es aproximadamente cuando el flujo alcanza el régimen permanente. Observa que la velocidad es mayor sobre el bordo interno.

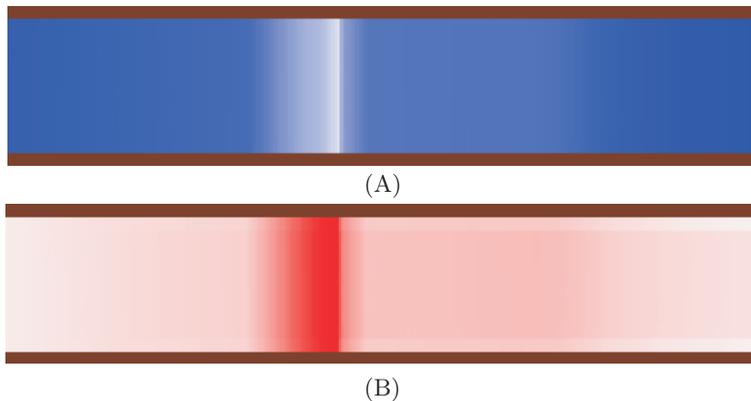


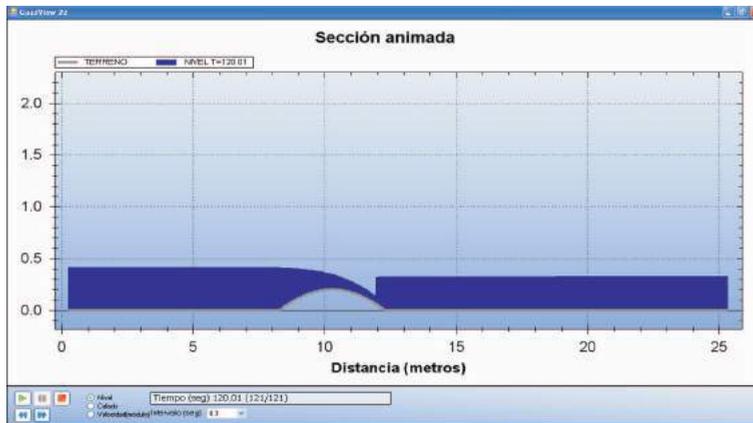
Figura 4.9: (A) Visualización del nivel del agua a los 19 segundos después del inicio del experimento en todo el canal en el caso del flujo subcrítico, el azul intenso indica zonas donde es mayor el nivel del agua. (B) Visualización de la velocidad del agua también a los 19 segundos del inicio del experimento en todo el canal en el caso del flujo subcrítico, el rojo intenso indica zonas donde es mayor la velocidad. Se ha triplicado la escala vertical del canal para una mejor visualización.

- ii) En este ejemplo de flujo transcrito con resalto hidráulico, se producen dos cambios de régimen de lento a rápido y posteriormente de rápido a lento, tal como lo afirma Fe-Marqués (2005) [20]. En la figura 4.10 se muestran el nivel y la velocidad del agua una vez que el flujo ha alcanzado el régimen permanente, donde también se observan los cambios de régimen mencionados.
- iii) Como en el caso anterior se produce un cambio de régimen al pasar por encima del obstáculo, y dado que se modificó la condición de tirante aguas abajo, el fluido no recupera el régimen lento. En la figura 4.11 se muestra el nivel y la velocidad del agua una vez que se alcanza el régimen permanente.

4.2. Ejemplo 2: Compuerta con abertura

Al estudiar este ejemplo se quiere ver en qué medida los datos arrojados por la simulación satisfacen la conservación de masa, que se puede resumir como: *El volumen que entra debe ser igual al que sale más el que permanece.* El terreno corresponde al etiquetado como Ejemplo 3 que se encuentra en www.inclam.com, pero con una pequeña modificación: se eliminó un pedazo de barda cerca de la esquina inferior izquierda para establecer allí una condición de flujo de entrada. El pedazo eliminado fue de 11 cm de largo por 50 cm de profundidad desde el nivel de la barda, véase figura 4.12. Básicamente es un terreno bardeado de 2.74 m por 2.80 m y casi partido horizontalmente a la mitad por una barda interior que no es continua sino que permite comunicación de flujo entre las dos mitades del terreno.

La barda tiene una altura de 2 m y todo lo demás es plano con una altura de 1 m, así que para llenar este espacio, se requiere aproximadamente 7 m^3 de agua.

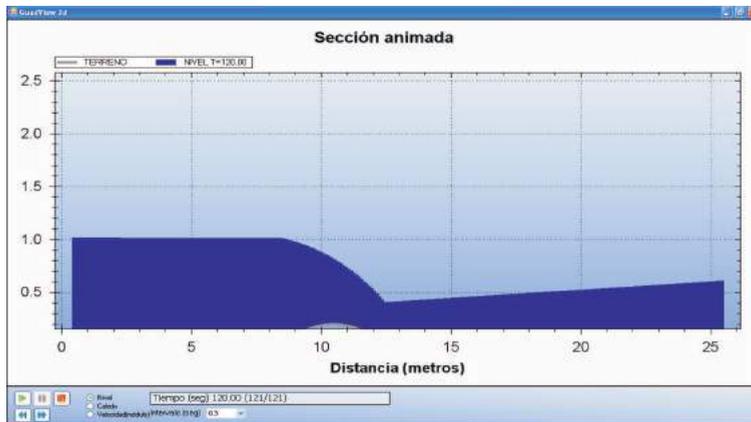


(A)



(B)

Figura 4.10: (A) Nivel del agua en todo el canal cuando el flujo ha alcanzado el régimen permanente en el caso transcrito con resalto hidráulico. (B) Velocidad del agua en todo el canal cuando el flujo ha alcanzado también el régimen permanente. Se observa que la velocidad se incrementa rápidamente al cruzar el agua sobre el bordo interno y luego se produce una discontinuidad, donde la velocidad cae bruscamente a un nivel constante después del bordo.



(A)



(B)

Figura 4.11: (A) Nivel del agua cuando el flujo ha alcanzado el régimen permanente en el caso transcrito sin resalto hidráulico. Después del bordo el nivel del agua se mantiene bajo. (B) Visualización de la velocidad del agua cuando el flujo ha alcanzado el régimen permanente. Se observa que la velocidad también se incrementa rápidamente al cruzar el agua sobre el bordo interno hasta alcanzar un valor máximo, y después se mantiene casi constante en dicho valor máximo después del bordo.

La triangulación

La triangulación se genera de manera automática tomando en cuenta dónde están situadas las condiciones de frontera y las variaciones del terreno. Se debe proporcionar un error máximo de cota y el lado máximo de triángulo permitido. En la figura 4.13 se muestra una triangulación tomando error máximo de cota igual a 0.1 y lado máximo de triángulo igual a 1.0.

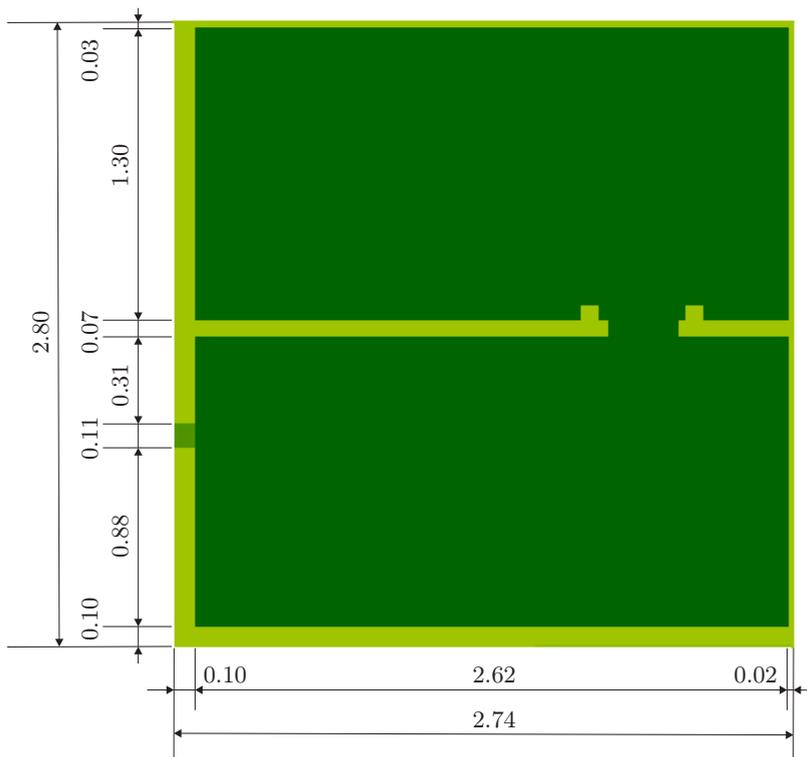


Figura 4.12: Terreno del Ejemplo 2 (cortesía de www.inclam.com).

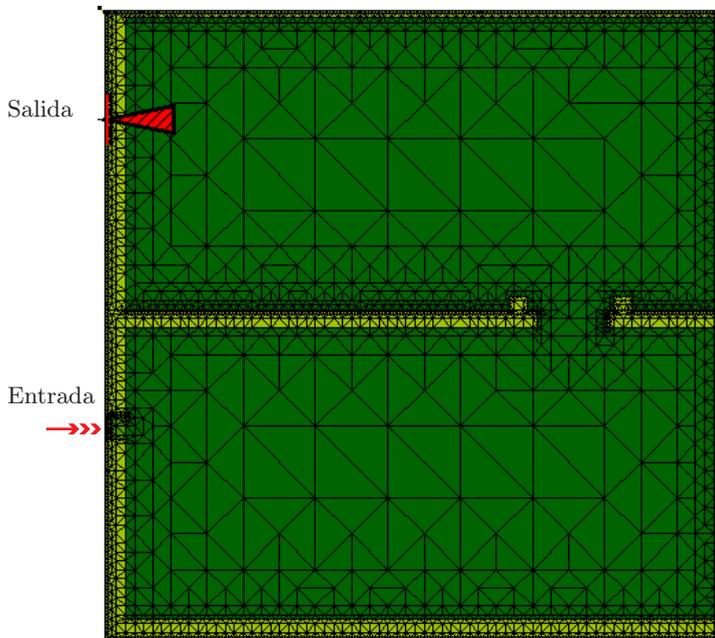


Figura 4.13: Discretización del dominio del Ejemplo 2 por elementos triangulares con un error máximo de cota igual a 0.1 y lado máximo de triángulo de 1.0, y zonas donde se especifican las condiciones de entrada y salida. Dimensiones en metros.

Condiciones iniciales y de frontera

Como condición inicial se toma terreno seco. Se consideran dos condiciones de frontera, una de entrada y otra de salida. En la de entrada se establece un caudal de $0.02 \text{ m}^3/\text{s}$ durante los primeros 10 segundos, el cual se hace descender linealmente hasta 0 durante los siguientes 10 segundos. A partir de los 20 segundos y hasta los 120 segundos que tarda la simulación, el flujo de entrada es nulo en esta condición. La condición de salida se establece en la misma barda izquierda pero mas arriba como se muestra en la figura 4.13, de tal manera que el flujo salga de la mitad superior del terreno. En esta condición se establece

un flujo fijo nulo al nivel de la barda. Esta condición mas bien tiene fines operativos pues el ejemplo original en el que se estaba interesado no consideraba salida, y sin embargo el paquete necesita al menos una de entrada y una de salida. Así que se estableció allí fijando el flujo en $0 \text{ m}^3/\text{s}$.

Fricción y parámetros de la simulación

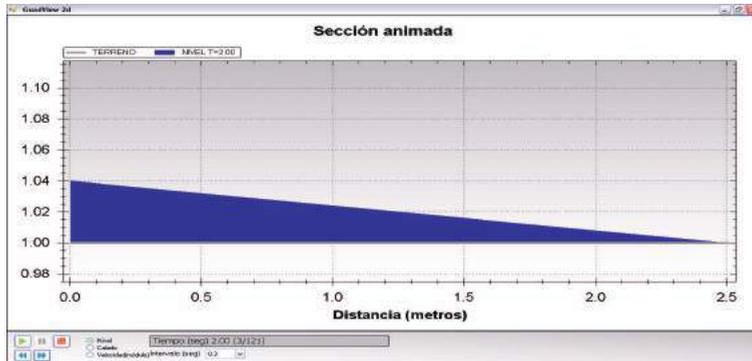
Se consideró un parámetro de fricción de valor constante 0.1 en todo el terreno. El tiempo de simulación fue de 120 segundos, registrando datos cada segundo. Este dato no corresponde al tamaño de paso usado para avanzar en el tiempo, el cual es mucho más pequeño y se establece mediante criterios internos tomando en cuenta la estabilidad del método usado.

Resultados

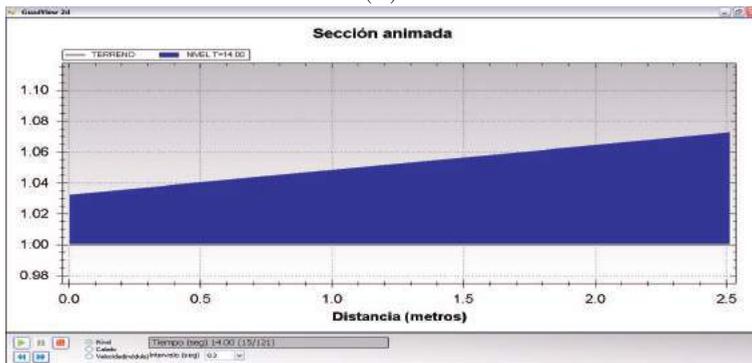
Como ya se mencionó, con este ejemplo se desea estudiar qué tanto se satisface la conservación de masa al aproximar numéricamente las ecuaciones de Saint-Venant. De acuerdo al flujo de entrada durante la simulación lo que permanece más lo que sale debe ser igual a 0.3 m^3 . Las simulaciones muestran que la cantidad de agua acumulada durante la simulación fue de 0.3014 m^3 , ya que el agua alcanzó aproximadamente una altura de 0.044 m. En la figura 4.14 se ilustra el avance global del agua y el módulo de la velocidad en todo el terreno a los 11 segundos. En la figura 4.15 se muestra el nivel del agua en una sección horizontal a la altura de la abertura de entrada (véase figura 4.13), en los tiempos: 2, 14 y 118 segundos, respectivamente. En la figura 4.16 se muestra el nivel del agua en una sección que va de la esquina inferior derecha hasta la barda superior pasando por la abertura que comunica las dos mitades (véase figura 4.12), en los tiempos 15, 39 y 119 segundos, respectivamente. En la figura 4.17 se muestra el comportamiento de la velocidad a los 2, 15 y 119 segundos, respectivamente, en la sección horizontal a la altura de la abertura de entrada que (véase figura 4.13).



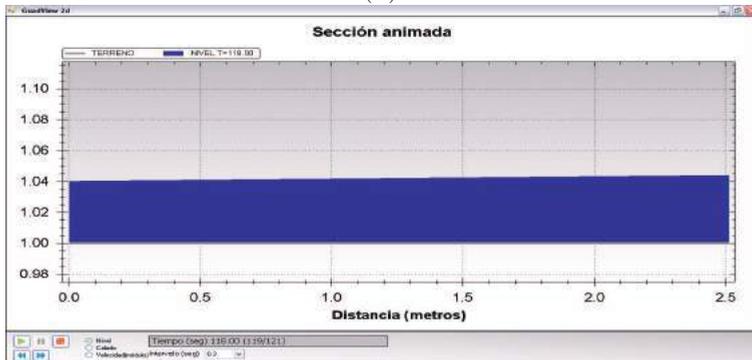
Figura 4.14: Avance global del agua y módulo de velocidad en todo el dominio a los 11 segundos.



(A)

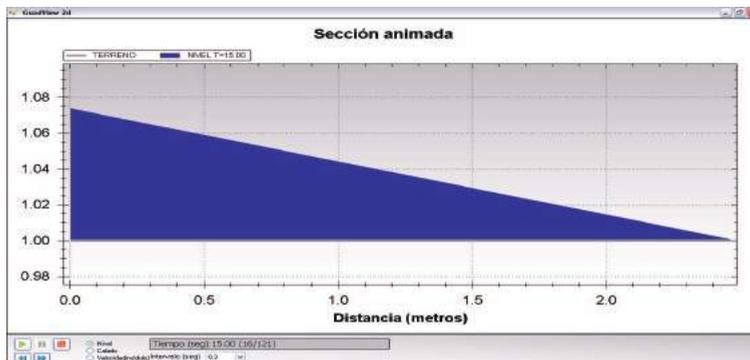


(B)

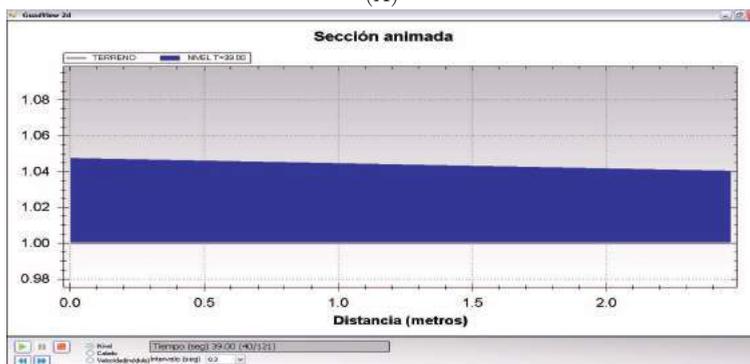


(C)

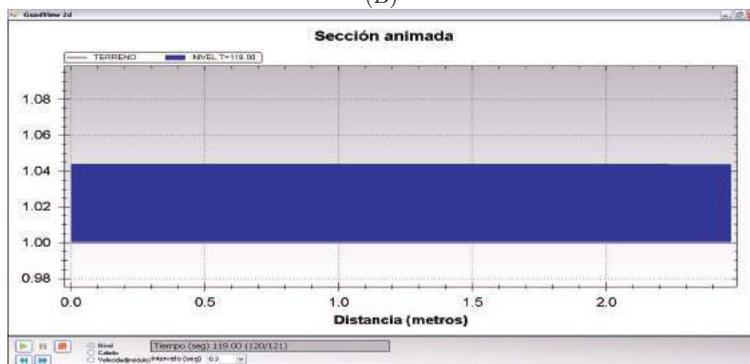
Figura 4.15: Visualización del nivel del agua durante la simulación numérica del Ejemplo 2 en una sección horizontal a la altura de la abertura de entrada (véase figura 4.12(B)): (A) a los 2 segundos, (B) a los 14 segundos y (C) a los 118 segundos.



(A)



(B)



(C)

Figura 4.16: Visualización del nivel del agua durante la simulación numérica del Ejemplo 2, en una sección que va de la esquina inferior derecha hasta la barda superior pasando por la abertura que comunica las dos mitades (véase figura 4.12(A)): (A) a los 15 segundos, (B) a los 39 segundos y (C) a los 119 segundos.



(A)



(B)



(C)

Figura 4.17: Visualización de la velocidad del agua durante la simulación numérica del Ejemplo 2 en una sección horizontal a la altura de la abertura de entrada (véase figura 4.12(B)): (A) a los 2 segundos, (B) a los 15 segundos y (C) a los 119 segundos.

4.3. Ejemplo 3: Río ciudad

Con este ejemplo se pretende conocer cómo afecta el desborde de un río sobre una ciudad. En la figura 4.18 se tiene una vista del río con la ciudad. El archivo de datos de este terreno es cortesía de INCLAM, S. A. En estos casos es importante saber qué tanto afecta y en qué tiempo se lleva a cabo esa afectación.

El terreno

En el terreno se muestra un río con fondo de color verde que indica la profundidad del mismo. Los colores amarillo, mostaza y café indican niveles cada vez más altos de terreno, y en general el terreno muestra una inclinación de la esquina superior derecha a la esquina inferior izquierda, de tal manera que el río corre siguiendo esta inclinación. Entre el río y la ciudad hay un bordo de contención, y en la parte intermedia del río se muestra los pilotes de un puente.

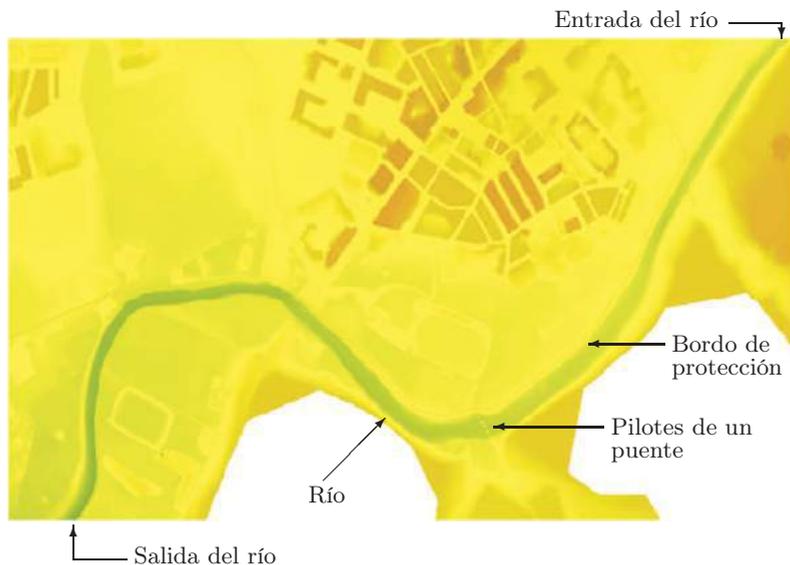


Figura 4.18: Terreno de río en ciudad del Ejemplo 3: El río es el que se indica de color verde que muestra la profundidad del mismo, bajo el supuesto de que el río está seco. Entre el río y la ciudad hay un bordo de protección contra inundaciones.

La triangulación

La triangulación también se genera de manera automática tomando en cuenta dónde están situadas las condiciones de frontera y las variaciones del terreno. En la figura 4.19 se muestra una parte del terreno que incluye el puente con su respectiva triangulación, tomando error máximo de cota igual a 0.1 y lado máximo de triángulo igual a 10.0. Estos parámetros generaron en todo el terreno un total de 219 265 nodos y 435 819 triángulos.

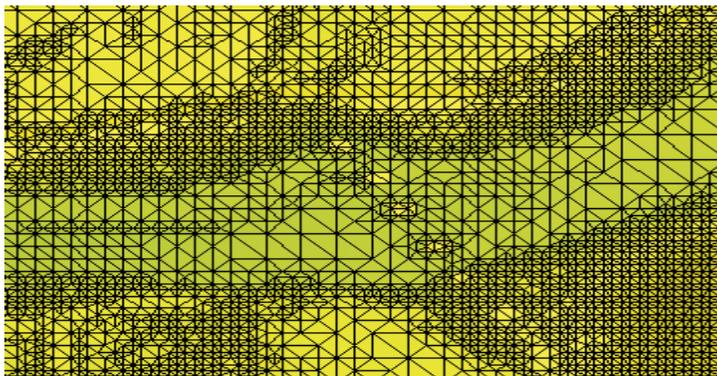


Figura 4.19: Visualización de la discretización de una parte del dominio del Ejemplo 3 con elementos triangulares. La zona es donde se encuentran los pilotes del puente (véase figura 4.18).

Condiciones iniciales y de frontera

Las condiciones iniciales se obtuvieron de una corrida previa iniciada en seco en la figura 4.20. En la tabla 4.1 se muestran algunos valores iniciales de algunos puntos específicos. La condición de frontera aguas arriba se mantuvo constante en el tiempo con $20 \text{ m}^3/\text{s}$, y la condición de salida también se mantuvo constante en el tiempo con $0 \text{ m}^3/\text{s}$ (supuesto con compuerta cerrada).

Fricción y Parámetros de simulación

Se consideró un parámetro de fricción con valor constante de 0.20 en todo el terreno. El tiempo de simulación fue de 7 200 segundos (dos horas), registrando datos cada 40 segundos.

Longitud (m)	Nivel de terreno (m)	Nivel de agua (m)	Velocidad u (m/s)	Velocidad v (m/s)
0	417.870	420.212	-0.271	-0.260
200	416.369	420.020	-0.171	-0.227
400	416.824	419.875	-0.163	-0.288
600	417.457	419.700	-0.141	-0.315
800	417.555	419.235	-0.200	-0.252
1000	417.045	418.796	-0.188	-0.283
1200	416.570	418.118	-0.213	-0.048
1330	415.800	417.918	-0.283	0.081
1400	415.841	417.834	-0.260	0.200
1600	415.911	417.594	-0.222	0.250
1850	415.299	417.052	-0.356	0.009
2150	414.239	416.828	-0.662	-0.067
2350	414.049	416.786	-0.030	-0.123
2660	413.833	416.770	-0.006	-0.006

Tabla 4.1: Datos de la condición inicial para simular numéricamente el desborde de un río sobre una ciudad del Ejemplo 3. El nivel del terreno y del agua es con respecto al nivel medio del mar. La longitud del río se mide a partir del extremo superior derecho (véase figura 4.18).

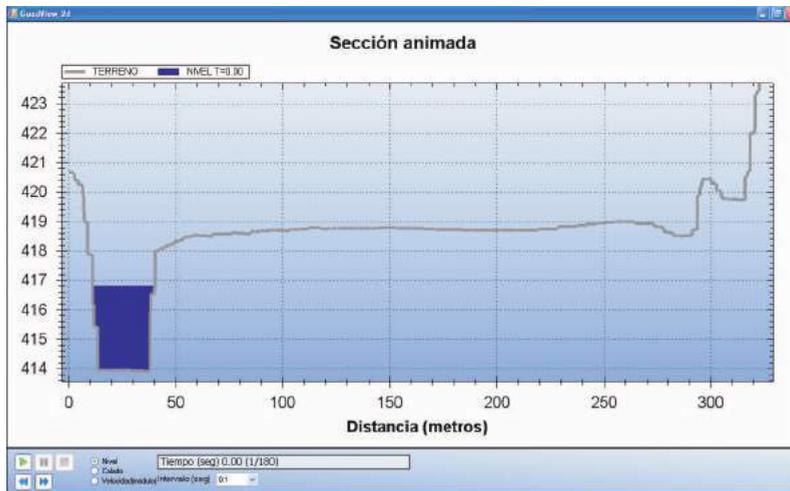
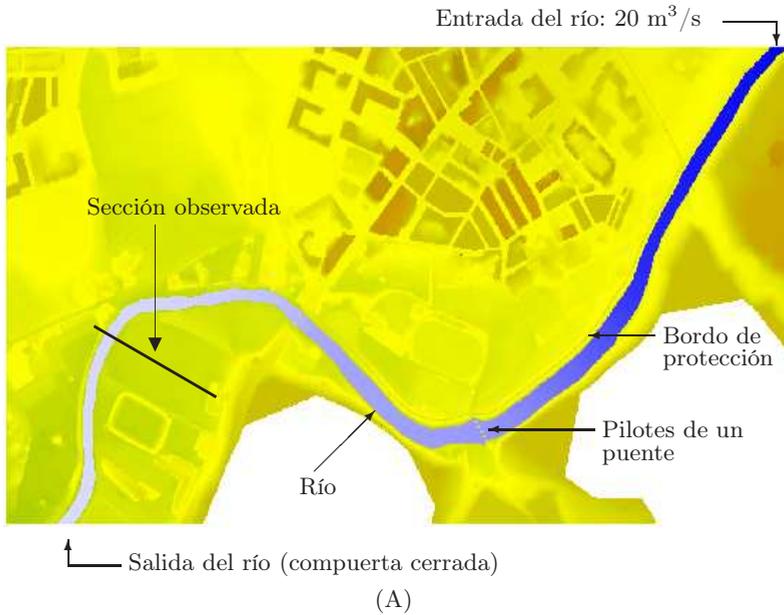


Figura 4.20: (A) Condición inicial para simular numéricamente el desborde de un río sobre una ciudad del Ejemplo 3. (B) El tirante inicial en el río en la sección observada es de aproximadamente 2.80 m.

Resultados

Media hora después de iniciada la simulación se alcanza aproximadamente el nivel máximo del río en la parte final, como se muestra en la figura 4.21. Después comienza el desborde del cual se muestran dos momentos que corresponden a una hora después de iniciada la simulación (véase figura 4.22), y a dos horas después (véase figura 4.23). A dos horas del inicio de la simulación el río se ha desbordado en uno de sus márgenes, y el agua avanzó aproximadamente 250 m en la sección observada.

4.4. Conclusiones

El software GUADFlow 2D y en particular el tratamiento numérico del modelo con el esquema de volúmenes finitos, es un método exitoso para la simulación numérica de flujos de agua como los canales o ríos, pues los ejemplos numéricos muestran buenos resultados en cuanto a la conservación de la masa, y en cuanto al tratamiento de flujos con valores pequeños como es el caso del ejemplo de la compuerta con abertura; también en cuanto al manejo de cambios de régimen como se muestra en el ejemplo del canal con bordo. Asimismo muestra un comportamiento aceptable al simular con terrenos reales como el de la ciudad con río, en donde se ha usado un terreno extenso y una malla muy fina. Por el hecho de ser el método de volúmenes finitos un método explícito y con las capacidades de cómputo actuales, las simulaciones son en tiempo real si los períodos de observación de interés no son exageradamente pequeños.

Así que se está en condiciones de utilizar el software GUADFlow 2D para simular numéricamente la inundación de la ciudad de Villahermosa, Tabasco, México, tarea que se realizará en los siguientes dos capítulos.

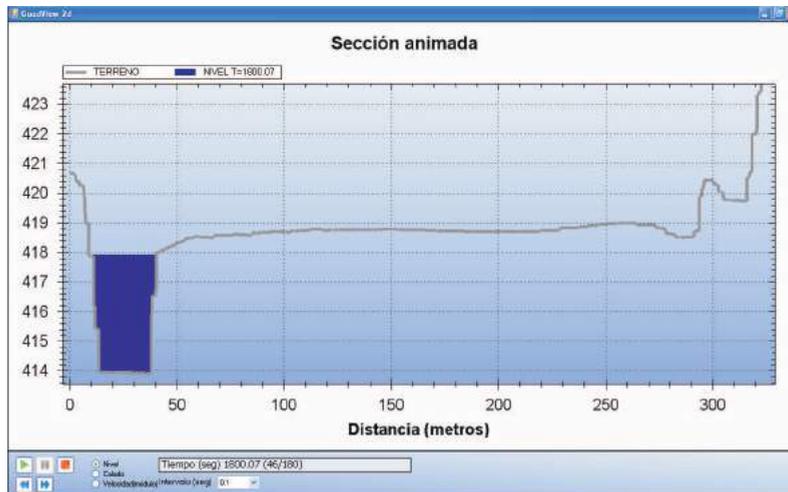
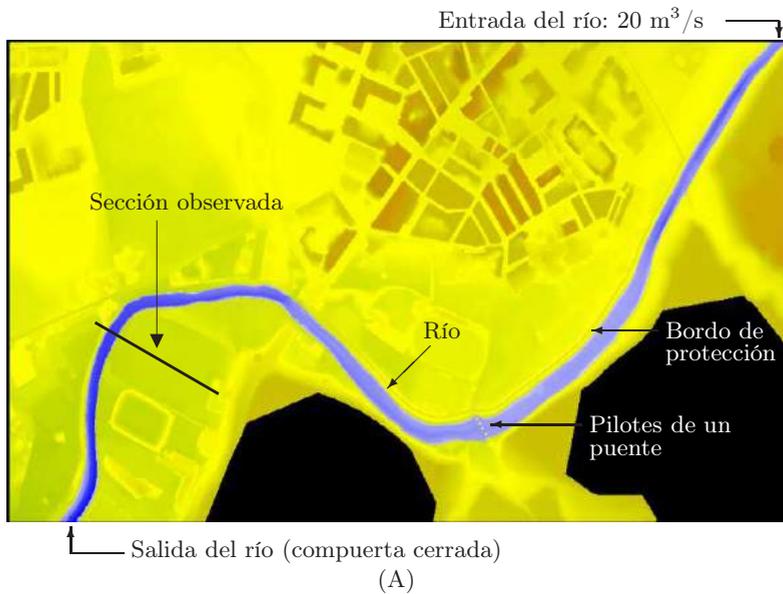


Figura 4.21: (A) Situación del río 30 minutos después del inicio de la simulación, en estos momentos el río ha alcanzado aproximadamente su nivel máximo en la parte final. (B) El tirante en el río en la sección observada es de aproximadamente 3.90 m, lo que significa que el nivel del río aumentó 1.10 m en media hora.

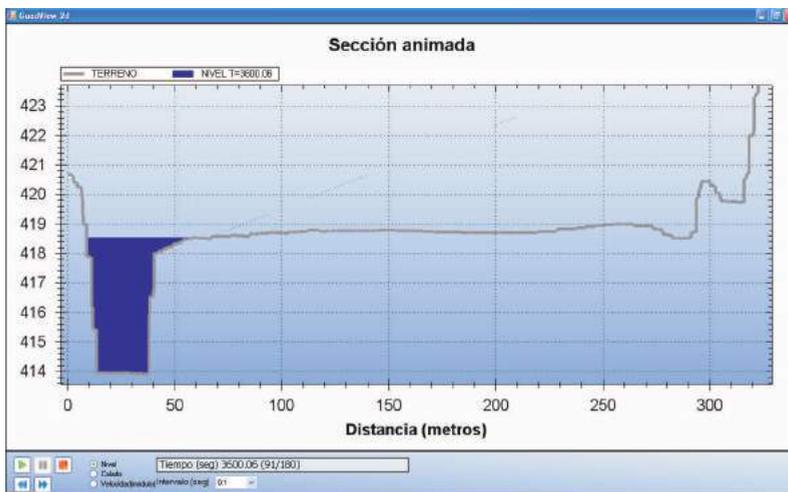
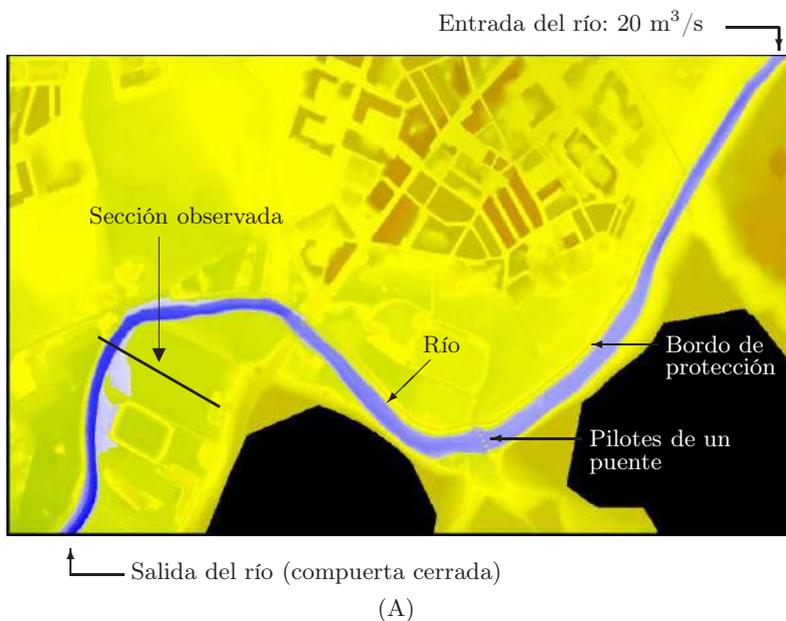


Figura 4.22: (A) Una hora después de iniciada la simulación se observan los primeros desbordes en el margen del río. (B) El tirante en el río en la sección observada es de aproximadamente 4.60 m, lo que significa que el nivel del río aumentó 1.80 m en una hora.

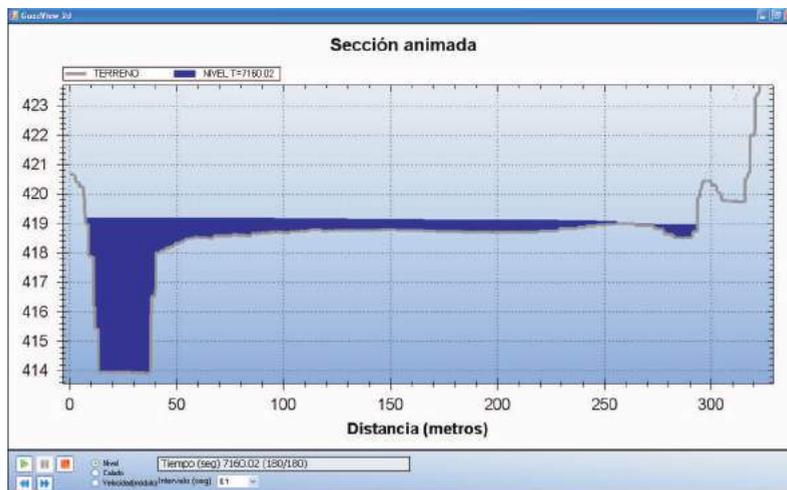
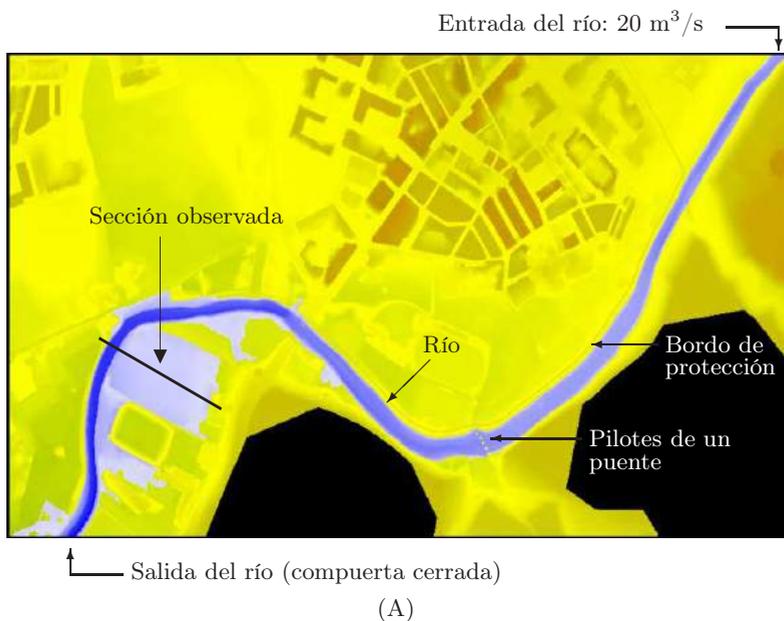


Figura 4.23: (A) Dos horas después de iniciada la simulación, el río se ha desbordado por completo y el agua avanzó casi 250 m en la sección observada. (B) El tirante en el río en la sección observada es de aproximadamente 5.20 m, lo que significa que el nivel del río alcanzó 2.40 m en dos horas.

Capítulo 5

Modelación de la Batimetría del Río Grijalva

En este capítulo, se aborda el problema de ajustar la topografía y la batimetría del río Grijalva y sus afluentes en su cruce por la ciudad de Villahermosa, Tabasco, México, en la sección que se muestra en la figura 1.2 del Capítulo 1. El propósito es ajustar la elevación del terreno en el dominio bidimensional para realizar simulaciones numéricas del flujo del río Grijalva y la inundación de zonas de la ciudad de Villahermosa provocada por el desborde de este río.

5.1. Ajuste del valor del terreno

Como se dijo en el Capítulo 1, el dominio bidimensional Ω “comprende” la ortofoto E15D11A2 y parte de la ortofoto E15B81D4, donde se disponen datos Tipo Superficie que muestran una mejor resolución de la infraestructura urbana, como son las calles y los edificios. Se dispone de la elevación del terreno con respecto al nivel medio del mar en celdas de $5 \times 5 \text{ m}^2$. En dichos datos, se observan irregularidades asociadas con la técnica de medición en zonas de vegetación densa y zonas urbanas,

entre otras. La altura que se reporta en las celdas respectivas es aproximadamente la elevación de las copas de los árboles, la altura de los edificios (nivel de las azoteas de los edificios), entre otras. De la misma manera, sobre los afluentes, se reporta la elevación de la lámina de agua y no la elevación del fondo de los ríos.

El primer trabajo fue ajustar las irregularidades obvias que se muestran en la figura 5.1, siguiendo la técnica usada por González-Aguirre (2010) [22] que consiste en modificar por sectores rectangulares. Se usó el programa `modifica_en_archivoregion.m` de González-Aguirre para separar los brazos del río La Sierra y reducir el cauce del río que se muestran en la figura 5.1. El resultado se muestra en la figura 5.24.

5.2. Modelación del cauce de los ríos La Sierra y Grijalva

En esta sección se reporta el trabajo que se realizó para ajustar la batimetría de los ríos La Sierra y Grijalva. Los datos batimétricos de estos ríos en secciones transversales fueron cortesía del Dr. José G. Fabián Rivera Trejo de DAIA-UJAT y del Ing. Víctor Rubén Concha y Concha de la CONAGUA. Las secciones transversales donde se midieron los datos se muestran en la figura 5.2.

Los datos que corresponden a la sección transversal G1 del río Grijalva se muestran en la tabla 5.1. Las unidades están en metros y la altura y se midió con respecto al nivel medio del mar, es decir, $y = 0$ es el nivel medio del mar.

Para ajustar y visualizar las secciones transversales se utilizó interpolación por spline cúbico y de tensión, que son una poderosa herramienta para suavizar datos experimentales. Con este propósito, se presenta un breve resumen de los splines cúbicos y de tensión en las siguientes tres secciones. En particular, la sección transversal G1 se ajustó y se visualiza en la figura 5.5 con los datos de la tabla 5.1.

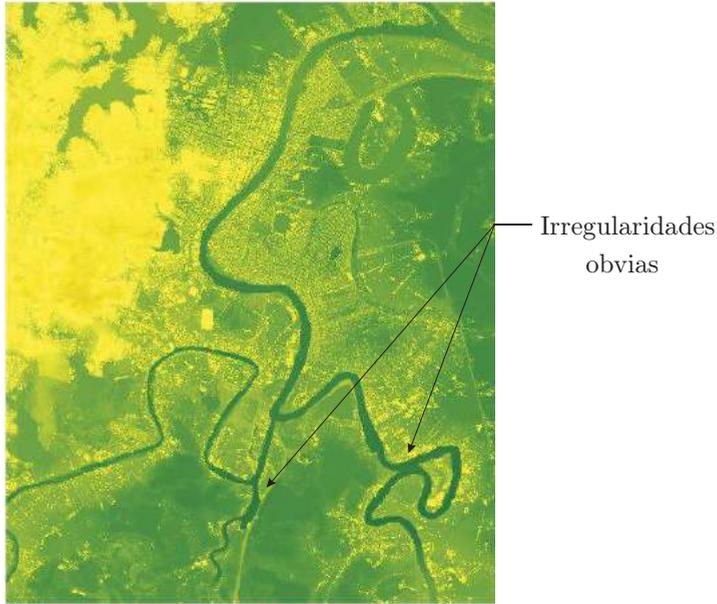


Figura 5.1: Irregularidades obvias detectadas sobre el río Pichucalco y sobre el río La Sierra.

x_i	0	2	2.39	25.70	61.34	66.27
y_i	7.50	7.49	5.94	4.99	5.21	3.52
x_i	83.84	91.70	108.84	118.31	131.34	136.08
y_i	-2.50	-2.50	-2.50	-1.66	-0.51	-0.70
x_i	153.84	180.50	190.28	190.69	192.69	
y_i	-1.50	2.19	5.87	7.49	7.50	

Tabla 5.1: Datos batimétricos de la sección transversal G1 sobre el río Grijalva. Las unidades están en metros y la altura y está con respecto al nivel medio del mar, es decir, $y = 0$ es el nivel medio del mar.

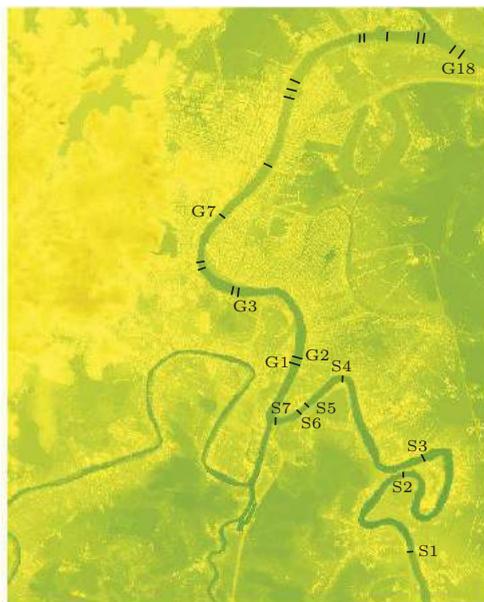


Figura 5.2: Secciones transversales de los ríos La Sierra y Grijalva, donde se midieron los datos batimétricos.

5.2.1. Interpolación por spline cúbico

Sea $\Pi := a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ una partición del intervalo $[a, b]$.

Definición 5.2.1 *Un spline cúbico sobre la partición Π es una función $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con las propiedades*

- A). $s \in C^2[a, b]$, es decir, s es continua sobre $[a, b]$ y existen s' y s'' sobre $[a, b]$ y son continuas.
- B). s coincide sobre $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1 : n - 1$ con un polinomio cúbico.

Así que un spline cúbico consta de $n - 1$ polinomios cúbicos por piezas cuyos valores y los de sus primeras dos derivadas coinciden en los **nodos** o **puntos de ruptura** x_i , $i = 2 : n - 1$.

Si y_1, y_2, \dots, y_n son n números reales arbitrarios, entonces un **spline cúbico interpolante** de los puntos (x_i, y_i) , $i = 1 : n$, es un spline cúbico s que satisface

$$s(x_i) = y_i, \quad i = 1 : n.$$

Cálculo del spline cúbico interpolante

Para determinar el spline cúbico $s(x)$ se parte del hecho de que es un polinomio cúbico sobre $[x_i, x_{i+1}]$, lo que implica que $s''(x)$ es un segmento de recta sobre $[x_i, x_{i+1}]$. Por lo tanto

$$s''(x) = s''(x_i) + \frac{s''(x_{i+1}) - s''(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i). \quad (5.1)$$

Integrando sobre $[x_i, x]$, $x \leq x_{i+1}$ se tiene

$$s'(x) = s'(x_i) + s''(x_i)(x - x_i) + \frac{s''(x_{i+1}) - s''(x_i)}{2(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)^2. \quad (5.2)$$

Integrando de nuevo se obtiene

$$\begin{aligned} s(x) &= y_i + s'(x_i)(x - x_i) + \frac{s''(x_i)}{2}(x - x_i)^2 \\ &\quad + \frac{s''(x_{i+1}) - s''(x_i)}{6(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)^3. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Abreviando: $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1 : n - 1$, $s'_i = s'(x_i)$ y $s''_i = s''(x_i)$, $i = 1 : n$, se sigue de (5.3) y de la propiedad de interpolación que

$$y_{i+1} = s(x_{i+1}) = y_i + s'_i h_i + \frac{s''_i}{2} h_i^2 + \frac{s''_{i+1} - s''_i}{6h_i} h_i^3,$$

de donde

$$s'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{3} s''_i - \frac{h_i}{6} s''_{i+1}, \quad i = 1 : n - 1. \quad (5.4)$$

Se puede demostrar que

$$s'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{h_{n-1}}{6} s''_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{3} s''_n. \quad (5.5)$$

Si se denota el spline cúbico sobre $[x_{i-1}, x_i]$ por $z(x)$, entonces las expresiones equivalentes a (5.2) y (5.3) para $z'(x)$ y $z(x)$ son

$$\begin{aligned} z'(x) &= z'(x_{i-1}) + z''(x_{i-1})(x - x_{i-1}) \\ &\quad + \frac{z''(x_i) - z''(x_{i-1})}{2(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^2, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} z(x) &= y_{i-1} + z'(x_{i-1})(x - x_{i-1}) + \frac{z''(x_{i-1})}{2}(x - x_{i-1})^2 \\ &\quad + \frac{z''(x_i) - z''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3. \end{aligned}$$

Evaluando ambas expresiones en x_i resultan

$$\left. \begin{aligned} z'(x_i) &= z'(x_{i-1}) + z''(x_{i-1})h_{i-1} \\ &\quad + \frac{z''(x_i) - z''(x_{i-1})}{2}h_{i-1}, \\ z(x_i) &= y_{i-1} + z'(x_{i-1})h_{i-1} + \frac{z''(x_{i-1})}{2}h_{i-1}^2 \\ &\quad + \frac{z''(x_i) - z''(x_{i-1})}{6}h_{i-1}^3. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Por la continuidad de $s(x)$, $s'(x)$ y $s''(x)$ en x_i se sigue que

$$z(x_i) = s(x_i) = y_i, \quad z'(x_i) = s'(x_i) \quad \text{y} \quad z''(x_i) = s''(x_i)$$

para todo $i = 2 : n - 1$.

Por lo que las igualdades en (5.6) se pueden escribir como

$$s'_i = s'_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{2} s''_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{2} s''_i$$

y

$$s'_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{3} s''_{i-1} - \frac{h_{i-1}}{6} s''_i,$$

que son equivalentes a

$$s'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6} s''_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3} s''_i. \quad (5.7)$$

Igualando (5.4) con (5.7) se obtiene el sistema tridiagonal

$$h_{i-1} s''_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) s''_i + h_i s''_{i+1} = 6 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right), \quad i = 2 : n - 1. \quad (5.8)$$

El sistema (5.8) está subdeterminado pues tiene $n - 2$ ecuaciones y n incógnitas $s''_1, s''_2, \dots, s''_n$, por lo que no se garantiza la unicidad del spline cúbico. Hay varias alternativas para abordar el problema de unicidad, las más comunes son:

Teorema 5.2.1 *Cada una de las condiciones siguientes:*

- A). $s''(a) = s''(b) = 0$, “spline cúbico natural”
- B). $s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b)$, $k = 0, 1$ y 2 , “spline cúbico periódico”
- C). $s'(a) = y'_1$, $s'(b) = y'_n$, con y'_1 y y'_n dados, “spline cúbico completo”

garantizan la existencia y unicidad del spline cúbico $s(x)$ que interpola los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

Demostración. Caso A). Si $s''(a) = s''(b) = 0$ entonces $s''_1 = 0$ y $s''_n = 0$. Introduciendo las abreviaciones

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &:= \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i}, & \mu_i &:= 1 - \lambda_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \\ d_i &:= \frac{6}{h_{i-1} + h_i} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right), \\ & & & i = 2 : n - 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_2 & & & & \mu_2 \\ \mu_3 & 2 & \lambda_3 & & & \\ & \mu_4 & 2 & \lambda_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2'' \\ s_3'' \\ s_4'' \\ \vdots \\ s_{n-1}'' \\ s_n'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

de $n - 1$ ecuaciones con $n - 1$ incógnitas $s_2'', s_3'', \dots, s_n''$. La matriz de coeficientes del sistema también es de diagonal dominante estricto por filas, por lo que es no singular. Así, el sistema lineal (5.12) tiene una única solución $s = (s_2'', s_3'', \dots, s_n'')^T$.

Caso C). Si $s'(a) = y_1'$ entonces $s_1' = y_1'$, y de (5.4) con $i = 1$ se obtiene la ecuación

$$2h_1 s_1'' + h_1 s_2'' = 6 \left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - y_1' \right). \quad (5.13)$$

Y si $s'(b) = y_n'$ entonces $s_n' = y_n'$ y de (5.5) se obtiene la ecuación

$$h_{n-1} s_{n-1}'' + 2h_{n-1} s_n'' = 6 \left(y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \right). \quad (5.14)$$

Ahora definiendo

$$\lambda_1 := 1, \quad d_1 := \frac{6}{h_1} \left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - y_1' \right),$$

y

$$\mu_n := 1, \quad d_n := \frac{6}{h_{n-1}} \left(y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \right),$$

y junto con (5.9), se obtiene del sistema (5.8) y de las ecuaciones (5.13) y (5.14) el mismo sistema lineal dado por (5.10). Así que también en este caso, existe una única solución $s = (s_1'', s_2'', \dots, s_{n-1}'', s_n'')^T$. ■

Una ventaja de interpolar una función f suficientemente suave con splines cúbicos, es que permite estimar también f' , f'' y f''' con aceptable precisión.

Teorema 5.2.2 *Sea f una función con derivadas continuas hasta de orden 4 y s el spline cúbico que interpola a f en n puntos dados por $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Entonces para cada $x \in [a, b]$:*

$$|f(x) - s(x)| \leq C \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)| h^4, \quad (5.15)$$

o sea que

$$|f(x) - s(x)| = O(h^4),$$

y que

$$|f'(x) - s'(x)| = O(h^3),$$

$$|f''(x) - s''(x)| = O(h^2),$$

$$|f'''(x) - s'''(x)| = O(h),$$

donde C en (5.15) es una constante y $h \equiv \max_{k=1:n-1} |x_{k+1} - x_k|$.

Demostración. Una prueba se puede encontrar en Stoer and Bulirsch (2002) [51]. ■

5.2.2. Spline de tensión

En algunos problemas de ajustes de datos resulta útil disponer de un parámetro τ , que se conoce como **tensión**. Cuando τ tiene un valor grande, la curva que pasa a través de los datos tendrá una tensión alta. Esto se puede interpretar como una fuerza que estira la curva, tensándola entre los puntos. Cuando $\tau \rightarrow 0$, la curva toma una forma más cercana al spline cúbico. Cuando $\tau \rightarrow \infty$, la curva tiende a la función lineal por pedazos, es decir, al spline de grado 1.

Como en la sección anterior, se considera una partición $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ del intervalo $[a, b]$ y datos y_i para cada x_i .

Definición 5.2.2 *Un spline de tensión que interpola los datos (x_i, y_i) , $i = 1 : n$, es una función $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades*

- A). $s \in C^2[a, b]$, es decir, s es continua en $[a, b]$ y existen s' y s'' en $[a, b]$ y son continuas.

B). $s(x_i) = y_i$ para todo $i = 1 : n$.

C). s satisface la ecuación diferencial

$$y^{(4)} - \tau^2 y'' = 0 \quad (5.16)$$

sobre cada intervalo (x_i, x_{i+1}) , $i = 1 : n - 1$.

Observación 5.2.1 *El spline de tensión se reduce a un spline cúbico cuando $\tau = 0$, pues en este caso las soluciones de la ecuación diferencial (5.16) resultan ser polinomios cúbicos en cada intervalo (x_i, x_{i+1}) .*

Para determinar s , se procede igual que en el caso de los splines cúbicos. Para ello, se considera

$$s_i'' = s''(x_i) \quad \text{y} \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 1 : n,$$

y se plantean las condiciones de frontera que debe satisfacer s en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, que son los siguientes:

$$\begin{aligned} s^{(4)} - \tau^2 s'' &= 0, \\ s(x_i) &= y_i, & s(x_{i+1}) &= y_{i+1}, \\ s''(x_i) &= s_i'', & s''(x_{i+1}) &= s_{i+1}''. \end{aligned}$$

La solución a este problema de valores en la frontera sobre cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ está dada por (Kincaid y Cheney (1994) [26]):

$$\begin{aligned} s_i(x) &= \frac{s_i'' \sinh[\tau(x_{i+1} - x)] + s_{i+1}'' \sinh[\tau(x - x_i)]}{\tau^2 \sinh(\tau h_i)} \\ &+ \frac{1}{h_i} \left(y_i - \frac{s_i''}{\tau^2} \right) (x_{i+1} - x) \\ &+ \frac{1}{h_i} \left(y_{i+1} - \frac{s_{i+1}''}{\tau^2} \right) (x - x_i). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Las incógnitas $s_1'', s_2'', \dots, s_n''$, se obtienen resolviendo el sistema tridia-gonal:

$$\alpha_{i-1} s_{i-1}'' + (\beta_{i-1} + \beta_i) s_i'' + \alpha_i s_{i+1}'' = \gamma_i - \gamma_{i-1} \quad (5.18)$$

para $i = 2 : n - 1$, donde los coeficientes α_i , β_i y γ_i , se determinan mediante las relaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{1}{h_i} - \frac{\tau}{\sinh(\tau h_i)}, \\ \beta_i &= \frac{\tau \cosh(\tau h_i)}{\sinh(\tau h_i)} - \frac{1}{h_i}, \\ \gamma_i &= \frac{\tau^2(y_{i+1} - y_i)}{h_i}.\end{aligned}$$

Se necesitan dos condiciones adicionales para determinar las incógnitas $s''_1, s''_2, \dots, s''_n$. Al igual que en el caso del spline cúbico natural, se impone la condición: $s''_1 = s''_n = 0$.

Algoritmo 5.2.1 *Para calcular el spline de tensión s que interpola los datos (x_i, y_i) :*

1. Verificar que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.
2. Calcular h_i , α_i , β_i y γ_i para $i = 1 : n - 1$.
3. Hacer $s''_1 = s''_n = 0$.
4. Resolver el sistema tridiagonal (5.18) para s''_i con $i = 2 : n - 1$.
5. Usar la fórmula (5.17) para evaluar s en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1 : n - 1$.
6. Visualizar la gráfica de s y de los datos.

Los splines de tensión fueron presentados por primera vez por Schweikert (1966) [47]. Otros artículos relacionados con esto son los de Cline (1974) [12] y de Pruess (1978) [45]. Cline ha generado software para el cálculo de curvas y de superficies con la ayuda de splines de tensión. Una alternativa a los splines cúbicos en tensión es el spline cúbico rígido de C. de Boor (2001) [17]. Estas funciones son splines cúbicos ordinarios con nodos adicionales colocados en las regiones en donde se desea que la curva cambie abruptamente de dirección. La ventaja de los splines rígidos es que no necesitan de programas nuevos de computadora y evitan la carga computacional derivada de usar funciones hiperbólicas.

La siguiente función en MATLAB visualiza los splines de tensión, cúbico completo y cúbico natural:

```
function SplineTeNaCo1(x,y,tau)
% Variables de entrada:
% x: son las abscisas de los datos
% y: son las ordenadas de los datos
% tau: es el parámetro para el spline de tensión
n = length(x);
x2 = x(2:n); x1 = x(1:n-1); h = x2-x1;
y2 = y(2:n); y1 = y(1:n-1); yi = y2-y1;
%
alpha = 1 ./ h - tau ./ sinh(tau*h);
beta = -1 ./ h + tau*cosh(tau*h) ./ sinh(tau*h);
gamma = tau^2*yi ./ h;
%
sb(1) = 0; sb(n) = 0;
%
gamma2 = gamma(2:n-1); gamma1 = gamma(1:n-2);
b = gamma2-gamma1;
for i = 1:n-2;
    A(i,i) = beta(i)+beta(i+1);
end
for i = 1:n-3;
    A(i,i+1) = alpha(i+1);
    A(i+1,i) = A(i,i+1);
end
%
b = b(:);
sb1 = linsolve(A,b);
sb=[sb(1);sb1;sb(n)];
%
% Cálculo del spline de tensión
%
xx = [x(1):(x(n)-x(1))/1000:x(n)];
```

```

for i = 1:length(xx);
    if xx(i) < x(1);
        st(i) = sb(2)*sinh(tau*(xx(i)-x(1)))/ ...
            (tau^2*sinh(tau*h(1)))+(y(1)*(x(2)-xx(i))+ ...
            (y(2)-sb(2)/tau^2)*(xx(i)-x(1)))/h(1);
    elseif xx(i) > x(n);
        st(i) = sb(n-1)*sinh(tau*(x(n)-xx(i)))/...
            (tau^2*sinh(tau*h(n-1)))+(y(n-1)-sb(n-1)/ ...
            tau^2)*(x(n)-xx(i))+y(n)*(xx(i)-x(n-1)))/h(n-1);
    else for k = 1:n-1;
        if xx(i) >= x(k) & xx(i) <= x(k+1);
            st(i) = (sb(k)*sinh(tau*(x(k+1)-xx(i))) + ...
                sb(k+1)*sinh(tau*(xx(i)-x(k))))/ ...
                (tau^2*sinh(tau*h(k)))+(y(k)-sb(k)/ ...
                tau^2)*(x(k+1)-xx(i))+y(k+1)-sb(k+1)/...
                tau^2)*(xx(i)-x(k))/h(k);
        end
    end
end
end
end
end
%
% Comparando con el spline cúbico completo
cs = spline(x,[0 y 0]);
%
% Comparando con el spline cúbico natural
cs1 = spline(x,y);
%
plot(x,y,ó'k',xx,st,'k',xx,ppval(cs,xx),'-k',xx, ...
ppval(cs1,xx),' :k', 'linewidth',1.5);
legend('Datos','Spline de tensión','Spline cúbico ...
completo','Spline cúbico natural',2)
%
% Fin.

```

5.2.3. Comparación de los splines

Con el propósito de elegir cuál de los splines usar para modelar las secciones transversales que se muestran en la figura 5.2, se hace una comparación entre los diferentes tipos de splines cúbicos con el spline de tensión. Para ello, se considera la función de prueba:

$$f(x) = \frac{1}{2}(10 + \tanh(x)), \quad x \in [-5, 5]. \quad (5.19)$$

La función f se interpola con el spline cúbico natural, con el spline cúbico completo tomando $s'(-5) = 0 = s'(5)$, y con el spline de tensión eligiendo $\tau = 0.91$, en los nodos $x = [-5, -2, -0.5, 0, 1, 2, 5]$. Los resultados gráficos se visualizan en las figuras 5.3 y 5.4. Se observa en dichas figuras que el spline cúbico completo es la que mejor aproxima a la gráfica de (5.19), en este caso. Sin embargo, no siempre es así, por lo que se utilizará el spline que mejor suavice los datos en cada caso.

5.2.4. Aproximación por splines de las secciones transversales

Ejecutando la función **SplineTeNaCo1.m**, se visualiza en la figura 5.5 la gráfica de los datos de la tabla 5.1 correspondiente a la sección transversal G1 y de los splines que suavizan dichos datos. Se enfocará ahora a los tres problemas siguientes:

1. Ubicar el lugar “exacto” donde se midieron los datos de la sección transversal G1 y de las demás secciones transversales.
2. Determinar la posición del origen de coordenadas y la dirección del eje horizontal x en que se midieron los datos.
3. Elegir cuál de los splines es el que mejor aproxima la sección transversal G1 y de los demás.

Se observa en la figura 5.5, que la gráfica que mejor aproxima a los datos de la sección transversal G1 es el del spline de tensión con $\tau = 1.8$, pues tanto el spline cúbico natural como el spline cúbico completo tienen oscilaciones grandes en zonas “relativamente planas”.

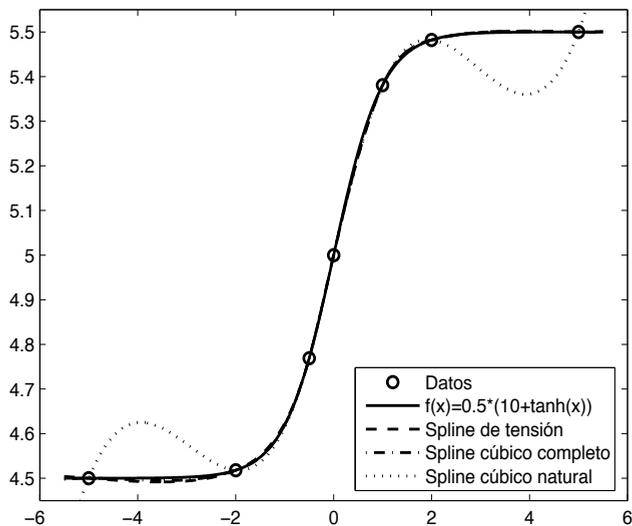


Figura 5.3: Comparación de los splines cúbico natural y completo con el spline de tensión. Para el spline completo se consideran $s'(-5) = 0 = s'(5)$, y para el spline de tensión se tomó $\tau = 0.91$.

De hecho, el tramo que va de 0 a 60 metros tiene una pendiente muy pequeña (sugerida por haber pocos puntos en un tramo grande, véase la figura 5.5); por lo que se tomará el spline de tensión para aproximar el fondo del río.

De acuerdo con la información obtenida, los datos de G1 corresponden a la sección transversal del río Grijalva frente a la estación hidrométrica Gaviotas, cuyas coordenadas de ubicación que se encuentran en la pared de la caseta de dicha estación son: latitud norte = $17^{\circ}58'03.50''$ y longitud oeste = $92^{\circ}54'42.90''$ (véase figura 5.6), y como la serie de datos correspondientes a G2, G3, ..., G9, se midieron en la dirección en que fluye el río, se asumió que el origen de coordenadas está en el margen izquierdo del río con respecto a la dirección del flujo. Como se dijo antes, el nivel $y = 0$ corresponde al nivel medio del mar.

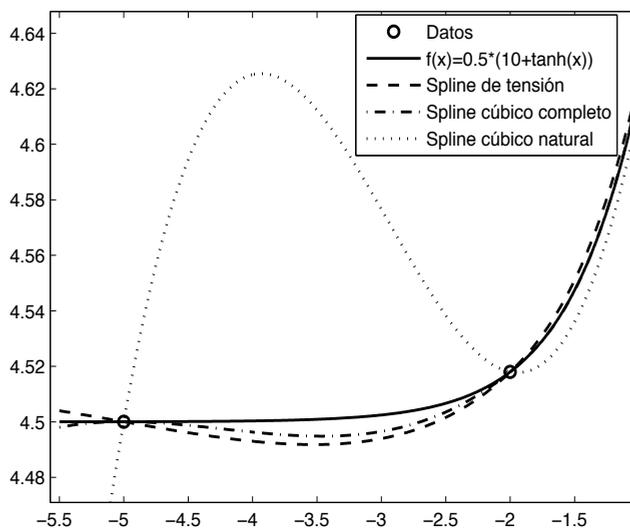


Figura 5.4: Ampliación de la figura 5.3 en el intervalo $[-5.5, -1]$, para una mejor visualización y diferenciación de los splines en este intervalo.

Una vez ubicado el lugar donde se midieron los datos de la sección transversal G1 (figura 5.7), se procedió a determinar el ancho del río que es aproximadamente de 121 m, por lo que se concluyó que el cauce va desde $x_5 = 61.34$ m hasta $x_{16} = 190.69$ m, que se muestra en la figura 5.8. Después se procedió a generar una propuesta en celdas de 5×5 m², para modelar dicho cauce en la base de datos correspondientes a la figura 5.2. Esta propuesta es la gráfica escalonada punteada que se muestra en la figura 5.9(A). El resultado del ajuste de la batimetría de la sección transversal G1, se muestra en la figura 5.9(B).

Un procedimiento similar se hizo con las secciones transversales G2 y G3. Los resultados gráficos para G2 se muestran en las figuras 5.10 y 5.11, y los resultados gráficos para G3 se muestran en la figura 5.12.

Este mismo procedimiento se aplicó en las secciones transversales G4, G5 hasta G18 del río Grijalva, y secciones transversales S1, S2 hasta S7 del río La Sierra, que se muestran en la figura 5.2.

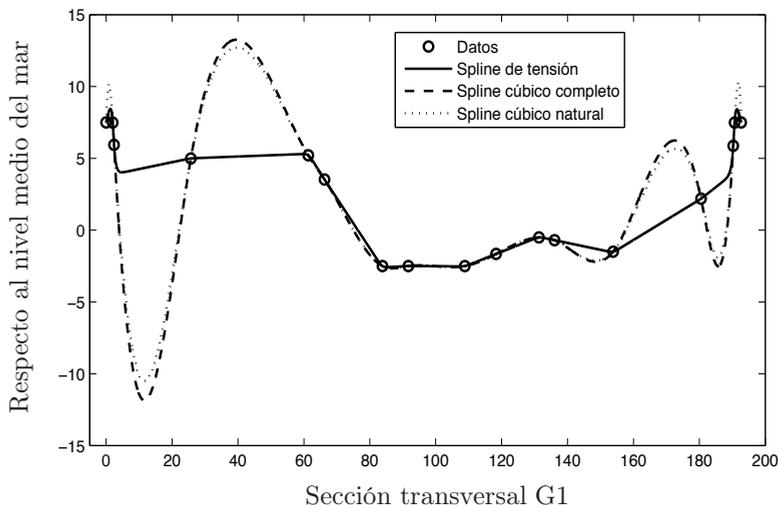


Figura 5.5: Visualización de los datos de la sección transversal G1 y de los splines que suavizan dichos datos. El spline de tensión se calculó con parámetro $\tau = 1.8$.

5.3. Ajuste de la batimetría de los tramos limitados por las secciones transversales

En esta sección se modela el tramo del río Grijalva que va de la sección transversal G1 a G2. De acuerdo con la base de datos que se obtuvo, este tramo mide aproximadamente 50 m de longitud y es casi recto como se puede observar en la figura 5.13. Comparando la figura 5.9 con 5.11, se nota que la sección transversal G2 es menos profunda que G1, de hecho hay una diferencia de aproximadamente 60 cm.

La forma en que se modeló el tramo del río que va de G1 a G2 fue uniendo ambas secciones transversales mediante líneas rectas (aproximación lineal), para generar una superficie que se muestra en la figura 5.14. Dicha superficie es la que se tomó como modelo para ajustar los datos correspondientes a este tramo.

Ahora, el tramo de río que va de G2 a G3 mide aproximadamente 1 391 m de longitud y es mucho más complicado de modelar debido a la curva



Figura 5.6: Ubicación de la estación hidrométrica Gaviotas en el margen izquierdo en la dirección del flujo del río Grijalva. Coordenadas: latitud norte = $17^{\circ}58'03.50''$ y longitud oeste = $92^{\circ}54'42.90''$.

que forma, como se puede observar en la figura 5.15. En este trabajo, se hizo una primera aproximación similar a lo que se hizo con el tramo de G1 a G2.

5.4. Modelación del cauce de los ríos Viejo Mezcalapa y Pichucalco

5.4.1. Ajuste de la batimetría de secciones transversales

Como no se encontró una fuente de datos batimétricos de los ríos Viejo Mezcalapa y Pichucalco, se realizó un trabajo de campo con el apoyo del Ing. Adolfo Cornelio Palacio de DAIA-UJAT para obtener parte de estos datos. Se midieron dos secciones transversales M1, M2, y 24 puntos m_1, m_2, \dots, m_{24} donde se midieron los tirantes sobre el río Viejo Mezcalapa; así como una sección transversal P1 y 18 puntos p_1, p_2, \dots, p_{18} donde se midieron los tirantes sobre el río Pichucalco. Las secciones transversales y los puntos (aproximadamente en el centro del río) donde se midieron los tirantes se muestran en la figura 5.16.



Figura 5.7: Ubicación de la sección transversal G1 frente a la estación hidrométrica Gaviotas, cuyas coordenadas aproximadas en el margen izquierdo del río son: latitud norte = $17^{\circ}58'02.52''$ y longitud oeste = $92^{\circ}54'40.03''$, con un ancho aproximado de 121 m.

Los datos del levantamiento batimétrico de las secciones M1 y M2 del río Viejo Mezcalapa se muestran en las tablas 5.2 y 5.3, respectivamente; y los datos del levantamiento batimétrico de la sección transversal P1 del río Pichucalco, se muestran también en la tabla 5.3.

En el lugar donde se midieron los datos de la sección M1, existe un muro de contención en el margen izquierdo del río que está a 8.20 m sobre el nivel medio del mar (véase figura 5.17). Como los puntos (x_3, y_3) y (x_{10}, y_{10}) , corresponden a ambos extremos del río sobre el nivel de la lámina de agua, la elevación del nivel de la lámina de agua con respecto al nivel medio del mar es

$$\eta_3 = 8.20 - c_3 = 8.20 - 4.50 = 3.70 \text{ m.}$$

Las demás coordenadas de los puntos (ξ_i, η_i) , $i = 1 : 11$, en la figura 5.17 se calcularon como:

$$\begin{aligned} \xi_i &= \|(x_i, y_i) - (x_1, y_1)\|_2 \\ \eta_i &= \begin{cases} 8.20 - c_i, & i = 1 : 3, 10 : 12 \\ \eta_3 - c_i, & i = 4 : 9, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.20)$$

y los resultados que se obtuvieron se muestran en la tabla 5.4.

A continuación se genera una propuesta en celdas de $5 \times 5 \text{ m}^2$ que se muestra en la figura 5.18(A) para modificar la sección transversal M1 en la base de datos correspondiente a la figura 5.16. El resultado del ajuste de la batimetría en la base de datos mencionado anteriormente, se muestra en la figura 5.18(B).

De manera similar se procedió al ajuste de la batimetría de las secciones transversales M2 sobre el río Viejo Mezcalapa y P1 sobre el río Pichucalco. Los resultados se muestran en la tabla 5.5 y los resultados gráficos se muestran en las figuras 5.19 y 5.20.

Los puntos (ξ_i, η_i) , $i = 1 : 12$, de la tabla 5.5 que corresponde a la sección M2 se calcularon como

$$\xi_i = \|(x_i, y_i) - (x_1, y_1)\|_2, \quad i = 1 : 12,$$

y

$$\eta_i = \begin{cases} 3.70 + c_3 - c_i, & i = 1 : 3 \\ 3.70 - c_i, & i = 4 : 9 \\ 3.70 + c_{10} - c_i, & i = 10 : 12. \end{cases}$$

También los puntos correspondientes de la sección P1 sobre el río Pichucalco, se calcularon de acuerdo con las fórmulas

$$\xi_i = \|(x_i, y_i) - (x_1, y_1)\|_2, \quad i = 1 : 9,$$

y

$$\eta_i = \begin{cases} 3.70 + c_3 - c_i, & i = 1 : 2 \\ 3.70 - c_i, & i = 3 : 6 \\ 3.70 + c_8 - c_i, & i = 7 : 9, \end{cases}$$

donde en ambas secciones, 3.70 es el nivel de la lámina de agua con respecto al nivel medio del mar que se obtuvo en la sección M1, y se consideró el mismo nivel para las secciones M2 y P1, bajo el supuesto de que la “variabilidad de dicho nivel es pequeña”.

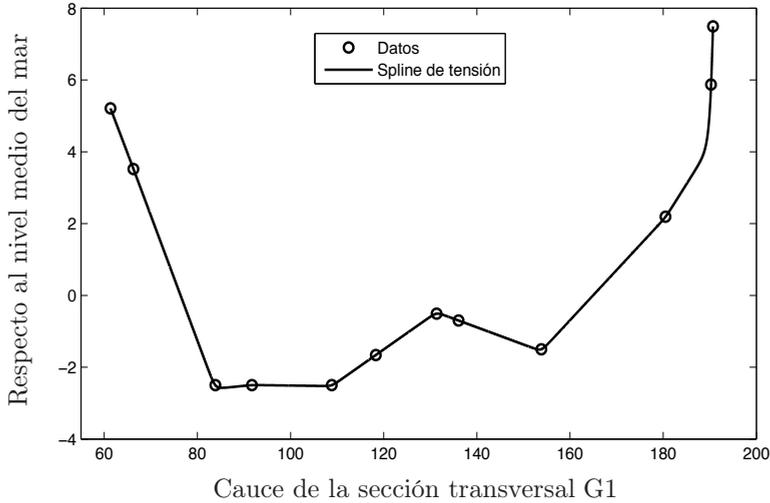


Figura 5.8: Visualización de los datos y aproximación del cauce del río Grijalva correspondiente a la sección transversal G1 con el spline de tensión con parámetro $\tau = 1.8$. El ancho de esta sección es aproximadamente 130 m.

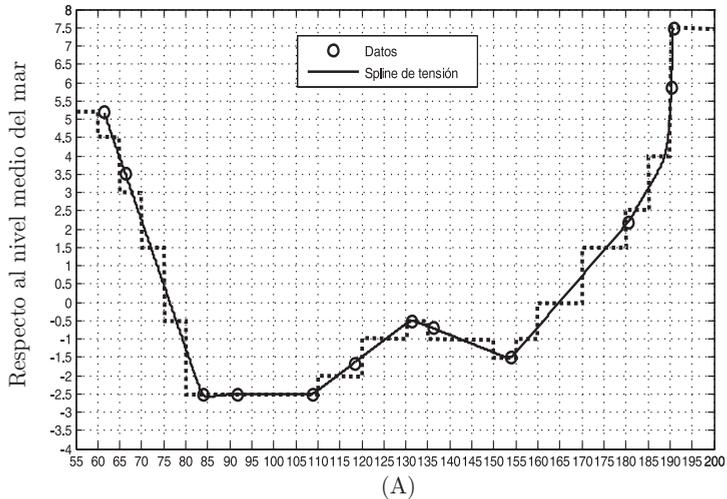


Figura 5.9 (A) La gráfica escalonada punteada que aproxima a la gráfica del spline de tensión, es la que se utilizó para modelar el cauce del río en la sección transversal G1. La partición del eje x se hizo con tamaño de paso 5 porque los datos de la elevación del terreno se disponen en celdas de 5×5 m²

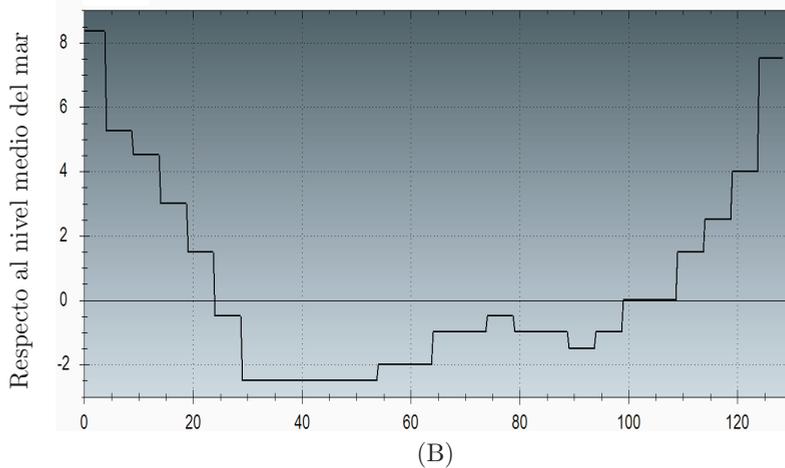


Figura 5.9 (B) Modelación de la batimetría de la sección transversal G1 sobre el dominio del fluido en base a la propuesta que se muestra en la figura 5.9(A).

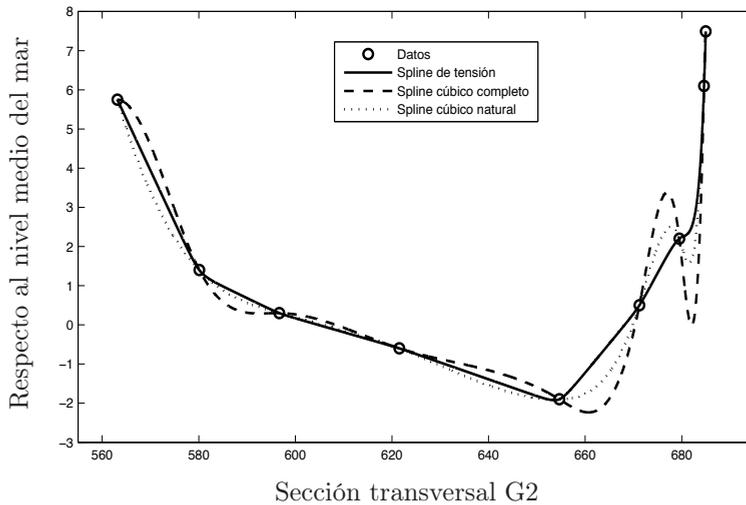


Figura 5.10: Visualización de los datos de la sección transversal G2 y de los splines que suavizan dichos datos. El spline de tensión se calculó con parámetro $\tau = 0.8$. Observa las oscilaciones que presentan los splines cúbico completo y natural.

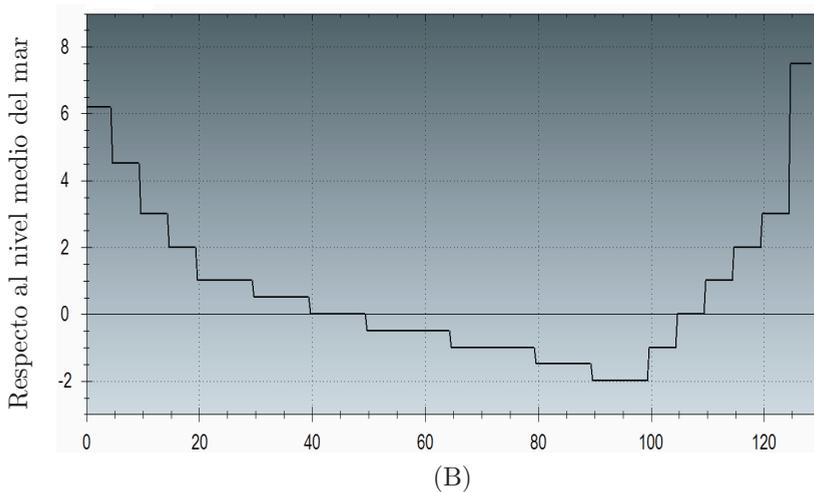
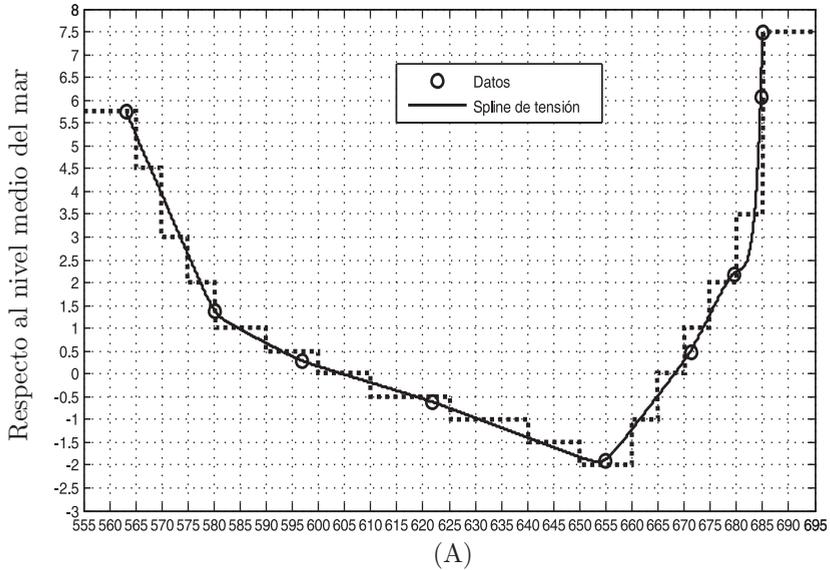


Figura 5.11: (A) La gráfica escalonada punteada que aproxima a la gráfica del spline de tensión, es la que se utilizó para modelar el cauce del río en la sección transversal G2. La partición del eje x también se hizo con tamaño de paso 5, porque como se dijo antes, los datos de la elevación del terreno se disponen en celdas de $5 \times 5 \text{ m}^2$. La longitud de esta sección es de aproximadamente 122 m. (B) Modelación de la batimetría de la sección transversal G2 sobre el dominio del fluido en base a la propuesta de la figura 5.11(A).

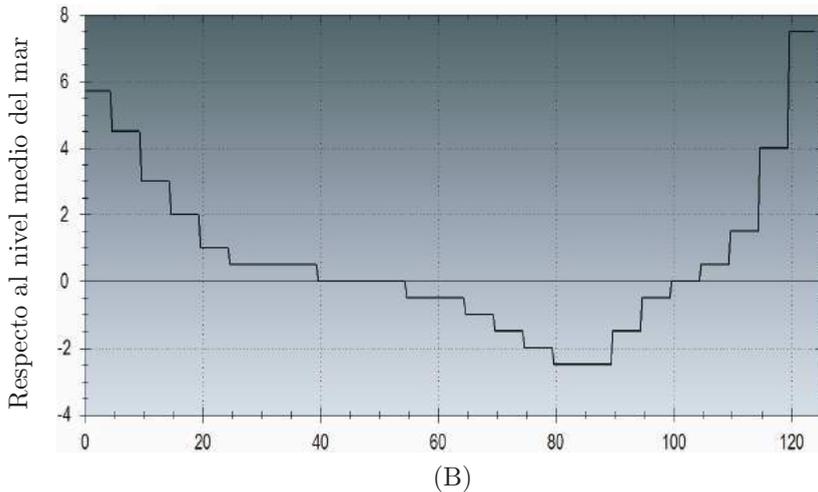
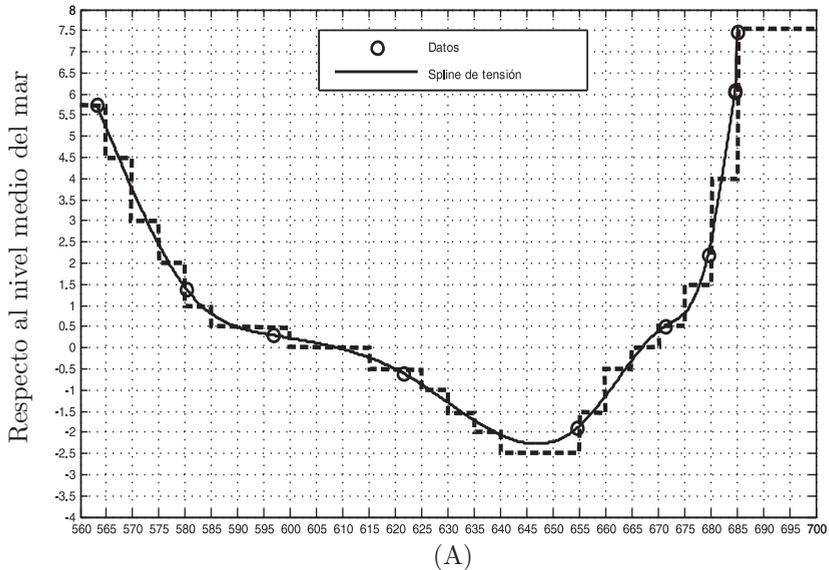


Figura 5.12: (A) La gráfica escalonada punteada que aproxima a la gráfica del spline de tensión ($\tau = 0.05$), es la que se utilizó para modelar el cauce del río en la sección transversal G3. La partición del eje x también se hizo con tamaño de paso 5 como antes. La longitud de esta sección es también de aproximadamente 122 m. (B) Modelación de la batimetría de la sección transversal G3 sobre el dominio del fluido en base a la propuesta de la figura 5.12(A).



Figura 5.13: Tramo del río Grijalva de G1 a G2. Esta sección es casi recta y mide aproximadamente 50 m de longitud, de acuerdo con los datos que nos fueron proporcionados.

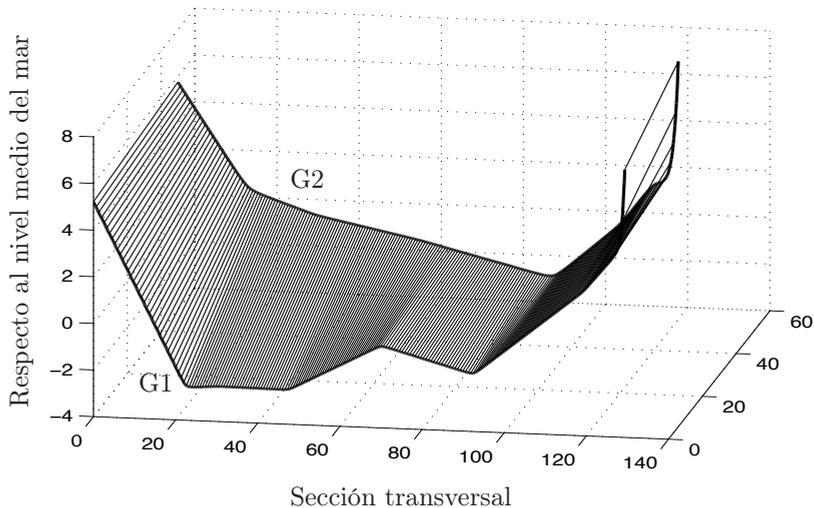


Figura 5.14: Modelación del tramo del río Grijalva que va de la sección transversal G1 a G2 mediante líneas rectas.



Figura 5.15: Tramo del río Grijalva de G2 a G3. El meandro que se forma en esta parte del río es más complicado de modelar y mide aproximadamente 1 391 m de longitud, de acuerdo con los datos proporcionados.

$$\eta_i = \begin{cases} 3.70 + c_3 - c_i, & i = 1 : 2 \\ 3.70 - c_i, & i = 3 : 6 \\ 3.70 + c_8 - c_i, & i = 7 : 9, \end{cases}$$

donde en ambas secciones, 3.70 es el nivel de la lámina de agua con respecto al nivel medio del mar que se obtuvo en la sección M1, y se consideró el mismo nivel para las secciones M2 y P1, bajo el supuesto de que la “variabilidad de dicho nivel es pequeña”.

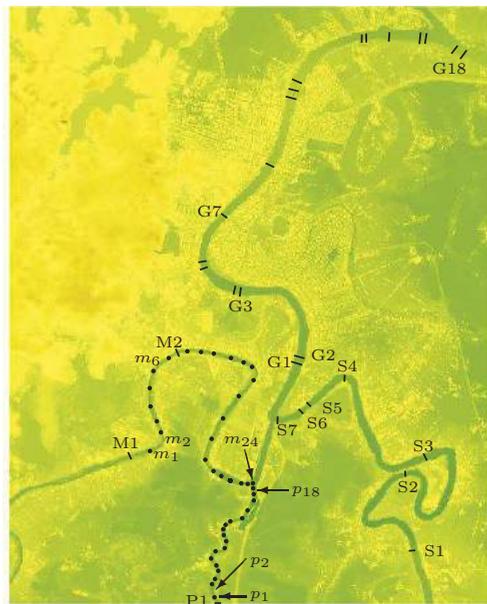


Figura 5.16: Secciones transversales M1 y M2 sobre el río Viejo Mezcalapa y sección transversal P1 sobre el río Pichucalco. En los puntos m_1, m_2, \dots, m_{24} y p_1, p_2, \dots, p_{18} , fue donde se midieron los tirantes en el centro de los ríos Viejo Mezcalapa y Pichucalco, respectivamente, del día 19 de febrero de 2011.

5.4.2. Interpolación de las secciones longitudinales de los ríos Viejo Mezcalapa y Pichucalco

Debido a que no nos fue posible obtener datos de otras secciones transversales de estos ríos, se decidió hacer un primer estudio sobre la variabilidad del fondo de dichos ríos en los puntos que se muestran en la figura 5.16. Se midieron datos que se presentan en la tabla 5.6 de la profundidad del centro del río Viejo Mezcalapa en un tramo de aproximadamente 5.16 Km. Los datos que se midieron sobre el río Pichucalco en un tramo de aproximadamente 1.90 Km, se muestran en la tabla 5.7.

Coordenadas xy UTM			Tirantes	
i	x_i	y_i	c_i	
1	507 253	1 985 178	0.500	
2	507 254	1 985 174	1.088	
3	507 256	1 985 167	4.540	
4	507 254	1 985 158		1.640
5	507 258	1 985 148		5.160
6	507 259	1 985 135		6.150
7	507 263	1 985 117		8.700
8	507 258	1 985 111		6.000
9	507 254	1 985 105		2.800
10	507 253	1 985 100	4.510	
11	507 258	1 985 097	2.520	
12	507 261	1 985 083	1.610	

Tabla 5.2: Coordenadas xy UTM (Universal Transversa Mercator) de los puntos donde se midieron las batimetrías de la sección transversal M1 del río Viejo Mezcalapa del día 19 de febrero de 2011. El primer punto corresponde al nivel de la calle donde está el muro de contención que tiene una altura de 0.50 m, como se muestra en la figura 5.17. Los puntos (x_3, y_3) y (x_{10}, y_{10}) , corresponden a ambos extremos del río sobre el nivel de la lámina de agua, por lo que los valores de los c_i , $i = 4 : 9$, son los calados o tirantes en los puntos correspondientes. Todas las medidas están en metros.

Para tener una aproximación sobre el comportamiento del fondo de ambos ríos a lo largo de su recorrido en la zona en que se midieron los datos, se interpolaron los puntos (ξ_i, η_i) del fondo de los ríos, donde

$$\xi_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ \sum_{j=2}^i \|(x_j, y_j) - (x_{j-1}, y_{j-1})\|_2 & \text{si } i \geq 2, \end{cases}$$

y

$$\eta_i = 3.70 - c_i, \quad i \geq 1. \tag{5.21}$$

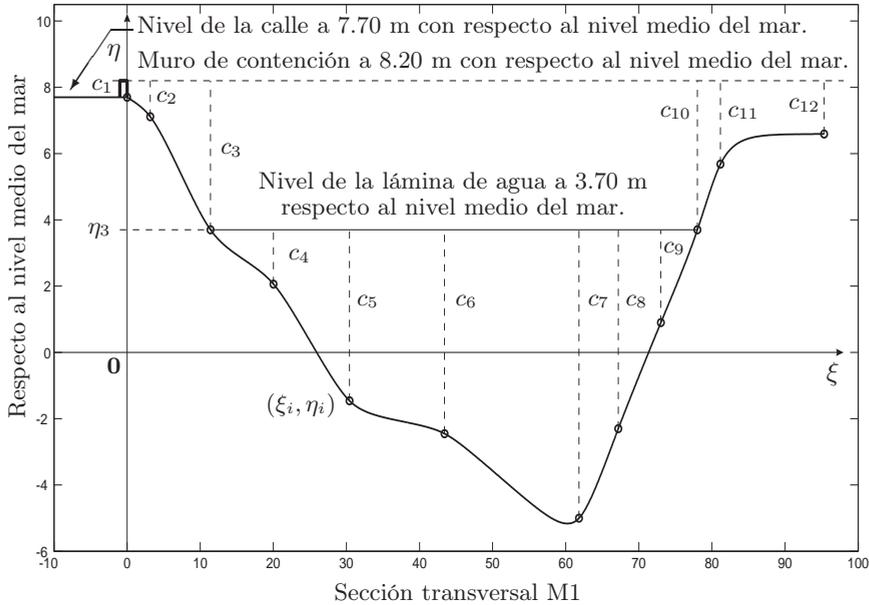


Figura 5.17: Croquis de la sección transversal M1. El bordo de contención está en el margen izquierdo del río Viejo Mezcalapa en la dirección en que fluye el agua. El nivel de la lámina de agua ($\eta_3 = 3.70$ m con respecto al nivel medio del mar) es el que se tomó el día 19 de febrero de 2011, aproximadamente a las 12.00 PM. El ajuste se realizó con el spline de tensión con parámetro $\tau = 0.5$.

Así que la ordenada del fondo de los ríos se calculó con respecto al nivel medio del mar, pues 3.70 es el nivel de la lámina de agua con respecto al nivel medio del mar, que se obtuvo en la sección M1. Los resultados gráficos que se obtuvieron en ambos tramos, se muestran en la figuras 5.21 y 5.22. En la figura 5.21, se observa que hay una variabilidad muy grande que va desde -5.00 m hasta 1.00 m sobre el nivel medio del mar; y en la figura 5.22, se observa también una gran variabilidad en el fondo del río Pichucalco que va desde -4.00 m hasta -1.60 m sobre el nivel medio del mar. La razón se debe a que en el río hay dos flujos, uno de agua y en el fondo uno de sedimento. Aunque los dos flujos interactúan, por ser el flujo de sedimento más denso, se acomoda según las presiones hidráulicas del flujo de agua.

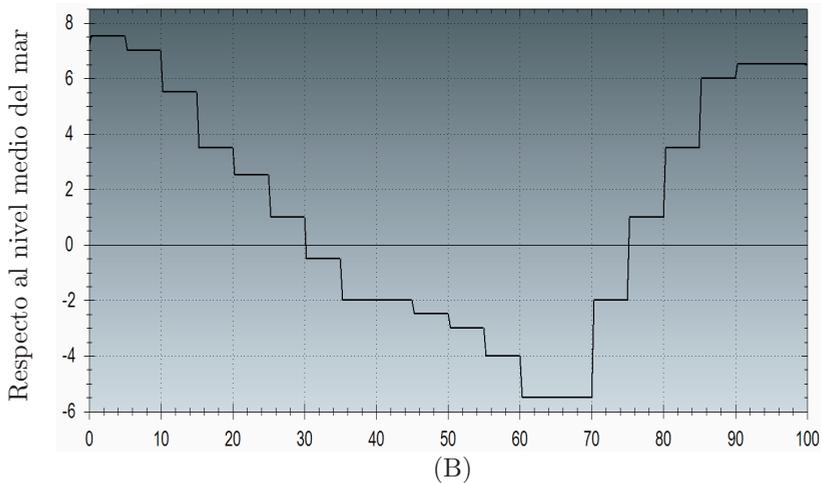
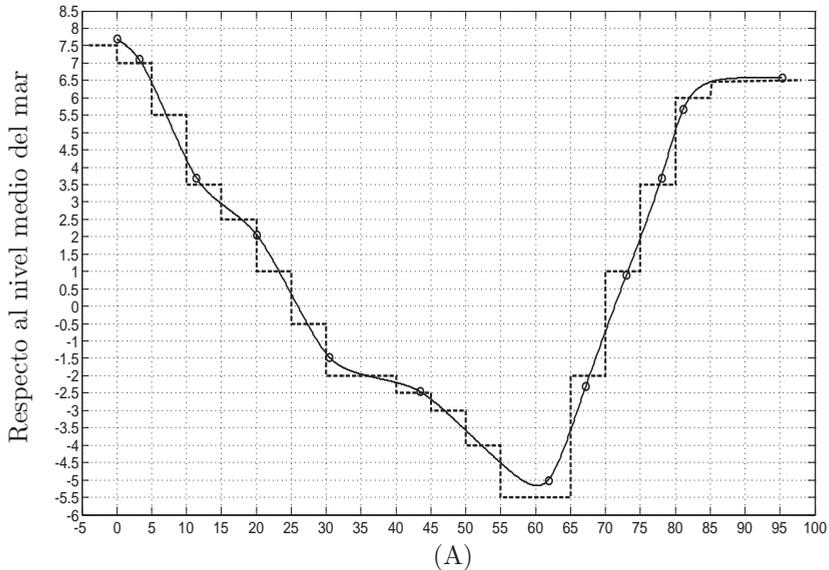


Figura 5.18: (A) La gráfica escalonada punteada que aproxima a la gráfica del spline de tensión ($\tau = 0.5$) que interpola los puntos de la tabla 5.4, es la que se utilizó para modelar el cauce del río en la sección transversal M1. La partición del eje x se hizo con tamaño de paso 5 como antes. La longitud de esta sección es de aproximadamente 95 m. (B) Resultado de la modelación de la batimetría de la sección transversal M1 sobre el dominio del fluido en base a la propuesta de la figura 5.18(A).

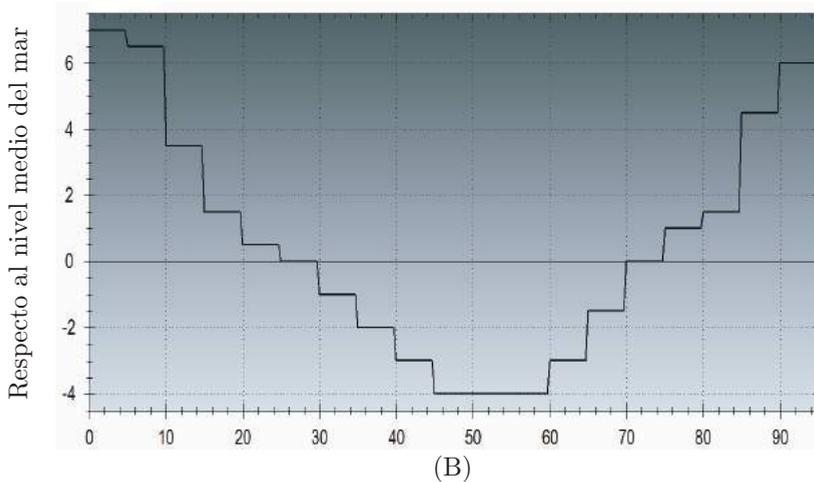
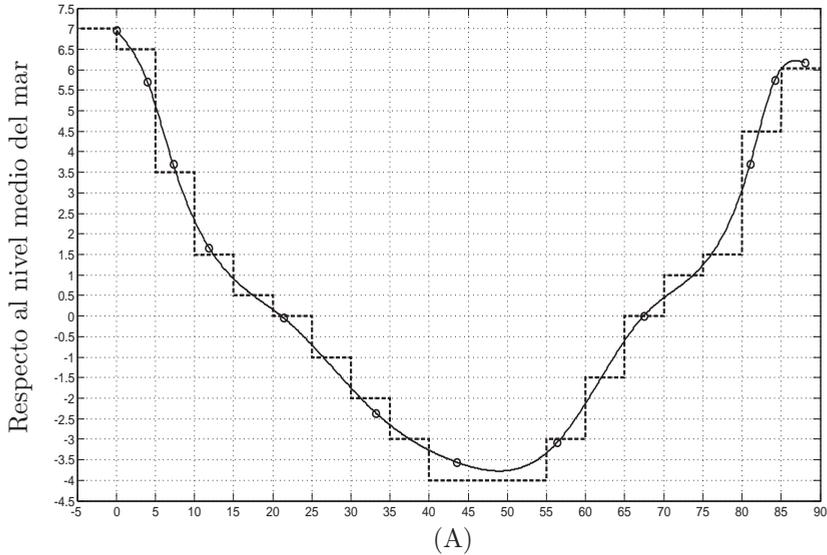


Figura 5.19: (A) La gráfica escalonada punteada que aproxima a la gráfica del spline de tensión ($\tau = 0.05$) que interpola los puntos de la sección M2 que se muestran en la tabla 5.5, es la que se utilizó para modelar el cauce del río Viejo Mezcalapa en dicha sección. La partición del eje x se hizo también con tamaño de paso 5 como antes. La longitud de esta sección es de aproximadamente 90 m. (B) Modelación de la batimetría de la sección transversal M2 del río Viejo Mezcalapa sobre el dominio del fluido en base a la propuesta de la figura 5.19(A).

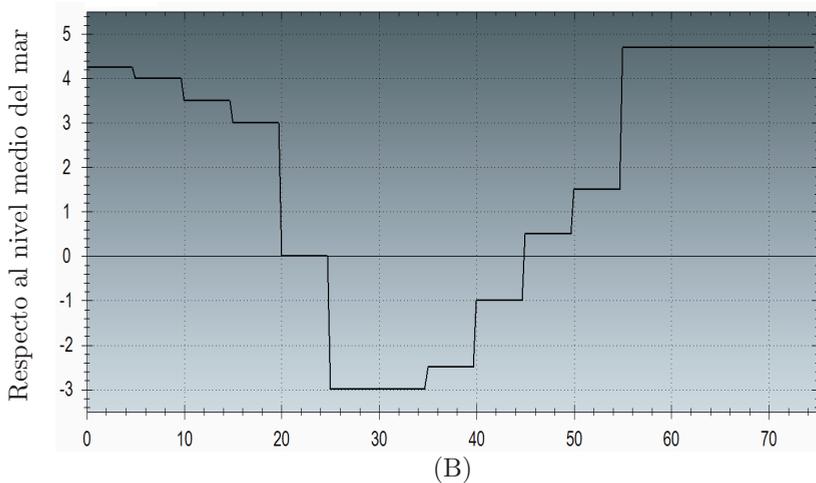
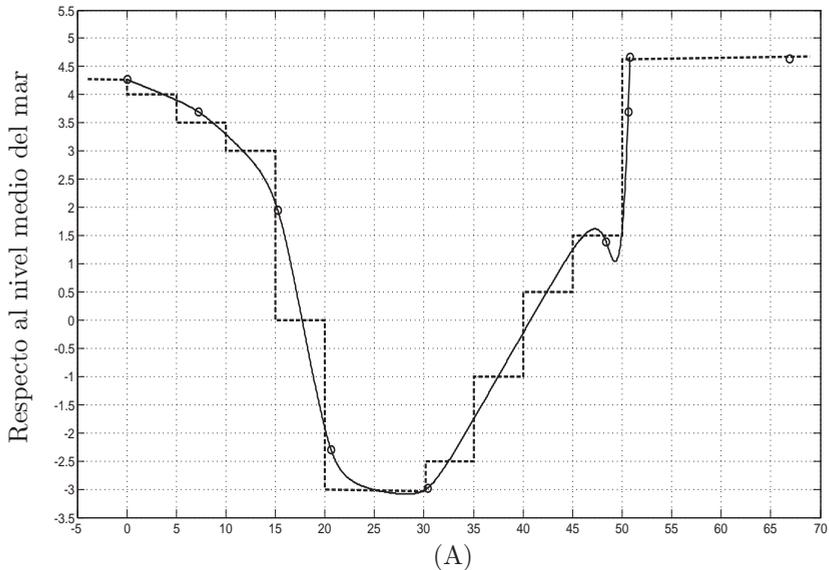


Figura 5.20: (A) La gráfica escalonada punteada que aproxima a la gráfica del spline de tensión ($\tau = 0.8$) que interpola los puntos de la sección P1 que se muestran en la tabla 5.5, es la que se utilizó para modelar el cauce del río Pichualco en dicha sección. La partición del eje x se hizo con tamaño de paso 5 como antes. La longitud de esta sección es de aproximadamente 51 m. (B) Modelación de la batimetría de la sección transversal P1 del río Pichualco sobre el dominio del fluido en base a la propuesta de la figura 5.20(A).

Así dichas presiones modifican el fondo constantemente, avanzando el flujo de sedimento más lento en comparación con el flujo de agua. Este último moldea en forma casi aleatoria el flujo de sedimento. En el entronque de los ríos Viejo Mezcalapa y Pichualco, se notó que el fondo del río Viejo Mezcalapa se levanta un muro que es el pico más alto que se observa en el lado derecho de la figura 5.21. Dicho muro es el choque de flujo de sedimento con el río Pichualco. La forma en que se disipa la energía es mediante el levantamiento del flujo de sedimento del río Viejo Mezcalapa (véase figuras 5.21 y 5.23). Dicho muro no detiene totalmente el flujo de sedimento si no que este sigue fluyendo hacia el río Pichualco. Por eso no se hace un tapón en el entronque de estos ríos.

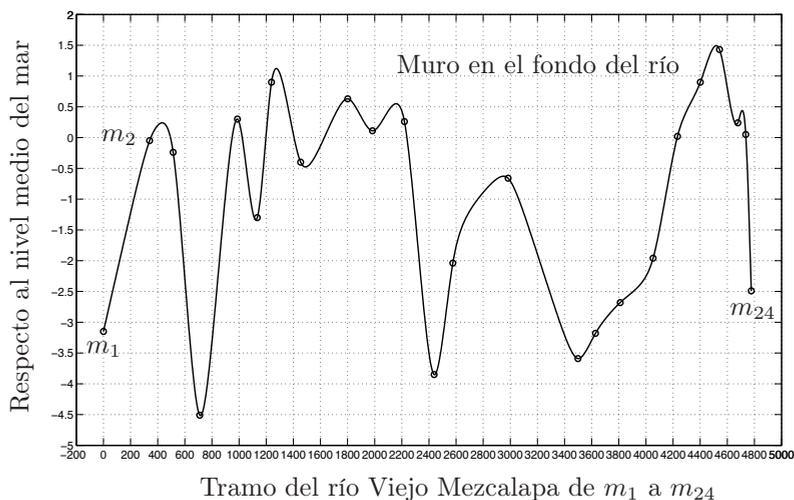


Figura 5.21: Variabilidad del fondo del río Viejo Mezcalapa interpolado con el spline de tensión con parámetro $\tau = 0.018$. Observa el muro que se eleva en el fondo del río en el entronque con el río Pichualco.

La modelación del cauce de los ríos Viejo Mezcalapa y Pichualco en los tramos donde se midieron los datos mencionados anteriormente, se hizo de manera similar a lo descrito en la sección 5.3. El resultado se presenta en siguiente sección.

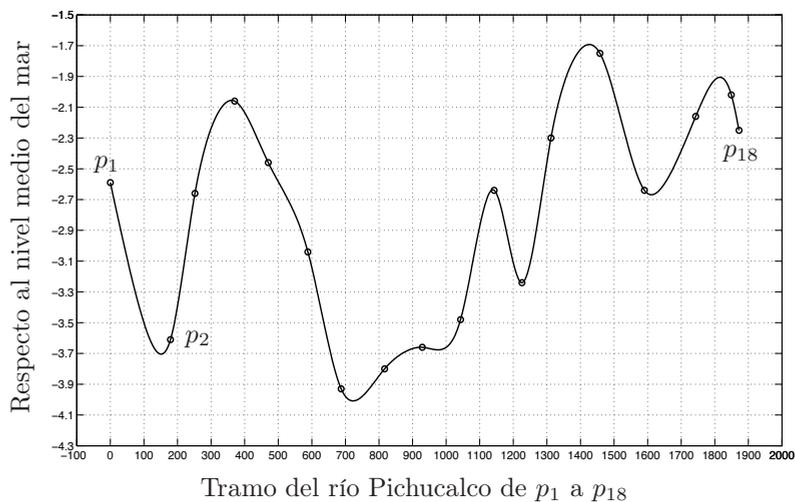


Figura 5.22: Variabilidad del fondo del río Pichucalco también interpolado con el spline de tensión con parámetro $\tau = 0.018$.

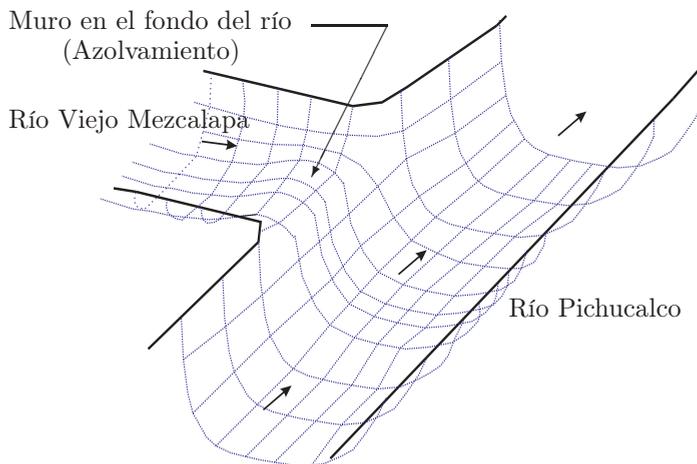


Figura 5.23: Esquematación del fondo en el entronque de los ríos Viejo Mezcalapa y Pichucalco. Observa el muro que se levanta al final del río Viejo Mezcalapa debido al choque del flujo de sedimentos en el fondo de ambos ríos.

Sección Transversal M2				
Coordenadas xy UTM			Tirante	
i	x_i	y_i	c_i	
1	507 485.2	1 985 879	0.466	
2	507 489.2	1 985 879	1.730	
3	507 492.4	1 985 878	3.729	
4	507 497	1 985 878		2.030
5	507 505	1 985 871		3.740
6	507 518	1 985 874		6.060
7	507 528	1 985 871		7.260
8	507 541	1 985 871		6.780
9	507 552	1 985 870		3.700
10	507 576	1 985 873	3.710	
11	507 569	1 985 871	1.668	
12	507 573	1 985 872	1.237	

Sección Transversal P1				
Coordenadas xy UTM			Tirante	
i	x_i	y_i	c_i	
1	508 369	1 983 130	1.692	
2	508 373	1 983 136	2.263	
3	508 375	1 983 144		1.740
4	508 374	1 983 150		6.000
5	508 378	1 983 159		6.680
6	508 393	1 983 172		2.300
7	508 394	1 983 174	2.272	
8	508 394	1 983 174.2	1.302	
9	508 404	1 983 187	1.322	

Tabla 5.3: Coordenadas xy UTM de los puntos donde se midieron las batimetrías de las secciones transversales M2 del río Viejo Mezcalapa y P1 del río Pichucalco del día 19 de febrero de 2011. En este caso, también los puntos (x_3, y_3) y (x_{10}, y_{10}) de la sección M2, corresponden a ambos extremos del río sobre el nivel de lámina de agua, por lo que los valores de los c_i , $i = 4 : 9$, son los tirantes en los puntos correspondientes; y los puntos (x_2, y_2) y (x_7, y_7) corresponden a ambos extremos del río Pichucalco en la sección P1 sobre el nivel de la lámina de agua, por lo que también los valores de los c_i , $i = 3 : 6$, son los tirantes correspondientes. Todas las medidas están en metros.

ξ_i	0	3.16	11.40	20.02	30.41	43.42	61.81
η_i	7.70	7.11	3.70	2.06	-1.46	-2.45	-5.00
ξ_i	67.19	73.01	78.00	81.15	95.34		
η_i	-2.30	0.90	3.70	5.68	6.59		

Tabla 5.4: Resultados de la batimetría de la sección transversal M1 extraídos de la tabla 5.2. El valor de $\eta_3 = 3.70$ corresponde al nivel de la lámina de agua con respecto al nivel medio del mar, $\eta = 0$ y $\xi_1 = 0$ se tomaron a partir del muro de contención que se localiza en el margen izquierdo en la dirección en que fluye el río, véase figura 5.17.

M2	ξ_i	0	4.00	7.27	11.84	21.35	33.18
	η_i	6.96	5.70	3.70	1.67	-0.04	-2.36
	ξ_i	43.54	56.37	67.40	81.02	84.18	88.08
	η_i	-3.56	-3.08	0	3.70	5.74	6.17
P1	ξ_i	0	7.21	15.23	20.62	30.36	48.37
	η_i	4.27	3.70	1.96	-2.30	-2.98	1.40
	ξ_i	50.61	50.78	66.89			
	η_i	3.70	4.67	4.65			

Tabla 5.5: Resultados de la batimetría de las secciones transversales M2 y P1 extraídos de la tabla 5.3. El valor de $\eta = 3.70$ en ambas secciones, corresponde al nivel de la lámina de agua con respecto al nivel medio del mar ($\eta = 0$), y $\xi_1 = 0$ también en ambas secciones, se tomó en el margen izquierdo en la dirección en que fluyen los ríos.

i	Coordenadas xy UTM		Tirantes	η_i
	x_i	y_i	c_i	
1	507 460	1 985 215	6.85	-3.15
2	507 675	1 985 479	3.75	-0.05
3	507 613	1 985 641	3.94	-0.24
4	507 538	1 985 822	8.21	-4.51
5	507 525	1 986 100	3.40	0.30
6	507 542	1 986 245	5.00	-1.30
7	507 582	1 986 342	2.80	0.90
8	507 735	1 986 493	4.10	-0.40
9	508 058	1 986 620	3.07	0.63
10	508 238	1 986 592	3.59	0.11
11	508 468	1 986 540	3.44	0.26
12	508 675	1 986 469	7.57	-3.85
13	508 803	1 986 417	5.74	-2.04
14	508 720	1 986 018	4.36	-0.66
15	508 415	1 985 603	7.29	-3.59
16	508 354	1 985 489	6.88	-3.18
17	508 286	1 985 320	6.38	-2.68
18	508 238	1 985 082	5.66	-1.96
19	508 359	1 984 949	3.68	0.02
20	508 492	1 984 846	2.80	0.90
21	508 625	1 984 798	2.27	1.43
22	508 755	1 984 761	3.46	0.24
23	508 813	1 984 768	3.65	0.05
24	508 853	1 984 775	6.19	-2.49

Tabla 5.6: Coordenadas xy UTM de los puntos m_i , $i = 1 : 24$, donde se midieron los tirantes c_i sobre el río Viejo Mezcalapa (véase figura 5.16), el día 19 de febrero de 2011. Aquí, η_i es la ordenada del fondo del río donde se midieron los datos y está calculada con respecto al nivel medio del mar por (5.21). Como antes las medidas están en metros.

i	Coordenadas xy UTM		Tirantes	η_i
	x_i	y_i	c_i	
1	508 334	1 983 196	6.29	-2.59
2	508 296	1 983 371	7.31	-3.61
3	508 350	1 983 420	6.36	-2.66
4	508 404	1 983 525	5.76	-2.06
5	508 397	1 983 625	6.16	-2.46
6	508 330	1 983 722	6.74	-3.04
7	508 325	1 983 821	7.63	-3.93
8	508 449	1 983 858	7.50	-3.80
9	508 516	1 983 948	7.36	-3.66
10	508 486	1 984 058	7.18	-3.48
11	508 481	1 984 158	6.34	-2.64
12	508 520	1 984 231	6.94	-3.24
13	508 596	1 984 272	6.00	-2.30
14	508 725	1 984 340	5.45	-1.75
15	508 813	1 984 439	6.34	-2.64
16	508 869	1 984 581	5.86	-2.16
17	508 872	1 984 687	5.72	-2.02
18	508 870	1 984 710	5.95	-2.25

Tabla 5.7: Coordenadas xy UTM de los puntos p_i , $i = 1 : 18$, donde se midieron los tirantes c_i sobre el río Pichucalco (véase figura 5.16), el día 19 de febrero de 2011. También en este caso, η_i es la ordenada del fondo del río donde se midieron los datos y está calculada con respecto al nivel medio del mar por (5.21). Como antes las medidas también están en metros.

5.5. Producto final

A continuación se presenta el producto más importante de este capítulo que es la modelación del cauce de los ríos Viejo Mezcalapa, Pichucalco, La Sierra y Grijalva, en el dominio de interés. Así mismo se ajustaron las irregularidades obvias descritas en la sección 5.1. En este terreno final es donde se realizarán las simulaciones numéricas en el próximo capítulo.



Figura 5.24: Producto final que se obtuvo en este capítulo, y que será el dominio del fluido donde se realizarán las simulaciones numéricas en el Capítulo 6 próximo.

Capítulo 6

Simulación de una Inundación de Villahermosa

En este capítulo se hace uso del producto que se obtuvo en el Capítulo 5, que fue el ajuste de la batimetría del río Grijalva y sus afluentes en la zona de interés, para realizar los siguientes experimentos numéricos:

Experimento 1. Generar una situación aproximada que se tuvo en la zona de interés del día 1 de octubre de 2007.

Experimento 2. Mostrar un escenario aproximado de la inundación que sufrió la ciudad de Villahermosa, Tabasco, en la zona de interés durante el mes de octubre de 2007, en particular, de los días 23, 28, 29, 30 y 31 de octubre.

Para ello se hará uso de la información que la Dirección Local de Tabasco de la CONAGUA proporciona en las estaciones hidrométricas Pueblo Nuevo, Gaviotas, Porvenir y González. La ubicación de estas estaciones se muestran en la figura 6.1.



Figura 6.1: Ubicación de las estaciones hidrométricas donde se han registrado las mediciones del caudal y nivel del agua en los ríos La Sierra, Grijalva y Carrizal, que son de interés para la simulación numérica.

6.1. Experimento 1

Para generar una situación aproximada a la que se tuvo en la zona de interés el día 1 de octubre de 2007, se utilizarán los datos que se muestran en la tabla 6.1 y que son los que reporta la Dirección Local de Tabasco de la CONAGUA [13].

6.1.1. Condiciones iniciales y de contorno

Con el propósito de generar una simulación numérica que reproduzca aproximadamente la situación del día 1 de octubre de 2007 con el software GUADFlow 2D, se hará uso del terreno final (véase figura 5.24) que se obtuvo en el Capítulo 5, y el coeficiente de rugosidad de Manning

Estación Pueblo Nuevo	nivel:	4.84
	gasto:	266
Estación Gaviotas	nivel:	3.18
	gasto:	316
Estación González	nivel:	5.17
	gasto:	211

Tabla 6.1: Datos del día 1 de octubre de 2007 en las estaciones hidrométricas. El nivel que está en msnm se refiere al nivel del agua que tenían los ríos con respecto al nivel medio del mar, de hecho msnm significa metros sobre el nivel del mar. Cortesía de la Dirección Local de Tabasco de la CONAGUA [13].

dado por

$$n(x, y) = 0.03 \quad \text{para todo } (x, y) \in \Omega$$

y que fue validado por Cruz-Vázquez (2012) [16].

Condiciones de contorno aguas arriba

Éstas se especificaron en las entradas de los ríos Viejo Mezcalapa, Pichucalco, La Sierra y Carrizal, como se muestra en la figura 6.2. Los hidrogramas $Q(t)$ correspondientes se muestran en la figura 6.3. Éstas inician desde 0 y crecen gradualmente hasta alcanzar la situación aproximada que tenían los ríos el día 1 de octubre de 2007, de acuerdo con los datos de la tabla 1.1 del Capítulo 1.

Condiciones de contorno aguas abajo

Ésta se especificó en la salida del río Grijalva como se muestra en la figura 6.2, con la condición de vertedero con una cota superior de 2.50 m sobre el nivel medio del mar, con el propósito de impedir que saliera todo el agua que llegaba y con ello permitir que se llenara el río. Más detalles en el Capítulo 1.

Condiciones iniciales

Como se dijo en el Capítulo 1 éstas se iniciaron en seco.

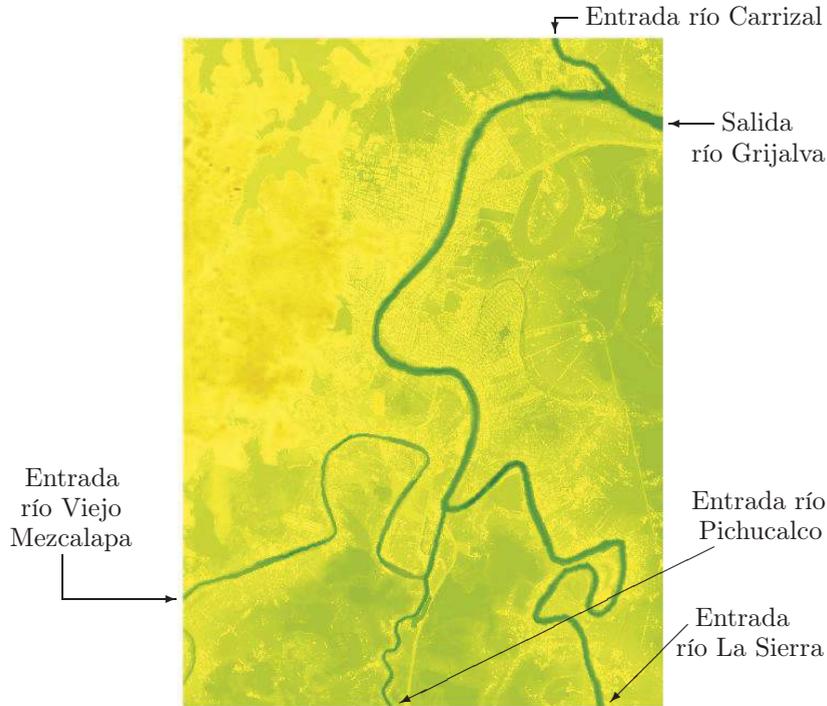


Figura 6.2: Las condiciones de contorno aguas arriba para la simulación se especificaron en las entradas de los ríos Viejo Mezcalapa, Pichucalco, La Sierra y Carrizal.

6.1.2. Triangulación y terreno interpolado con GUAD-Flow 2D

Para generar la triangulación del terreno se tomó un error máximo de cota de 0.20 m y lado máximo de triángulo de 20 m. Con estos parámetros se genera una malla de 1 287 574 nodos y 2 571 162 triángulos. Una sección del terreno triangulado se muestra en la figura 6.4. El terreno interpolado se muestra en la figura 6.5. La comparación entre el terreno inicial y el interpolado en una sección transversal del río La Sierra, con la cota máxima de error de 0.20 m, se muestra en la figura 6.6. Como puede observarse la diferencia entre ambos es razonablemente pequeño.

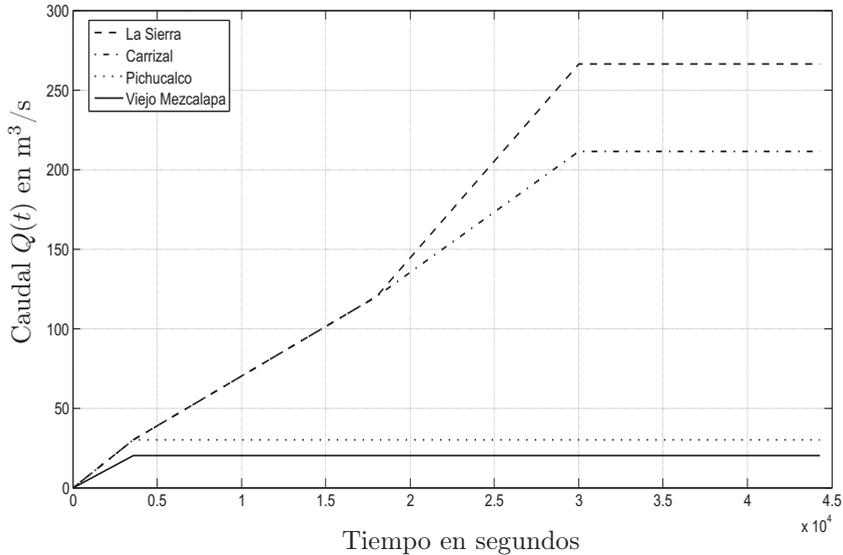


Figura 6.3: Hidrogramas $Q(t)$ que especifican las condiciones de contorno aguas arriba de los ríos Viejo Mezcalapa, Pichualco, La Sierra y Carrizal de acuerdo con la figura 6.2. El intervalo de tiempo es de 0 a 43 200 segundos, equivalente a 12 horas de simulación.

6.1.3. Situación aproximada del 1 de octubre de 2007

Después de 9 horas de simulación, GUADFlow 2D alcanzó la estabilidad y se mantuvo durante 3 horas de simulación. La estabilidad corresponde a la situación aproximada de los ríos del día 1 de octubre de 2007. Los resultados se muestran en las figuras 6.7(A) y 6.7(B). En la figura 6.7(B) se observa que el nivel que alcanzó el agua en la estación hidrométrica Gaviotas es aproximadamente 3.18 m sobre el nivel medio del mar, que coincide con el dato reportado en la tabla 6.1.

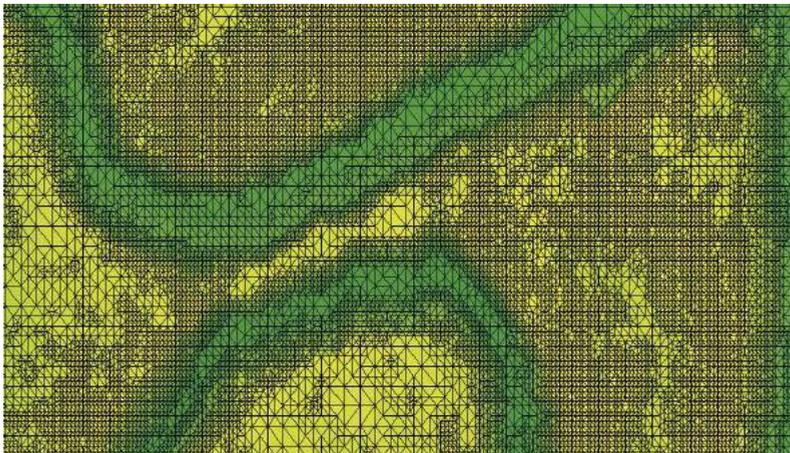


Figura 6.4: Visualización de la discretización de una parte del dominio con elementos triangulares.

6.2. Experimento 2

Como se dijo antes, este experimento consiste en generar un escenario aproximado de la inundación que ocurrió en la ciudad de Villahermosa, Tabasco, por el desborde del río Grijalva en la zona de interés durante a finales del mes de octubre de 2007.

6.2.1. Condiciones iniciales y de contorno

Condiciones de contorno aguas arriba

Los hidrogramas de entrada $Q(t)$ de los ríos Viejo Mezcalapa, Pichucalco, La Sierra y Carrizal, se muestran en la figura 6.8. Éstos inician con caudales desde $20 \text{ m}^3/\text{s}$, $30 \text{ m}^3/\text{s}$, $266 \text{ m}^3/\text{s}$ y $211 \text{ m}^3/\text{s}$, respectivamente, y crecen gradualmente hasta alcanzar los caudales reportados de los días 23, 28, 29, 30 y 31 de octubre de 2007 de acuerdo con los datos de la tabla 1.2 del Capítulo 1.



Figura 6.5: Terreno interpolado con una cota máxima de error de 0.20 m.

Condiciones de contorno aguas abajo

El hidrograma de salida $Q(t)$ del río Grijalva en la zona de interés se muestra en la figura 6.9. Paralelo a las condiciones de contorno aguas arriba, ésta inicia con un caudal de $389 \text{ m}^3/\text{s}$ y crece linealmente pasando por los caudales reportados de los días 23, 28, 29, 30 y 31 de octubre de 2007 de acuerdo con los datos de la tabla 1.3 del Capítulo 1.

Condiciones iniciales

Estas corresponden a las condiciones de estabilidad que alcanzó el modelo en el experimento 1 y es la que se muestra en la figura 6.7.

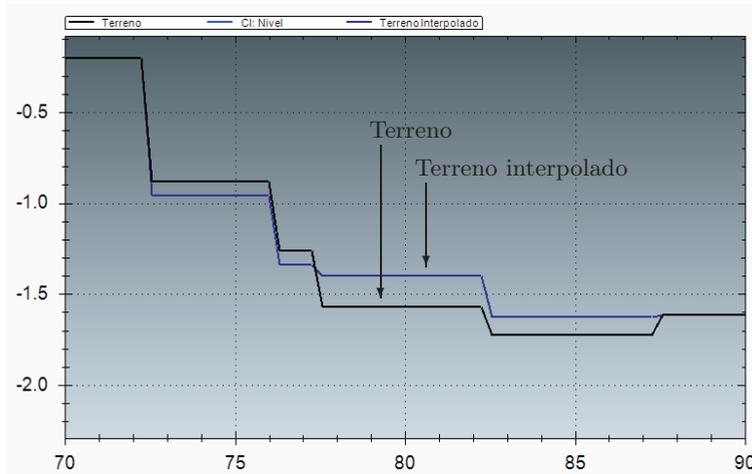


Figura 6.6: Comparación entre el terreno inicial e interpolado en una sección transversal del río La Sierra, con una cota máxima de error de 0.20 m.

6.2.2. Resultados de la simulación numérica

Se reportan resultados de la simulación numérica cada 24 horas, que corresponden a la situación aproximada que se tuvo en los días 23, 28, 29, 30 y 31 de octubre de 2007 en las figuras 6.10 al 6.14. En la tabla 6.2, se muestra la altura que alcanzó el agua (tirante) en cinco puntos de interés, en particular se compara con el nivel del agua en el río Grijalva que reporta la Dirección Local en Tabasco de la CONAGUA en la estación hidrométrica Gaviotas [13]. El error cometido en los resultados de la simulación con respecto a los datos que reporta CONAGUA en dicha estación son razonables, lo que muestra la exactitud de los resultados obtenidos. Sin embargo, es conveniente decir que el nivel que alcanzó el agua en la simulación en los días 30 y 31 están sobre estimados con respecto a los datos de la CONAGUA, debido a que en el experimento no se está considerando el flujo de agua en la frontera del dominio, salvo en la entrada y salida de los ríos. Esto probablemente provocó que se acumulara más agua en el dominio, y por consiguiente su nivel subió más de lo que realmente alcanzó.

Oct. 2007	Nivel en Gaviotas (msnm)			Tirante en puntos de interés				
	CONAGUA	Sim.	Error %	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
día 23	5.41	5.70	5.36	3.42	0.77	0	0	0
día 28	6.27	5.60	10.69	3.50	3.95	1.14	0	0
día 29	6.54	6.12	6.42	4.27	4.40	3.83	1.86	0
día 30	6.77	7.75	14.48	5.55	5.58	5.53	3.55	2.57
día 31	7.15	9.02	26.15	6.71	6.74	6.70	4.72	4.69

Tabla 6.2: Resultados de la simulación numérica. El error en la comparación del nivel que alcanzó el agua en la simulación con el nivel que reporta la Dirección Local en Tabasco de la CONAGUA, en la estación hidrométrica Gaviotas [13], es razonablemente bueno; lo que muestra la exactitud de los resultados de la simulación numérica. Como se dijo antes, la sobre estimación del nivel del agua en los dos últimos días es debido a que no se está considerando el flujo del agua en la frontera del dominio, salvo en la entrada y salida de los ríos. También se muestra la altura (tirante) que alcanzó el agua en la simulación numérica en 5 puntos de interés, mismos que se muestran en las figuras 6.10 al 6.14.

6.3. Conclusiones

Se logró el propósito de modelar la batimetría de los ríos Viejo Mezcalapa, Pichucalco, La Sierra y Grijalva, en la zona de interés limitada por la ortofoto E15D11A2 y parte de la ortofoto E15B81D4 (véase la figura 5.24), ajustando la base de Datos Tipo Superficie del INEGI.

También se alcanzó el objetivo de simular numéricamente la inundación de la ciudad de Villahermosa, por el desborde del río Grijalva en la zona de interés, y que reproduce aproximadamente la situación que se vivió en la ciudad a finales de octubre de 2007. En particular, la simulación del quinto día reproduce un escenario aproximado de la situación que se vivió el día 31 de octubre de 2007 (véase la figura 6.14), casi el 70% de nuestra zona de interés está bajo el agua, y esta situación es lo que ocurrió no solamente en la ciudad de Villahermosa, sino en todo el Estado de Tabasco. El nivel que alcanzó el agua en la simulación numérica

en el río Grijalva frente a la estación hidrométrica Gaviotas fue aproximadamente de 9.02 msnm, mientras que su nivel crítico es de 5.42 m y su nivel máximo es de 7.85 m [14]. Es decir, el agua subió 3.60 m por encima del nivel crítico y 1.17 m por encima del nivel máximo.

Es muy importante resaltar que en este experimento numérico, únicamente se consideró una pequeña parte del río Carrizal (véase por ejemplo la figura 6.10) y aún con eso, se inunda la ciudad de Villahermosa por el desborde del río Grijalva, por lo que ante otro evento extremo como el de 2007, *es muy probable que el centro de la ciudad de Villahermosa se vuelva a inundar.*

Para obtener diagnósticos más precisos sobre la inundación de la ciudad de Villahermosa ante eventos extremos como el de 2007, se recomienda:

1. Estimar periodos de retorno de 6, 12, 25, 50, 100 y hasta 500 años, de los caudales que cruzan en las estaciones hidrométricas: Pueblo Nuevo, Gaviotas, González y Porvenir.
2. Incorporar los puentes, mejorar la topografía urbana y ampliar el dominio del fluido a toda la ciudad de Villahermosa, Tabasco.
3. Definir escenarios de simulación numérica para cada uno de los periodos de retorno, es decir, definir lo más razonable posible los hidrogramas de entrada de los ríos Viejo Mezcalapa, Pichucalco, La Sierra y Carrizal, así como el hidrograma de salida del río Grijalva en la zona de interés.
4. Generar un fichero con coeficientes de rugosidad de Manning en la zona de interés (en este trabajo se consideró constante este coeficiente en el dominio de interés).
5. Realizar experimentos numéricos de cada uno de los escenarios definidos en el punto 3 para cada uno de los periodos de retorno.

6. Elaborar un mapa de riesgo (peligrosidad) de inundación de la ciudad de Villahermosa en base a los resultados de los experimentos numéricos.

Una vez alcanzado el propósito de replicar la inundación de 2007 con la simulación numérica y con una tolerable aproximación, se dice que el modelo numérico está validado. Este modelo validado se puede utilizar para realizar hipótesis varias, tales como: modelar obras de protección, elaborar mapas de riesgo, simular diferentes grados de inundación, simular bloqueo de los ríos por elevación del mar, entre muchas otras.

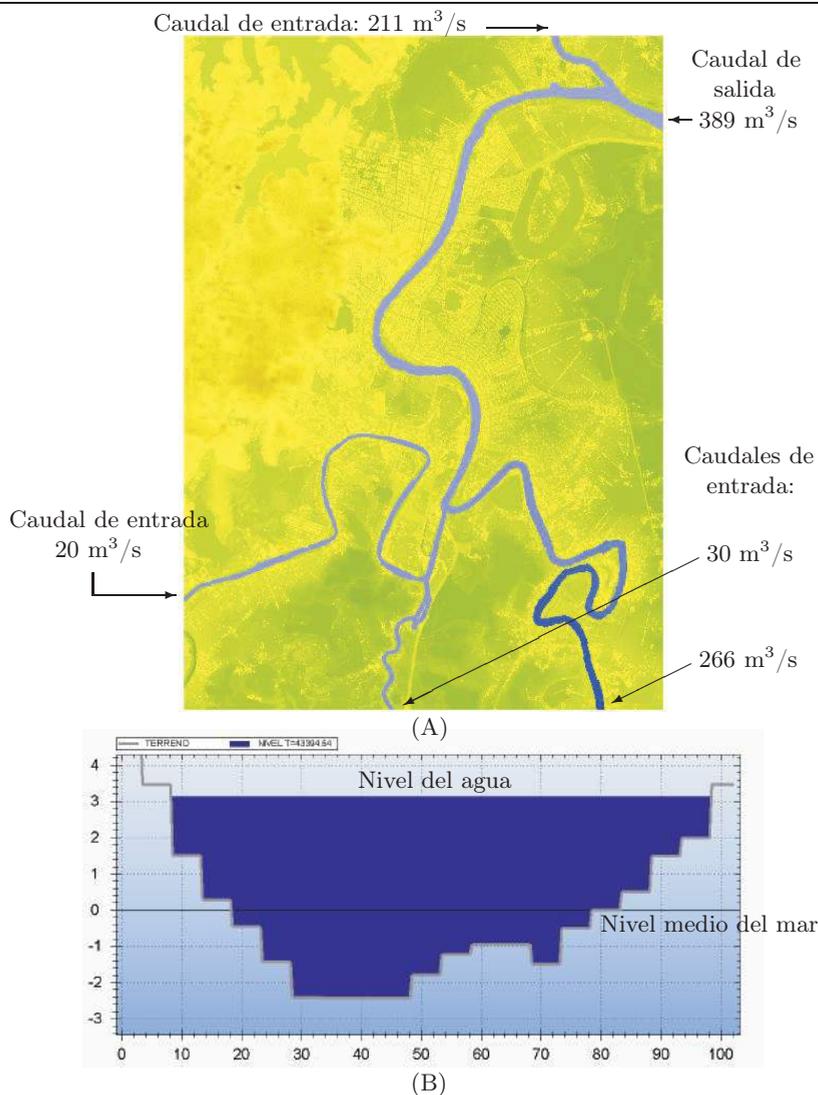


Figura 6.7: (A) Situación aproximada del día 1 de octubre de 2007. La estabilidad de los ríos corresponden a los caudales que reporta la Dirección Local en Tabasco de la CONAGUA para esa fecha (véase la tabla 6.1). El caudal del río La Sierra en la entrada de la zona de interés es el que se reporta en la estación hidrométrica Pueblo Nuevo, el caudal de entrada del río Carrizal es el que reporta en la estación hidrométrica González y el caudal de salida del río Grijalva es el que se reporta en la estación hidrométrica Porvenir. La suma de los caudales de entrada de los ríos Viejo Mezcalapa, Pichualco y La Sierra es el que se reporta en la estación hidrométrica Gaviotas. (B) Nivel de estabilidad que alcanzó el agua en el río Grijalva en la estación hidrométrica Gaviotas, que es aproximadamente de 3.18 msnm y que coincide con el dato que se reporta en la tabla 6.1.

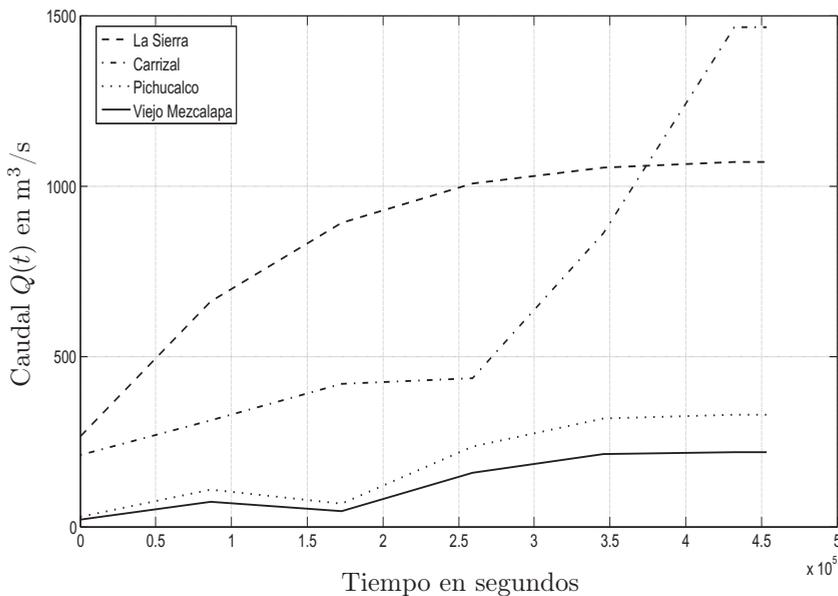


Figura 6.8: Hidrogramas de entrada $Q(t)$ de los ríos Viejo Mezcalapa, Pichucalco, La Sierra y Carrizal sobre el intervalo de tiempo de 0 a 453 600 segundos equivalente a 5 días con 6 horas de simulación. Estos inician con $20 \text{ m}^3/\text{s}$, $30 \text{ m}^3/\text{s}$, $266 \text{ m}^3/\text{s}$ y $211 \text{ m}^3/\text{s}$, respectivamente, y crecen gradualmente pasando por los caudales reportados de los días 23, 28, 29, 30 y 31 de octubre de 2007, cada 24 horas, de acuerdo con los datos de la tabla 1.2 del Capítulo 1.

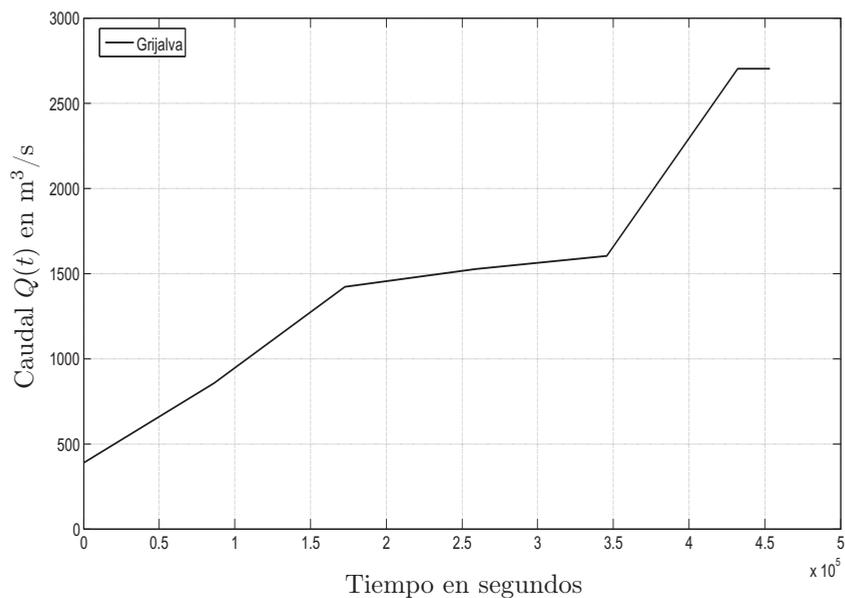
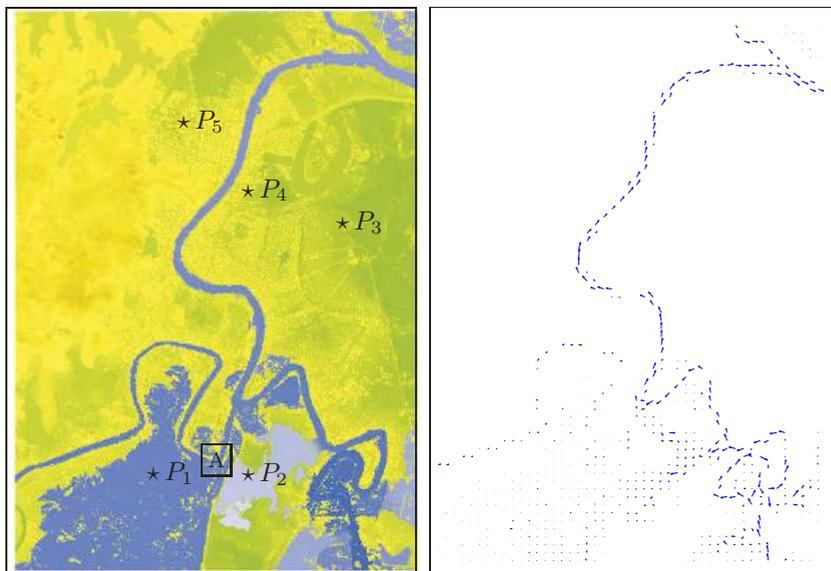
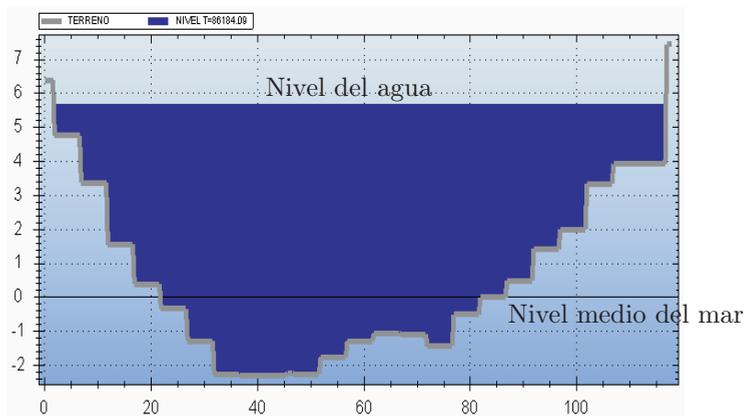


Figura 6.9: Hidrograma de salida $Q(t)$ del río Grijalva sobre el intervalo de tiempo de 0 a 453 600 segundos equivalente a 5 días con 6 horas de simulación. Inicia con 389 m^3/s y crece linealmente pasando por los caudales reportados de los días 23, 28, 29, 30 y 31 de octubre de 2007, cada 24 horas, de acuerdo con los datos de la tabla 1.3 del Capítulo 1.



(A)

(B)



(C)

Figura 6.10: (A) Primer día de simulación que representa un escenario aproximado del día 23 de octubre de 2007. Se visualiza el desborde de los ríos Viejo Mezcalapa, Pichucalco, La Sierra y comienza a desbordarse el río Grijalva. (B) Campo de velocidad que muestra la dirección en que está avanzando el agua. (C) El nivel del agua en el río Grijalva en la estación hidrométrica Gaviotas es de 5.70 msnm aproximadamente, mientras que su nivel crítico es de 5.42 m y su nivel máximo es de 7.85 m [14].

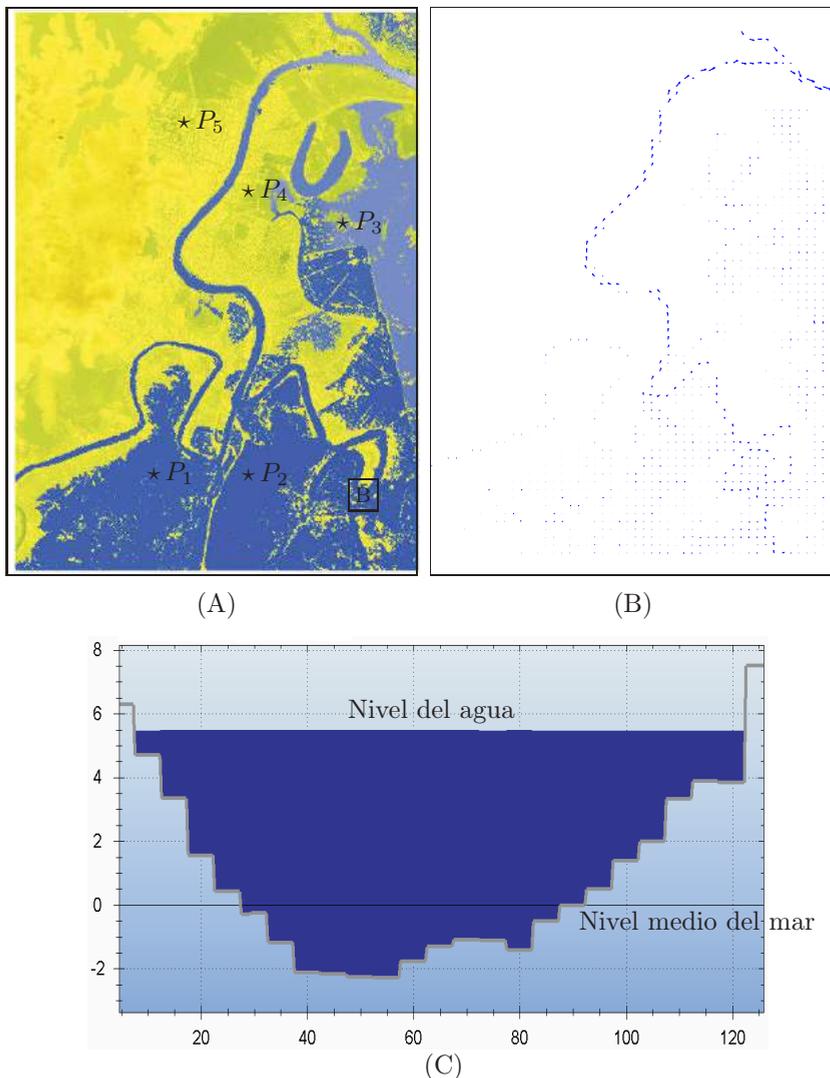
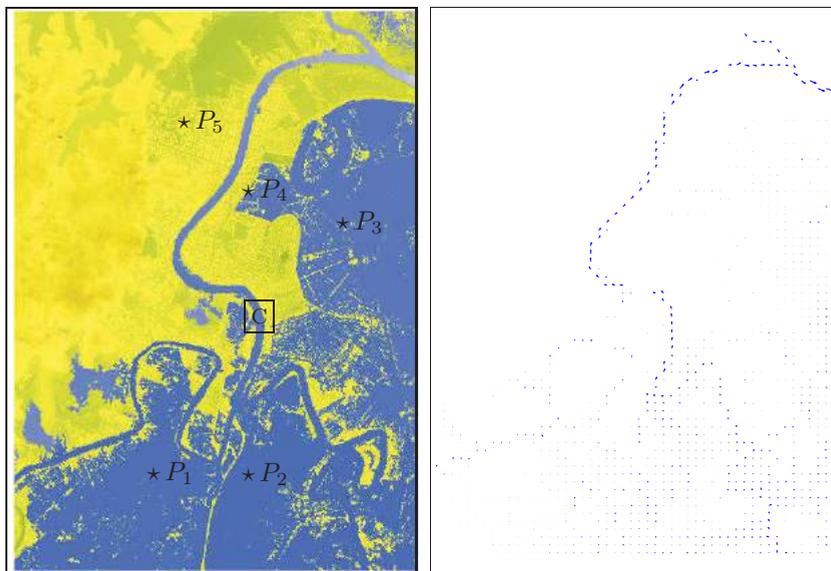
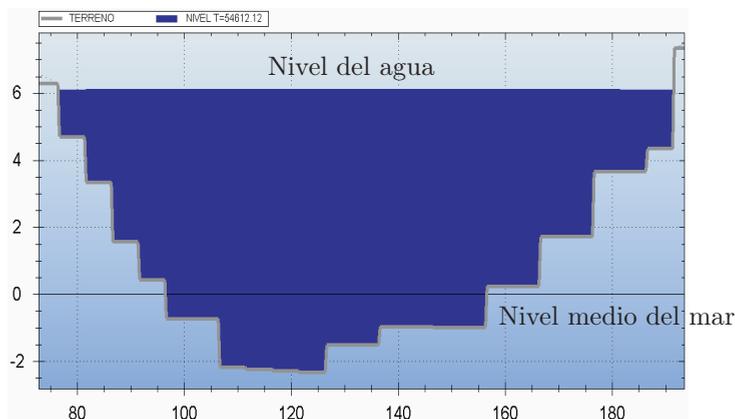


Figura 6.11: (A) Segundo día de simulación que representa un escenario aproximado del día 28 de octubre de 2007. Avanza el desborde del río Grijalva, pero sobre todo el desborde del río La Sierra inunda toda la Colonia Gaviotas Sur y La Manga. (B) Campo de velocidad que muestra la dirección en que está avanzando el agua. (C) El nivel del agua en el río Grijalva en la estación hidrométrica Gaviotas es aproximadamente 5.60 msnm, mientras que su nivel crítico es de 5.42 m y su nivel máximo es de 7.85 m [14].



(A)

(B)



(C)

Figura 6.12: (A) Tercer día de simulación que representa un escenario aproximado del día 29 de octubre de 2007. La zona limitada por los ríos Viejo Mezcalapa, Pichucalco y La Sierra se ha llenado totalmente de agua. Avanza la inundación en las colonias La Manga y Gaviotas Norte. (B) Campo de velocidad que muestra la dirección en que está avanzando el agua. (C) El nivel del agua en el río Grijalva en la estación hidrométrica Gaviotas es de 6.12 msnm aproximadamente, mientras que su nivel crítico es de 5.42 m y su nivel máximo es de 7.85 m [14].

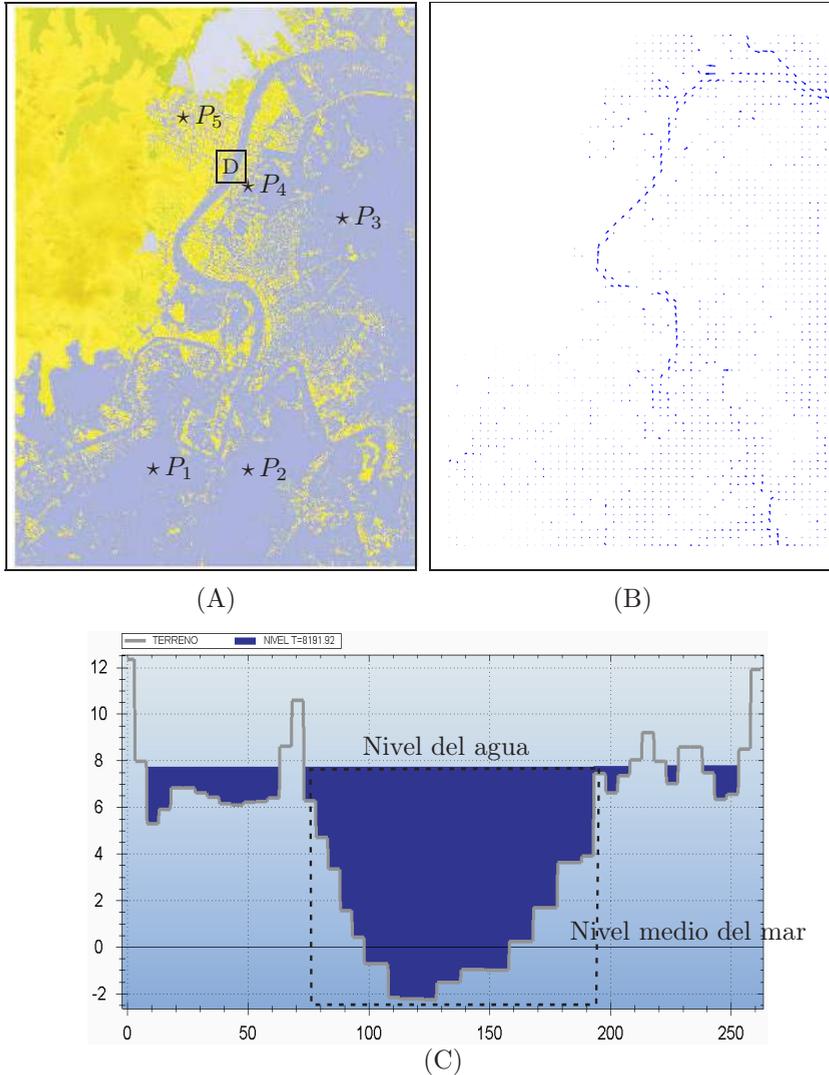
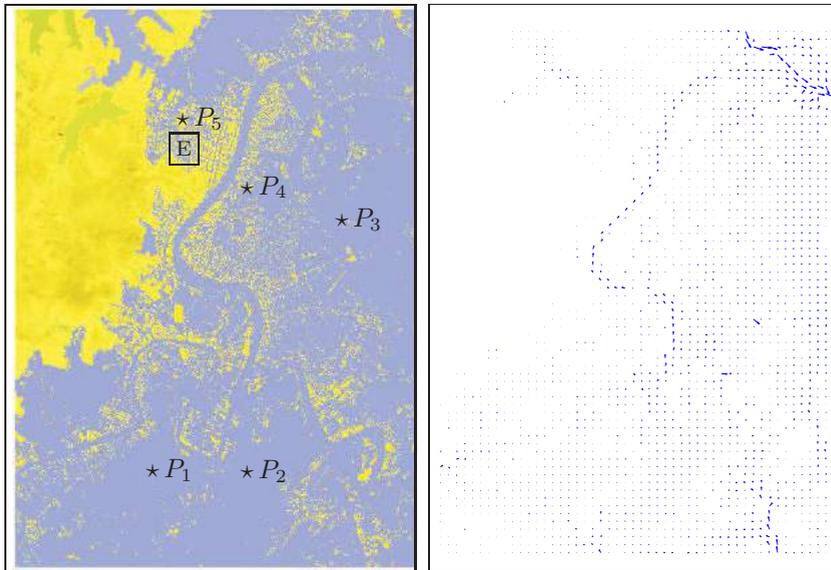
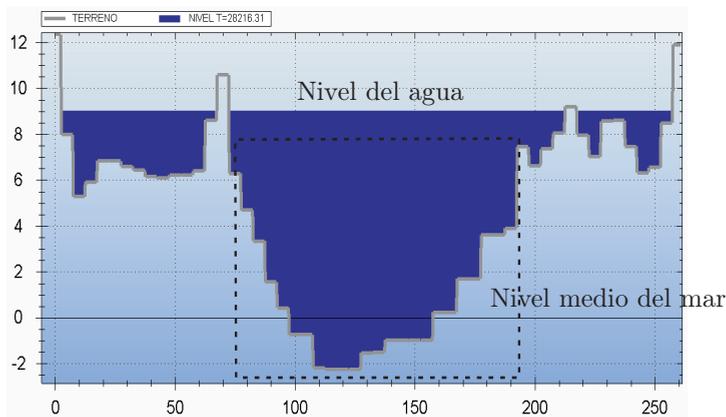


Figura 6.13: (A) Cuarto día de simulación que representa un escenario aproximado del día 30 de octubre de 2007. Las colonias La Manga, Gaviotas Sur y Gaviotas Norte están a más de 3.50 m bajo el agua. Lo más dramático es el desborde del río Grijalva hacia el centro de la ciudad Villahermosa, donde al agua alcanza en el punto P_5 una altura de casi 2.50 m. (B) Campo de velocidad que muestra la dirección en que está avanzando el agua. (C) El nivel del agua en el río Grijalva en la estación hidrométrica Gaviotas es aproximadamente 7.75 msnm, mientras que su nivel crítico es de 5.42 m y su nivel máximo es de 7.85 m [14]. Se observa el desborde de este río hacia las zonas aledañas.



(A)

(B)



(C)

Figura 6.14: (A) Quinto día de simulación numérica que representa un escenario aproximado del día 31 de octubre de 2007. Es sorprendente ver que casi el 70 % de nuestra zona de interés está bajo el agua, y esta situación es lo que ocurrió no solamente en la ciudad de Villahermosa, sino en todo el Estado de Tabasco. (B) Campo de velocidad que muestra la dirección en que está avanzando el agua. (C) El nivel del agua en el río Grijalva en la estación hidrométrica Gaviotas es de 9.02 msnm aproximadamente, mientras que su nivel crítico es de 5.42 m y su nivel máximo es de 7.85 m [14]. Se sigue incrementando la inundación hacia las zonas aledañas de la estación hidrométrica Gaviotas.

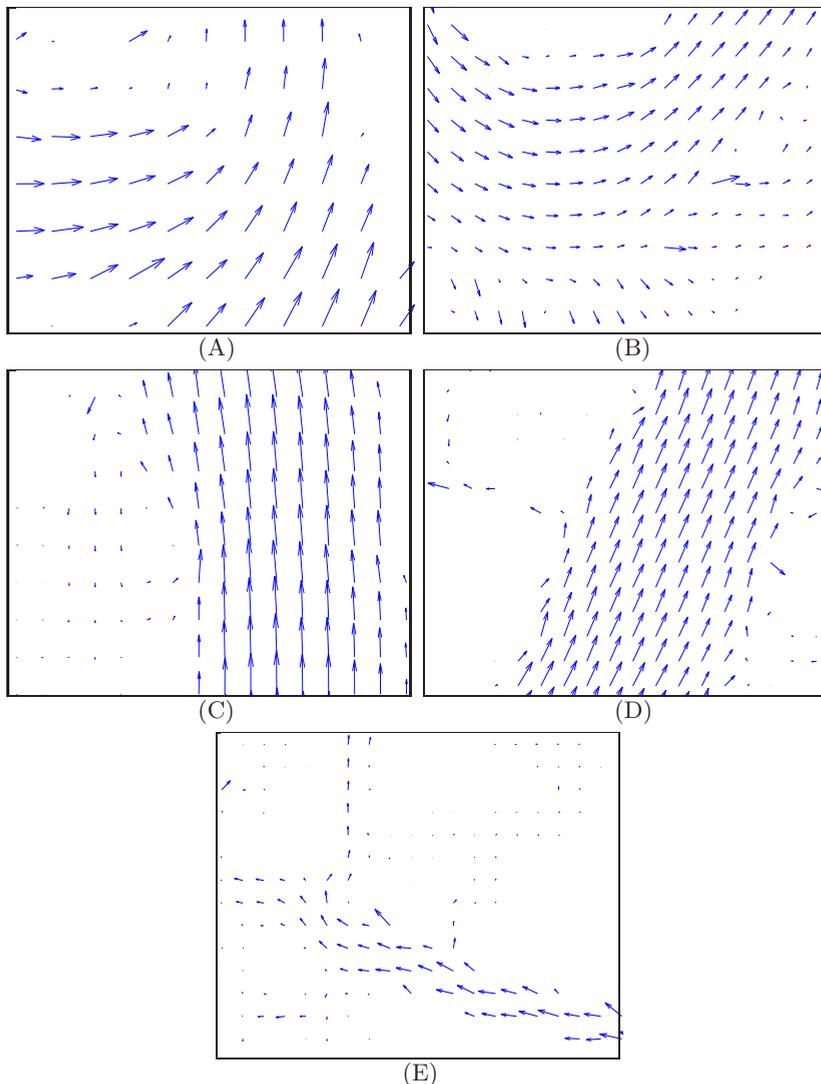


Figura 6.15: Ampliación del campo de velocidad en cinco sectores del dominio. En cada sector, se muestra la dirección en que va avanzando el agua. (A) Dirección del agua en la confluencia de los ríos Viejo Mezcalapa y Pichucalco (figura 6.10(A)) del primer día de simulación. (B) Desborde del río La Sierra en el segundo día de simulación, en el sector que se indica en la figura 6.11(A). (C) Desborde del río Grijalva por la estación hidrométrica Gaviotas (figura 6.12(A)). (D) Dirección del desborde del río Grijalva sobre la Av. Coronel Gregorio Méndez Magaña (figura 6.13(A)). (E) Avance del agua entre las avenidas Coronel Gregorio Méndez Magaña y Francisco Javier Mina, y entre las calles Eusebio Castillo y Andrés Sánchez Magallanes, en el centro de la ciudad de Villahermosa (véase figura 6.14(A)).

Apéndice A

Glosario de Términos

Anisotropía e isotropía. La anisotropía es una propiedad general de la materia según la cual determinadas propiedades físicas como elasticidad, temperatura, conductividad, velocidad de propagación de la luz, entre otras, varían según la dirección en que son examinadas. La isotropía es lo opuesto a la anisotropía y es la característica de los cuerpos cuyas propiedades físicas no dependen de la dirección en que son examinadas.

Caída hidráulica. Este fenómeno ocurre cuando hay un cambio rápido en la profundidad de un flujo de nivel alto a un nivel bajo, la cual resultará en una depresión abrupta de la superficie del agua. Por ejemplo, en un canal este fenómeno es consecuencia de un cambio brusco de pendiente o de la sección transversal del canal. En la región de transición de la caída, suele aparecer una curva invertida que conecta las superficies del agua antes y después de dicha caída. El punto de inflexión de la curva, indica la posición aproximada de la profundidad crítica para la cual la energía es mínima y el flujo pasa de ser subcrítico a supercrítico.

Caudal. También se dice **gasto** y es el volumen de fluido que circula por unidad de tiempo en una sección transversal de la corriente.

Su formulación más simples es

$$Q = Av$$

donde A es el área de la sección transversal que atraviesa el flujo con velocidad uniforme v . En el caso de cuencas de ríos o arroyos, los caudales generalmente se expresan en “metros cúbicos por segundo o miles de metros cúbicos por segundo”. Varían en el tiempo y en el espacio y esta evolución se puede representar por medio de hidrogramas. El caudal de un río es fundamental para el diseño de presas, embalses y obras de control de avenidas. Dependiendo del tipo de obra, se emplean los caudales medios diarios, con un determinado tiempo de recurrencia o tiempo de retorno, o los caudales máximos instantáneos. Los caudales medios diarios se pueden obtener a partir de los valores registrados en una estación de hidrométrica, durante un número considerable de años, mientras que para los caudales máximos instantáneos, frecuentemente se deben calcular a través de modelos matemáticos.

Coefficiente de Manning. En 1889 el Ing. irlandés Robert Manning propuso una fórmula para el cálculo de la velocidad media del flujo en canales abiertos y tuberías, que en forma simplificada resulta ser

$$v(h) = CR_h^{2/3} \sqrt{S}$$

donde v es la velocidad media del flujo, C es un factor de resistencia al flujo, R_h el radio hidráulico que está en función del tirante hidráulico h y S la pendiente de la línea de agua (línea de corriente que está en contacto con el aire). Esta fórmula fue modificada por otros autores y expresada en términos del Sistema Internacional de Magnitudes como

$$v(h) = \frac{1}{n} R_h^{2/3} \sqrt{S}$$

donde n se le llama el coeficiente de rugosidad de Manning [37].

En una primera aproximación se puede usar un valor constante de n para todo el cauce de un río bajo estudio o bien diferenciando áreas con distintas características. Los valores globales van desde un mínimo de 0.025 (ríos rectos y limpios) hasta un máximo de 0.075 (ríos meandrosos y con maleza) [36]. Por ejemplo, el Servicio Geológico de Estados Unidos ha publicado una amplia colección de fotografías de lugares en que se ha calculado el coeficiente n a través de los niveles de aguas en crecidas, con valores que van desde 0.024 hasta 0.075 [28]. Sin embargo, pese a esta clase de intentos, resulta difícil extraer conclusiones, debido a que en la estimación global del valor de n , se mezclan el cauce, las orillas y las llanuras (boscosas), no se puede ver el fondo del río y el tamaño de los ríos es muy variable. En el caso de diferenciar áreas se proponen los siguientes valores para n :

Tipo de terreno	n
Hierbas y prados	0.035
Campos de cultivo y huertas	0.040
Árboles espaciados (por ejemplo frutales)	0.050
Árboles como en un parque urbano	0.060
Bosque de ribera y cañaveral	0.075
Zona urbana (según la obstrucción al flujo), mínimo	0.010

Tabla A.1: Algunos valores recomendados del coeficiente de rugosidad de Manning [36].

Densidad. La densidad ρ de un fluido es la cantidad de masa m contenida en un determinado volumen V del fluido, es decir

$$\rho = \frac{m}{V}$$

La unidad en que se mide en el Sistema Internacional de Magnitudes es el kg/m^3 .

Derivada material. El cambio con el tiempo de una variable de campo en un flujo se puede expresar en forma Lagrangiana y Euleriana.

La rapidez de cambio siguiendo una partícula (punto de vista Lagrangiano) se llama derivada material (total o sustancial) y se define como el operador

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$$

donde \mathbf{u} es la velocidad del flujo. El primer término del lado derecho representa la variación de la propiedad del fluido bajo estudio en un punto fijo del espacio y por ello se le llama derivada local, mientras que el segundo representa la variación de dicha propiedad asociado al cambio de posición de la partícula fluida, es decir, el cambio a consecuencia del movimiento del fluido, y se le llama derivada convectiva.

Divergencia. La divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $C^1(D)$ está definida por

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

donde $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

Un significado completo de la divergencia se puede ver en Marsden y Tromba (1991) [35] páginas 226–228.

Energía cinética. La energía cinética es la energía asociada con el movimiento de un cuerpo de masa m que se mueve con una velocidad v , y está definida por

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

Energía potencial. Es la energía asociada con la posición de un objeto dentro de algún sistema. Un sistema es un conjunto de objetos o partículas que interactúan por medio de fuerzas o procesos que son internos al sistema. Por ejemplo, en un sistema formado por la Tierra y objetos pequeños puestos cerca de la superficie terrestre, los objetos interactúan con la Tierra por medio de la fuerza

gravitacional. La energía asociada con la posición relativa de un objeto en el espacio cerca de la superficie terrestre se llama **energía potencial gravitatoria**, y se define por

$$E_p = mgh$$

donde m es la masa del objeto, g la aceleración de la gravedad y h la coordenada vertical donde está posicionado el objeto. El producto mg es el peso del objeto. Esta relación es válida solo para objetos cercanos a la superficie de la Tierra [50]. La energía mecánica total del cuerpo en movimiento es la suma de sus energías cinética y potencial.

Energía interna. Es otra cantidad importante que describe el estado de un fluido. Trabajo y calor se consideran como formas equivalentes de energía, y el cambio de la energía interna de una masa de fluido en reposo como consecuencia de un cambio de estado, se rige por el primer principio de la termodinámica (conservación de la energía). Así, si el estado de una masa uniforme de fluido se modifica por un aumento de calor en la cantidad Q por unidad de masa y por la realización de un trabajo sobre el fluido en la cantidad W por unidad de masa, entonces el incremento en la energía interna E por unidad de masa es

$$\Delta E = Q + W.$$

La energía interna E es una función de los parámetros de estado (presión p y volumen específico $V_e = 1/\rho$ donde ρ es la densidad del fluido) y el cambio ΔE depende solamente de los estados final e inicial, pero Q y W son medidas de efectos externos y pueden por separado (pero no en la suma) depender también de la trayectoria particular en que se realiza la transición entre los dos estados. Si la masa del fluido está térmicamente aislado de su entorno de tal manera que ningún intercambio de calor se produce, entonces $Q = 0$ y el cambio de estado del fluido se dice **adiabático** [6].

Entalpía. Es una función de estado que también se le llama función de calor, y al igual que la energía interna y entropía, es muy útil en la mecánica de fluidos, particularmente cuando los efectos de compresibilidad del fluido son importantes. La entalpía de unidad de masa del fluido está definido por

$$I = E + pV_e$$

donde E es la energía interna del fluido por unidad de masa, p la presión del fluido y V_e su volumen específico. La entalpía I tiene dimensiones de energía por unidad de masa [6].

Entropía. El segundo principio de la termodinámica es la ley de la entropía, así como el primer principio es la ley de la energía. Todo proceso que tiene lugar en la naturaleza ya sea mecánico, eléctrico, químico o biológico, debe ajustarse a estas dos leyes. La entropía o mejor dicho un cambio de entropía, puede definirse considerando dos estados de un sistema y un número cualquiera de trayectorias reversibles (cuasi estáticas) que establezcan su conexión. El calor suministrado al sistema es distinto a lo largo de las diferentes trayectorias y se ha determinado experimentalmente que si el calor Q suministrado en cada punto de la trayectoria se divide por la temperatura absoluta T del sistema en dicho punto y se suman los cocientes para todas las trayectorias, esta suma tiene el mismo valor para todas las trayectorias (reversibles) que unan los mismos extremos, es decir

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \begin{cases} \text{Constante para todas las trayectorias reversibles} \\ \text{comprendidas entre los estados 1 y 2.} \end{cases}$$

Es posible entonces introducir una función de estado cuya diferencia entre los estados 1 y 2 quede definida por la integral anterior. Puede asignarse un valor arbitrario a esta función en cierto estado de referencia tipo, con lo que su valor en cualquier otro estado será una cantidad definida. Dicha función de estado se denomina

entropía del sistema (entropía por unidad de masa de un fluido) y se representa por la letra S . Así

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T},$$

a lo largo de una trayectoria reversible.
Si la variación es infinitesimal, entonces

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Las unidades de la entropía son “calorías/grados Kelvin” u otra análoga (más detalles en Sears (1978) [48]).

Fluido. Un fluido es una sustancia que se deforma de manera continua cuando sobre ella actúa un esfuerzo cortante de cualquier magnitud [38]. Cuando está en equilibrio, no puede soportar fuerzas tangenciales o cortantes. Todos los fluidos son compresibles en cierto grado y ofrecen poca resistencia a los cambios de forma. Los fluidos pueden dividirse en líquidos y gases. Las diferencias esenciales entre líquidos y gases son: a) los líquidos son prácticamente incompresibles y los gases son compresibles y b) los líquidos ocupan un volumen definido y tienen superficies libres mientras que una masa dada de gas se expande hasta ocupar todas las partes del recipiente que lo contiene.

Fluido ideal. Es aquel cuyo flujo es constante (todas las partículas del fluido tienen la misma velocidad al pasar por un punto dado y dicha velocidad es baja), irrotacional, no viscoso e incompresible. Los modelos que se obtienen para flujos de fluidos ideales sirven para aproximar un flujo real, que en general es mucho más difícil de describir [61].

Fluido homogéneo. Un fluido homogéneo es aquel que existe como una especie única en toda la región de interés. Por ejemplo, el aire puede experimentar cambios de densidad, velocidad, temperatura,

pero se mantiene identificable como una mezcla estable de gases que llamamos aire. Del mismo modo, el agua o el mercurio pueden ser calentados o acelerados, pero a menos que ocurra su cambio de fase siguen siendo líquidos, los líquidos pueden considerarse homogéneos.

Fluido newtoniano y no newtoniano. Un fluido se dice que es newtoniano si el esfuerzo cortante está relacionado linealmente con la razón de deformación de corte, es decir

$$\tau = \mu \frac{du}{dy},$$

donde τ es el esfuerzo cortante, μ es una constante que se llama viscosidad absoluta (viscosidad dinámica o simplemente viscosidad), u la velocidad del fluido e y la distancia en la dirección perpendicular del movimiento. El término du/dy se llama gradiente de velocidad (razón de deformación de corte o velocidad de deformación angular). La mayor parte de los fluidos comunes, tanto líquidos (agua, aceite y gasolina) como gaseosos (aire) son newtonianos. Los fluidos no newtonianos son aquellos donde el esfuerzo cortante no está relacionado linealmente con la razón de deformación de corte [38].

Una forma de estudiar el movimiento de un fluido es fijar la atención en un punto en el espacio que ocupa el fluido en un instante t y especificar en dicho punto la densidad ρ del fluido, velocidad \mathbf{v} y presión p . En ese punto se examina lo que sucede con el fluido que pasa por él. El estudio del movimiento de un fluido se llama *flujo* y dependiendo de las características de este se les puede clasificar en:

Flujo bidimensional. Un flujo es bidimensional si vector velocidad sólo depende de dos variables espaciales. En este tipo de flujo se supone que todas las partículas fluyen sobre planos paralelos a lo largo de trayectorias que resultan idénticas si se comparan los planos entre sí, no existiendo, cambio alguno en dirección perpendicular a los planos.

Flujo incompresible y compresible. Un flujo se dice incompresible si la densidad permanece aproximadamente constante a lo largo de todo el flujo. Por lo tanto, el volumen de todas las porciones del fluido permanece inalterado sobre el curso de su movimiento cuando el flujo o el fluido es incompresible. En esencia, las densidades de los líquidos son constantes y así el flujo de ellos es típicamente incompresible. Por otro lado, la compresibilidad de un flujo es básicamente una medida en el cambio de la densidad. Los gases son en general muy compresibles, en cambio, la mayoría de los líquidos tienen una compresibilidad muy baja.

Flujo laminar y turbulento. Un flujo se llama laminar si el fluido se desplaza en láminas o capas paralelas. Un flujo se dice turbulento si las partículas del fluido se mueven siguiendo trayectorias muy irregulares.

Flujo permanente y no permanente. Un flujo se llama permanente o estacionario si las propiedades como densidad, velocidad y presión no cambian en el tiempo en un punto del espacio, o bien si las variaciones en ellas son muy pequeñas con respecto a los valores promedios; aunque las propiedades pueden cambiar de un punto a otro del espacio. Una partícula de fluido, en un punto determinado, tiene siempre la misma velocidad independientemente del instante en el que llegue a dicha posición. Es claro que un flujo será no permanente o no estacionario si no cumple con la definición de un flujo permanente.

Flujo rotacional e irrotacional. Si el campo de velocidad

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

de un fluido es de clase C^1 , su rotacional definido por

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} := \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathbf{k},$$

se llama el **campo de vorticidad** del flujo. Un flujo se denomina **flujo potencial** o **flujo irrotacional** (que no tiene rotaciones) si el campo de vorticidad $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ en todo punto del dominio y para cualquier instante t . Esto significa que el flujo no presenta remolinos en el dominio de estudio. En cambio, si el campo de vorticidad no es nula en todos los puntos del dominio, el flujo se llama **rotacional** [11, 27].

Flujo tridimensional. Un flujo se dice tridimensional si el vector velocidad depende de tres coordenadas espaciales. Es el caso más general en que las componentes del vector velocidad \mathbf{v} dependen de las coordenadas espaciales x , y , z , y del tiempo t .

Flujo unidimensional. Un flujo se dice unidimensional si el vector velocidad sólo depende de una variable espacial, es decir que se desprecian los cambios de velocidad transversales a la dirección principal del escurrimiento. Dichos flujos se dan en tuberías largas y rectas o entre placas paralelas.

Flujo uniforme. Un flujo se llama uniforme cuando cualquier magnitud que se considere del flujo (profundidad hidráulica, tirante, área de la sección transversal o velocidad media) permanece invariante entre todas las secciones del canal en un instante dado. Una partícula de fluido, en un instante determinado, tiene siempre la misma velocidad independientemente del punto del espacio al que llegue. Si el canal es largo y prismático, es decir, ni la forma de la sección transversal ni la pendiente de fondo del canal cambian con la distancia, entonces el flujo se acelera o desacelera a lo largo de una cierta distancia, hasta que las fuerzas motoras y resistivas se equilibran. De ahí en adelante la velocidad del flujo y el tirante se mantienen constantes, configurándose la situación de flujo uniforme. La condición de flujo uniforme rara vez ocurre en la práctica, sin embargo el concepto de flujo uniforme es central

para la comprensión de muchos problemas y en ocasiones permite aproximar a una solución simple y satisfactoria para diversos problemas prácticos.

Flujo viscoso y no viscoso. Un flujo se dice viscoso si presenta resistencia al avance. Todos los fluidos reales son viscosos. Es claro que un flujo no viscoso es aquel que no presenta resistencia al avance.

Fórmula de Chézy. Fue presentada en 1769, por el ingeniero francés Antoine de Chézy. Es la primera fórmula de fricción que se conoce. La fórmula permite obtener la velocidad media del flujo en un canal y establece que

$$v = C\sqrt{R_h S}$$

donde v es la velocidad media del flujo, R_h es el radio hidráulico, S es la pendiente longitudinal del fondo del canal y C es el coeficiente de Chézy.

Fuerza de Coriolis. Es una fuerza ficticia que aparece cuando un cuerpo está en movimiento con respecto a un sistema en rotación y se describe su movimiento en ese sistema de referencia. La fuerza de Coriolis es diferente de la fuerza centrífuga y siempre es perpendicular a la dirección del eje de rotación del sistema y a la dirección del movimiento del cuerpo vista desde el sistema en rotación (más información en Holton 2004 [25]).

Gradiente. El gradiente de una función diferenciable $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto $(x, y, z) \in D$, es el vector

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right).$$

Número de Froude. El número de Reynolds y los términos laminar y turbulentos no son suficientes para caracterizar todas las clases de flujo en los canales abiertos. Además de la viscosidad *versus* los efectos inerciales, también es importante la relación de las fuerzas

inerciales a las gravitacionales, dada por el *número de Froude*¹ F_r , definido por

$$F_r = \frac{v}{\sqrt{gy_h}}$$

donde v es la velocidad media del flujo en m/s, g es la aceleración de la gravedad en m/s² y y_h es la profundidad hidráulica, dada por $y_h = A/T$, donde A es el área mojada en m² y T es el ancho de la superficie libre del fluido en la parte superior del canal en m [37]. El mecanismo principal que sostiene el flujo en un canal abierto es la fuerza de gravitación. Por ejemplo, la diferencia de altura entre dos embalses hará que el agua fluya a través de un canal que los conecta. El parámetro que representa este efecto gravitacional es el Número de Froude, que resulta útil en los cálculos del resalto hidráulico, en el diseño de estructuras hidráulicas y en el diseño de barcos. El flujo se clasifica en términos de este número como sigue:

Flujo subcrítico. También se le llama flujo tranquilo y se presenta cuando $F_r < 1$. En este caso, el fluido tiene velocidad relativa baja, su profundidad es relativamente grande, prevalece la energía potencial y predominan las fuerzas gravitacionales.

Flujo crítico. Se presenta cuando $F_r = 1$. El flujo corresponde a un estado teórico en corrientes naturales y representa el punto de transición entre regímenes subcrítico y supercrítico.

Flujo transcrito. Se presenta cuando $0.7 \leq F_r \leq 1.3$. Es un flujo bastante inestable en el sentido que suele formar resaltes o discontinuidades, pero es casi siempre el que se adapta a un cauce.

Flujo supercrítico. Se presenta cuando $F_r > 1$. También se le llama flujo rápido, el fluido tiene una velocidad relativamente

¹William Froude (1810–1879) fue un ingeniero hidráulico y arquitecto naval inglés. Fue el primero en establecer leyes confiables respecto a la resistencia que el agua ejerce al avance de los navíos y en calcular su estabilidad.

alta y poca profundidad, prevalece la energía cinética y predominan las fuerzas inerciales. Propios en cauces de gran pendiente o en ríos de montaña.

Número de Reynolds. El comportamiento de un fluido, en particular en lo que se refiere a las pérdidas de energía, depende de que el flujo sea laminar o turbulento. Una forma de predecir el tipo de flujo sin tener que observarlo directamente (por ejemplo para fluidos que van por tubos opacos) es mediante la estimación de un número que se conoce como número de Reynolds, que para el caso del flujo en un canal abierto toma la forma

$$R_e = \frac{vR}{\nu}$$

donde v es la velocidad media del flujo, R el radio hidráulico y ν la viscosidad cinemática del fluido. Resultados experimentales muestran que en canales abiertos pueden ocurrir los siguientes tipos de flujos [37]:

Flujo laminar. Ocurre cuando $R_e < 500$, por lo que se tiene un flujo con viscosidad dominante. En el movimiento de las partículas, las altas interacciones por viscosidad las ordenan en la dirección del flujo, con lo que sus trayectoria no se cruzan.

Flujo transcrito. Se presenta en la región de transición $500 \leq R_e \leq 2000$.

Flujo turbulento. Se presenta normalmente cuando $R_e > 2000$, por lo que en principio los efectos viscosos son despreciables frente a los efectos de inercia, salvo en las zonas del flujo donde se tengan altos gradientes de velocidad, las partículas se mueven aleatoriamente, entrecruzándose continuamente las trayectorias.

Con la combinación del significado de los números de Froude y Reynolds, es posible que en canales abiertos puedan darse las clases de flujos siguientes:

Flujo subcrítico-laminar: $R_e < 500$ y $F_r < 1$.

Flujo subcrítico-turbulento: $R_e > 2000$ y $F_r < 1$.

Flujo supercrítico-turbulento: $R_e > 2000$ y $F_r > 1$.

Flujo supercrítico-laminar: $R_e < 500$ y $F_r > 1$.

Además, los flujos pueden ocurrir en la región de transición, pero tales flujos son inestables y muy difíciles de caracterizar [37].

Presión. Es la cantidad de fuerza que se ejerce sobre una unidad de área de alguna sustancia, es decir

$$p = \frac{F}{A}$$

donde F es la fuerza normal a la superficie y A es el área donde se aplica la fuerza. En el Sistema Internacional de unidades la unidad de presión es el pascal = 1N/m^2 . Un sólido es un cuerpo rígido y puede soportar que se le aplique fuerza sin que cambie sensiblemente su forma, un líquido solo puede soportar que se le aplique fuerza en una superficie o frontera cerrada, si el fluido no está restringido en su movimiento empezará a fluir bajo el efecto del esfuerzo cortante en lugar de deformarse elásticamente. La fuerza que ejerce un fluido sobre las paredes del recipiente que lo contiene actúa siempre en forma perpendicular a las paredes.

Presión hidrostática. Es la presión que ejerce el peso de un fluido en reposo sobre el fondo y las paredes del recipiente que lo contiene, y sobre la superficie de cualquier cuerpo sumergido en él. La presión hidrostática genera en fluidos en reposo, una fuerza perpendicular a las paredes del recipiente o a la superficie del objeto sumergido sin importar la orientación que adopten las caras. Cualquier fuerza tangencial que se ejerza sobre el fluido por las paredes constituiría un esfuerzo cortante y produciría un deslizamiento del fluido paralelo a la pared, por lo que si el líquido está en reposo, no hay tal desplazamiento, no hay fuerza tangencial, y la fuerza es normal a la superficie en cualquier punto. Si el líquido

es incompresible, su densidad ρ es constante, por lo que la presión hidrostática $p(h)$ en un punto situado a una profundidad h por debajo de la superficie libre está dada por

$$p(h) = \rho gh + p_0$$

donde g es la aceleración de la gravedad y p_0 es la presión en la superficie del líquido. Si la presión p_0 aumentara, por ejemplo, ajustando un pistón sobre la superficie superior y ejerciendo una presión hacia abajo sobre él, la presión p a determinada profundidad h , aumentaría exactamente en la misma cantidad p_0 . Este hecho fue enunciado por el científico francés Blas Pascal (1623–1662) en 1653, y se conoce como el **principio de Pascal** (más detalles en Sears (1978) [48]).

Radio hidráulico. Es un parámetro importante en las obras hidráulicas de canales abiertos (artificiales o naturales), y se define como la relación entre el área A de la sección transversal neta de una corriente de flujo y el perímetro mojado P_M de dicha sección transversal. Esto es

$$R_h = \frac{A}{P_M}.$$

En un canal semicircular de radio r , $A = \pi r^2/2$ y $P_M = \pi r$, por lo que el radio hidráulico $R_h = r/2$. Si el tirante h es muy inferior a la anchura del canal, entonces $R_h \cong h$.

Resalto hidráulico. Este fenómeno ocurre cuando el cambio de profundidad del flujo es desde un nivel bajo a un nivel alto. Si el cambio de profundidad es pequeño, se denominará resalto ondulatorio, puesto que el agua no subirá de manera abrupta y obvia, sino que pasará de un nivel a otro, a través de una serie de ondulaciones que van disminuyendo gradualmente de tamaño. Si por el contrario el cambio de profundidad es grande, se conoce como resalto directo. Este involucra una pérdida de energía relativamente grande mediante la disipación en el cuerpo turbulento de

agua dentro del resalto. En consecuencia el contenido de energía en el flujo después del resalto es considerablemente menor que el contenido antes del mismo. El resalto hidráulico es el ascenso brusco del nivel del agua que se presenta en un canal abierto a consecuencia del retardo que sufre una corriente de agua que fluye a elevada velocidad. Este fenómeno presenta un estado de fuerzas en equilibrio, en el que tiene lugar un cambio violento del régimen de flujo, de supercrítico a subcrítico.

Tirante de agua. También se dice calado y es la profundidad h del agua desde cualquier punto de su superficie libre.

Viscosidad. Es una medida de la fricción interna del fluido, es decir, caracteriza su resistencia a la deformación por corte. Las fuerzas viscosas se oponen al movimiento de una porción del fluido relativo a otra. A causa de la viscosidad es necesario ejercer una fuerza para obligar a una capa líquida a deslizar sobre otra, o para obligar a una superficie a deslizar sobre otra cuando hay una capa de líquido entre ambas. La viscosidad es pequeño para líquidos que fluyen fácilmente, como el petróleo, y grande para líquidos como las melazas o la glicerina [48].

Bibliografía

- [1] Alcrudo, F. (1992). *Esquemas de Alta Resolución de Variación Total Decreciente para el Estudio de Flujos Discontinuos de Superficie Libre*. Tesis Doctoral. España: Universidad de Zaragoza.
- [2] Alcrudo, F., García-Navarro, P. (1993). A High-Resolution Godunov-Type Schemes in Finite Volumes for the 2D Shallow-Water Equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 16, 489–505.
- [3] Alen III, M.B., Herrera, I., Pinder, G.F. (1988). *Numerical Modeling in Science and Engineering*. U.S.A.: John Wiley & Sons.
- [4] Anderson, J.D., Jr. (1997). *A History of Aerodynamics*. U.S.A.: Cambridge University Press.
- [5] Andrés-Urrutia, A., Garrote-De-Marcos, L.M. (Directores). (2007). *Investigación de Alternativas de Modelización Bidimensional de Planas Inundables*. Memoria. Universidad Politécnica de Madrid e INCLAM, S.A., reporte no publicado, 40 p.
- [6] Batchelor, G.K. (2000). *An Introduction to Fluid Dynamics*. U.S.A.: Cambridge University Press.
- [7] Bermúdez, A., Dervieux, A., Desideri, J-A., Vázquez-Cendón, M.E. (1998). Upwind Schemes for the Two Dimensional Shallow Water Equations with Variable Depth Using Unstructured Meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155, 49–72.

- [8] Bermúdez, A., Vázquez-Cendón, M.E. (1991). Extensión de Algunos Esquemas Descentrados a las Leyes de Conservación. *Actas del XII Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones y II Congreso de Matemática Aplicada*, ISBN 84-7468-736-5, 387–392.
- [9] Boussinesq, J. (1877). Théorie de l'Écoulement Tourbillant. *Mém. Présentés par Divers Savants Acad. Sci. Inst. Fr.*, 23, 46–50.
- [10] Calzada-Falcón, F. (1997). *Desarrollo Sustentable en Tabasco: Posibilidades y Limitaciones*. Villahermosa, Tabasco: Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
- [11] Chorin, A.J., Marsden, J.E. (1993). *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. 3rd ed. New York: Springer-Verlag.
- [12] Cline, A.K. (1974). Scalar an Planar Valued Curve Fitting Using Splines Under Tension. *ACMCOM*, 17, 218–220.
- [13] CONAGUA: Dirección Local Tabasco. (Noviembre 17, 2007). Concentrado de gastos, niveles y precipitaciones del 1 de octubre al 17 de noviembre de 2007.
- [14] CONAGUA: Organismo de Cuenca Frontera Sur. (Agosto 30, 2010). Boletín de Información Hidrométrica, Climatológica y de Presas, [en línea] URL <http://www.conagua.gob.mx/OCFS07/Contenido/Documentos/BoletinHidrometricoydePresas.pdf>
- [15] Courant, R., Friedrichs, K, Lewy, H. (1928). Über die partiellen Differenzialgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100, 32–74.
- [16] Cruz-Vázquez, S. (2012). *Generación de Velocidades Iniciales del Flujo de una Sección del Río Grijalva*. Tesis de Licenciatura en Matemáticas. Tabasco, México: Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
- [17] de Boor, C. (2001). *A Practical Guide to Splines*. New York: Springer-Verlag.

- [18] ERN. (Noviembre 7, 2007). Inundación en Tabasco por Eventos Meteorológicos, [en línea] URL <http://www.ern.com.mx/pdf/Inundacion/ERN-071107-I01.pdf>
- [19] Eymard, R., Gallouët, T., Herbin, R. (2000). Finite Volume Methods. *Handbook of Numerical Analysis*, 7, 713–1018.
- [20] Fe-Marqués, J.M. (2005). *Aplicación del Método de Volúmenes Finitos a la Resolución Numérica de las Ecuaciones de Aguas Someras con Incorporación de los Esfuerzos Debidos a la Turbulencia*. Tesis Doctoral. España: Universidade da Coruña.
- [21] Gerbeau, J.-F., Perthame, B. (2000). *Derivation of Viscous Saint-Venant System for Laminar Shallow Water; Numerical Validation*. Rapport de recherche No. 4084. France: Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique.
- [22] González-Aguirre, J.C. (2010). *Simulación Numérica del Flujo de una Sección del Río Grijalva*. Tesis de Licenciatura en Matemáticas. Tabasco, México: Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
- [23] Harten, A. (1984). On a Class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite Difference Schemes. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 21(1), 1–23.
- [24] Hirsch, Ch. (2007). *Numerical Computation of Internal & External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. 2nd ed. Great Britain: Butterworth-Heinemann Elsevier.
- [25] Holton, J.R. (2004). *An Introduction to Dynamic Meteorology*. 4th ed. U.S.A.: Elsevier Academic Press.
- [26] Kincaid, D., Cheney, W. (2002). *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*. 3rd ed. U.S.A.: American Mathematical Society.
- [27] Landau, L.D., Lifshitz, E.M. (1987). *Fluid Mechanics*. 2nd ed. Vol. 6 of Course of Theoretical Physics. New York: Pergamon Press.

-
- [28] Leopold, L.B., Wolman, M.G., Miller, J.P. (1995). *Fluvial Processes in Geomorphology*. New York: Dover Publications.
- [29] Leveque, R.J. (2002). *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. U.S.A.: Cambridge University Press.
- [30] Liñan, A. (2009). Las Ecuaciones de Euler de la Mecánica de Fluidos. In: *La obra de Euler: Tricentenario del Nacimiento de Leonhard Euler (1707-1783)*. Madrid: Instituto de España, 151–177.
- [31] López-López, J., Alavez-Ramírez, J., Hernández-López, J.L. (2009). Solución Numérica del Modelo de Saint-Venant Vía Volúmenes Finitos. *Revista Ciencias Básicas UJAT*, 8(2), 34–53.
- [32] Luege-Tamargo, J.L. (2008). Plan Hídrico Integral de Tabasco, [en línea] URL <http://www.conagua.gob.mx/CONAGUA07/Temas/PlanHidricoIntegralTabasco.pdf>
- [33] Macías-M., J.M. (Coordinador general). (2008). *Reporte de Investigación: Inundaciones de Villahermosa, Tabasco, Octubre-Noviembre 2007*. México: Centro de Investigaciones y Estudios Superiores en Antropología Social.
- [34] Marche, F. (2007). Derivation of a New Two-Dimensional Viscous Shallow Water Model With Varying Topographic, Bottom Friction and Capillary Effects. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 26, 49–63.
- [35] Marsden, J.E., Tromba, A.J. (1991). *Cálculo Vectorial*. 3a ed. E.U.A.: Addison-Wesley Iberoamericana.
- [36] Martín-Vide, J.P. (2006). *Ingeniería de Ríos*. 2a ed. España: Universitat Politècnica de Catalunya.
- [37] Mott, R.L. (2006). *Mecánica de Fluidos*. 6a ed. México: Pearson Educación.

- [38] Munson, B.R., *et al.* (2012). *Fundamentals of Fluid Mechanics*. 7th ed. U.S.A.: John Wiley & Sons.
- [39] Murillo, J., Brufau, P., García-Navarro, P., Rodríguez-Pallarés, M., Andrés-Urrutia, A. (2007). A Mathematical Model for Numerical Simulation of Shallow Water Flow: Description and Practical Application of GUAD|2D. Germany: Shaker Verlag, *Aachen 2007*. ISBN: 978-3-8322-6397-3, 409–424, [en línea] URL <http://enviroinfo.eu/sites/default/files/pdfs/vol116/0409.pdf>
- [40] Murillo, J., Brufau, P., García-Navarro, P., Rodríguez-Pallarés, M., Andrés-Urrutia, A. (2007). Aplicación del Modelo Bidimensional GUAD-2D para la Determinación de Zonas Inundables en el T. M. de Fraga (Huesca), [en línea] URL http://www.ciccp.es/biblio_digital/Icitema_III/congreso/pdf/030302.pdf
- [41] Murillo, J., García-Navarro, P., Burguete, J., Brufau, P. (2006). A Conservative 2D Model of Inundation Flow With Solute Transport Over Dry Bed. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 52, 1059–1092.
- [42] Murillo, J., García-Navarro, P., Burguete, J., Brufau, P. (2007). The Influence of Source Terms on Stability, Accuracy and Conservation in Two-Dimensional Shallow Flow Simulation Using Triangular Finite Volumes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 54, 543–590.
- [43] Navier, C.L.M.H. (1822). Mémoire Sur les Lois du Mouvement des Fluides. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, 6, 389–416.
- [44] Pérez, J.M., López, A., Hidalgo, A., Conde, C. (1998). Comparación de Algunos Esquemas de Volúmenes Finitos y de Elementos Finitos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 14(3), 365–382.
- [45] Pruess, S. (1978). An Algorithm for Computing Smoothing Splines in Tension. *Computing*, 19, 365–373.

- [46] Rodi, W. (1993). *Turbulence Models and Their Application in Hydraulics: A State-of-the-Art Review*. 3rd ed. New York: Taylor & Francis.
- [47] Schweikert, D.G. (1966). An Interpolation Curve Using Splines in Tension. *Journal Mathematics & Physics*, 45, 312–317.
- [48] Sears, F.W. (1978). *Mecánica, Calor y Sonido: Fundamentos de la Física*. 7a ed. España: Aguilar.
- [49] Senado de la República: Comisión de Asuntos Hidráulicos. (2008). Informe de las Inundaciones de 2007 en el Estado de Tabasco: Diagnóstico Preliminar, [en línea] URL <http://www.imta.gob.mx/gaceta/anteriores/g12-04-2008/informe-tabasco.pdf>
- [50] Serway, R.A., Faughn, J.S. (2005). *Física*. 6a ed. México: International Thomson Editores.
- [51] Stoer, J., Bulirsch, R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis*. 3rd ed. New York: Springer-Verlag.
- [52] Stokes, G.G. (1845). On the Theories of Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8, 287–305.
- [53] Toro, E.F. (2009). *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. 3rd ed. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- [54] Tu, J., Yeoh, G.H., Liu, Ch. (2008). *Computational Fluid Dynamics: A Practical Approach*. U.S.A.: Elsevier Inc.
- [55] van Leer, B. (1977). Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme III. Upstream-Centered Finite-Difference Schemes for Ideal Compressible Flow. *Journal of Computational Physics*, 23(3), 263–275.

- [56] Vázquez-Cendón, M.E. (1994). *Estudio de Esquemas Descentralizados para su Aplicación a las Leyes de Conservación con Términos Fuente*. PhD Thesis. España: Universidad de Santiago de Compostela.
- [57] Vázquez-Cendón, M.E. (2008). *Introducción al Método de Volúmenes Finitos*. España: Universidad de Santiago de Compostela.
- [58] Vázquez, J.L. (2003). *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica de Fluidos*. España: Universidad Autónoma de Madrid.
- [59] Vázquez, J.L. (2004). La ecuación de Navier-Stokes: Un reto físico-matemático para el siglo XXI. *Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza*, 26, 31–56.
- [60] Wikipedia. (2010). Inundación, [en línea] URL <http://es.wikipedia.org/wiki/Inundaci%C3%B3n>
- [61] Wilson, J.D., Buffa, A.J. (2003). *Física*. 5a ed. México: Pearson Educación.

Índice Alfabético

- Anisotropía, 189
- Boussinesq, J.V., 61
- Caída hidráulica, 189
- Calado, 204, *véase también* tirante.
- Caudal, 189, *véase también* gasto.
- Chézy, A. de, 67
- Coefficiente de rugosidad de
Manning, 79, 190
- CONAGUA, 8
- Condición CFL, 101
- Coriolis, G.-G. de, 67
- Cota mojada, 9
- Densidad, 191
- Derivada material, 17, 191
- Divergencia, 192
- Ecuaciones de
Euler, 42, 47
las aguas someras, 81
Navier-Stokes, 48, 49, 59
Reynolds en 3D, 60
Saint-Venant en 2D, 81
- Ecuaciones dinámicas, 2, 70
- Energía
cinética, 192
cinética turbulenta, 62
interna, 193
potencial, 192
potencial gravitatoria, 193
- Entalpía, 194
- Entropía, 194
- Euler, L.P., 13
- Fluido, 195
homogéneo, 195
ideal, 18, 195, *véase también*
Fluido perfecto
incompresible, 36
isoentrópico, 43
newtoniano, 196
no newtoniano, 196
perfecto, 13, *véase también* Fluido ideal
Viscoso, 49
- Flujo, 196
bidimensional, 196
compresible, 197
crítico, 200
incompresible, 197
irrotacional, 197
laminar, 50, 197, 201, 202

- no permanente o no estacionario, 197
- permanente o estacionario, 197
- rotacional, 197
- subcrítico, 200, 202
- supercrítico, 200, 202
- transcrítico, 200, 201
- tridimensional, 198
- turbulento, 50, 197, 201, 202
- unidimensional, 198
- uniforme, 198
- viscoso, 199
- Fórmula de Chézy, 199
- Fricción, 199, *véase* Coeficiente de rugosidad de Manning
- Froude, W., 200
- Fuerza de Coriolis, 199
- Gasto, 189, *véase también* caudal.
- Gauss, J.C.F., 16
- Gradiente, 199
- GUADFlow 2D, 5
- INEGI, 5
- Inundación, 1
- Isotropía, 189
- Kronecker, L., 61
- Leibniz, G.W., 68
- Ley de balance de momentos:
 - forma diferencial, 19
 - forma integral, 22
- Ley de conservación de la energía:
 - Energía total del fluido, 39
 - Forma diferencial, 43
 - Forma integral, 45
- Ley de conservación de la masa, 15
 - forma diferencial o ecuación de continuidad, 16
 - forma integral, 15
- Manning, R., 67
- Modelo numérico, 4
- Newton, S.I., 14
- Número de Froude, 199
- Número de Reynolds, 201
- Presión, 202
 - Presión hidrostática, 202
- Principio de Pascal, 203
- Promedio temporal, 53
- Radio hidráulico, 203
- Régimen
 - de transición, 50
 - laminar, 52
 - turbulento, 52
- Resalto hidráulico, 203
- Reynolds, O., 50
- Río
 - Carrizal, 7
 - Grijalva, 7
 - La Sierra, 7
 - Pichucalco, 7
 - Viejo Mezcalapa, 7
- Saint-Venant, J.-C. B. de, 81
- Spline
 - cúbico, 132

completo, 135
natural, 135
periódico, 135
de tensión, 138

Teorema del transporte, 33

Tirante, 204, *véase también* calado.

Viscosidad, 204, *véase también* Fluido viscoso o flujo viscoso
cinemática, 49
cinemática turbulenta, 63
dinámica, 48
dinámica turbulenta, 62

Volúmenes finitos, 85
tipo arista, 86
tipo celda, 89–91
tipo vértice, 87, 88

Fotografías de la Inundación

Fotografías de la inundación de 2007, donde se muestra el nivel que alcanzó el agua en distintas partes de la ciudad de Villahermosa, Tabasco, México. Estas fotografías fueron proporcionadas por el que fuera nuestro gran amigo y colaborador Gerardo De la Cruz García.

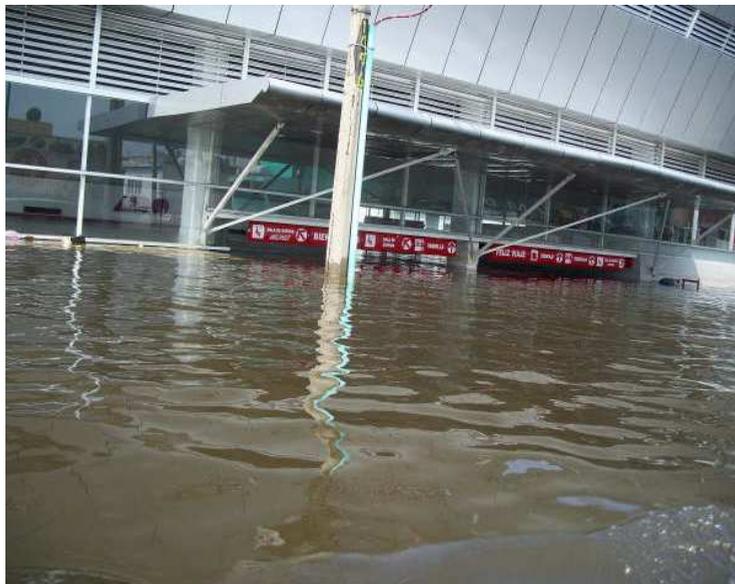




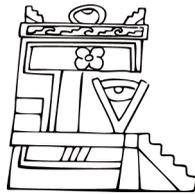












Difusión y Divulgación
Científica y Tecnológica

José Manuel Piña Gutiérrez
Rector

Wilfrido Miguel Contreras Sánchez
Secretario de Investigación, Posgrado y Vinculación

Fabián Chablé Falcón
Director de Difusión y Divulgación Científica y Tecnológica

Francisco Morales Hoil
Jefe del Departamento Editorial de Publicaciones No Periódicas

Esta obra se terminó de imprimir el 20 de diciembre de 2013, con un tiraje de 500 ejemplares en los talleres de Morari Formas Continuas S. A. de C. V.; Calle Heroico Colegio Militar 116; Colonia Atasta; Villahermosa, Tabasco, México. El cuidado estuvo a cargo de su autor y del Departamento Editorial de Publicaciones No Periódicas de la Dirección de Difusión y Divulgación Científica y Tecnológica de la UJAT.